

А. Р. М. Д.

Р. МЭММЭДОВ

**АЛИ РИЈАЗИЈАТ
КУРСУ**

II

МААРИФ • 1981

1981

836

Р. МƏММƏДОВ

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРН ДОКТУРУ, ПРОФЕССОР

АЛИ РИЈАЗИЈЈАТ КУРСУ

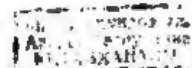
II

ДƏРСЛИК

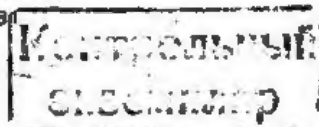
АЗƏРБАЙҖАН ССР АЛИ ВƏ ОРТА
ИХТИСАС ТƏҲСИЛИ НАЗИРЛИЈИ ТƏРƏФИНДƏН
ТƏСДИГ ЕДИЛМИШДИР

48216

48551



МААРИФ НƏШРИЈАТЫ
Бакы - 1981



Али ризвијат курсунун јени програмы асасында јазылмыш бу дәрслијин I чилди 1978-чи илдә бурахылмышдыр.

Дәрслијин II чилдиндә бирдәјишәнли функцияларын интеграл һесабы, чәдәјишәнли функцияларын диференциал һесабы, али диференциал тәңликләр системи, дајанышлыг кәзәријәсинин елементлари, илди вә функциониял сыралар, Фурје сырасы вә абстракт Гильберт фазасында орнормал функциялар системи үзә сыралар кәзәријәси шәрһ едиләр.

Али техники мәктәбләрин тәләбәләрн үчүн јазылмыш бу дәрсликән педагогичи институтларын вә университетин тәләбәләрн дә истифадә едә биләләр.

Дәрслијә Азәрбајҹан Иншвәт Мүһәндисләри Институтунун «Али ризвијат» кафедрасы рә'ј веришдиләр.

Елми редактору А. Бабајев

Азәрбајҹан ССР ЕА-ини мүхбир үзәү, профессор

© «Мәариф» нәшријатн, 1981

60602-200 128-81 1702050000
M-652

III НИССӘ

БИРДӘЈИШӘНЛИ ФУНКЦИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛ ҺЕСАБЫ

XXI ФӘСИЛ

ГЕЛРИ-МУӘЛЛӘН ИНТЕГРАЛ

§ 1. ИБТИДАИ ФУНКЦИЈА ВӘ ГЕЛРИ-МУӘЛЛӘН ИНТЕГРАЛЫН ТӘ'РИФИ

Диференциал һесабында веғилмиш функциянын төрәмәсини (вә ја диференциалынын) тапмагла мәшғул олулар. Функциянын төрәмәси верилди кдә онун өзүнү тапмаг мәсәләси исе интеграл һесабында өјрәниләр.

Интеграл һесабы мәсәләләрини тәдигинә кечмәздән әввәл ибтидаи функция аниәләшмә илә таныш олаг.

Фәрз едәк ки, $f(x)$ вә $g(x)$ һәр һәксы $[a, b]$ парчасында (парча әвәзинә интервал, јарыминтервал вә с. дә кәтүрмәк олар) тә'јин олуниш функциялардыр.

Тә'рифи. $[a, b]$ парчасынын бүтүн нәггәләриндә

$$F'(x) = f(x) \quad (1)$$

вә ја

$$dF(x) = f(x) dx \quad (2)$$

бәрабәрлији өдәнилдирсә, онда $F(x)$ функциясына $f(x)$ -ин $[a, b]$ парчасында ибтидаи функциясы дејиләр.

Ајдындыг ки, $F(x)$ функциясы $f(x)$ -ин ибтидаи функциясыдырса, онда C ихтијари сабит әләд олдугда $F(x) + C$ функциясы да һәммин $f(x)$ функциясынын ибтидаи функциясы олар. Догрудан да, 1) бәрабәрлијинә кәрә:

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x).$$

Буридан нәтичә олараг чылар ки, әхәр $f(x)$ функциясынын бир $F(x)$ ибтидаи функциясы вәдирсә, онда $F(x) + C$ (C ихтијари сабитдир) шәклиндә олан сонсуз сајаа бүтүн функциялар да һәммин функциянын ибтидаи функциясыдыр. Белә бир суал гаршыја чыкы: $F(x)$ функциясы $[a, b]$ парчасында $f(x)$ -ин ибтидаи функциясы олдугда C сабитинә ихтијари гијмәтләр вермәклә $F(x) + C$ нфадәсини ән $f(x)$ -ин бүтүн ибтидаи

функцияларының алымы олармы? Бу суалга ашагыдагы сәдә теорем җавап верир.

Теорем. $f(x)$ функциясының иктияри ики $F(x)$ вә $\Phi(x)$ иктидан функциясы бир-бириндән сабит әдәдәлә фарлаңыр:

$$\Phi(x) = F(x) + C. \quad (3)$$

Догрудан да, $[a, b]$ парчасының иктияри x нөгтәсиндә өдәңләң

$$F'(x) = f(x)$$

вә

$$\Phi'(x) = f(x)$$

бәрабәрликләриндән

$$[\Phi(x) - F(x)]' = 0$$

мүнәсибәтк алыңыр. Бурадан (XVII, § 1) алыңыр ки,

$$\Phi(x) - F(x) = C$$

вә C (3) бәрабәрлиң доғрудур (C иктияри сабитдир).

Бу теорем көстәриң ки, $F(x)$ функциясы $f(x)$ -иң һәр һансы иктидан функциясыдырса, онда-онун бүтүн иктидан функциялары $F(x) + C$ чохлуғуна дахилдир.

Тә’риф. $f(x)$ функциясының $[a, b]$ парчасында бүтүн иктидан функциялары чохлуғуна $f(x)$ функциясының һәмийн парчада гејри-мүәјјән интегралы дејиләр вә

$$\int f(x) dx \quad (4)$$

киңи ишарә олунур.

Демәли, $F(x)$ функциясы $f(x)$ -иң һәр һансы иктидан функциясыдырса, онда

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Бу бәрабәрлиңиң һәқишә

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (5)$$

киңи язырлар. Бурада $f(x)$ интегралалты функция, $f(x) dx$ исе интегралалты ифадә адланыр.

Мисал 1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ функциясы $f(x) = x$ функциясының иктидан функциясы олдуғундан,

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Мисал 2. $F(x) = -\cos x$ функциясы $f(x) = \sin x$ функциясының иктидан функциясы олдуғундан

$$\int \sin x = -\cos x + C.$$

Интеграл ишарәсн — гында тәхчә интегралалты $f(x)$ функциясының язмайыб, $f(x) dx$ шәкліндә интегралалты ифадәни язмағым әсәс сәбәби одур ки, белә яздыгда интегралың һансы дәјишәнә көрә көтүрүмәсн әдәм олур. Мисәлән, $y^2 x^2$

функциясының x вә y дәјишәнәләринә көрә интеграллары мүнәтәһидир:

$$\int x^2 y^2 dy = \frac{x^2 y^3}{3} + C, \quad \int y^2 x^2 dx = \frac{y^2 x^3}{3} + C.$$

Буна көрә дә $y^2 x^2$ функциясы интегралының һансы дәјишәнә көрә көтүрүлдүҗү көстәрилмәлидир.

Һәндәси оларағ (4) гејри-мүәјјән интегралы бирпараметрли $y = F(x) + C$ мүстәви әриләри (C параметрдиң) ямләсиндән ибарәтдир. Бу ямләниң һәр бир әриск дикәриндән Оу оху истигамәтиндә өзүнә паралел оларағ $[a, b]$ ашагы көчүрмәклә алыңыр. Бу әриләрә интеграл әриләри дејиләр.

Интеграл әриләриниң белә бир хәссәси вардыр ки, оңларың һәр бириңә абсисләри ејки $x = x_0$ әдәдә олан нөгтәләрдә чәкилимиш тохунаклар бир-бириңә паралелдир вә оңларың һансының бучағ әмсалы

$$[F(x) + C]_{x=x_0} = F(x_0) = f(x_0)$$

әдәдәнә бәрабәрдир. Интеграл әриләри кәсишиңыр вә бир-бириңә тохунур. Мүстәвииниң, абсиси $[a, b]$ парчасына дахил олан һәр бир нөгтәсиндән аңчағ бир интеграл әриск кечир.

Верилмиш функцияның иктидан функцияларының тапмә һәмийн функцияны интегралалты дејиләр. Демәли, төрәмәси верилмиш функцияның өзүнү тапмағдан ибарәт олан интеграллама әмәли дифференциаллама әмәлиниң тәрсидир. Верилмиш функцияны габағча дифференциаллајыб, сонра да алыңан ифадәни интегралласағ, онда верилмиш функцияның, өзүнү (сабит C һәддиңә гәдәр дәјишәклә) алаңыр. Бурадан көрүнүр ки, d (дифференциаллама) вә \int (интеграллама) ишарәләри клә көстәрилән әйәлләр гаршылығым тәрс әйәлләрдир:

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C. \quad (6)$$

$$d \int f(x) dx = d[F(x) + C] = F'(x) dx = f(x) dx. \quad (7)$$

Истәниләм функцияның иктидан функциясы вармы? Хејр, јохдур. Ләкин кәләчәккә (XXII, § 7) көстәрәчәкиң ки, $[a, b]$ парчасында кәсимәјјән һәр бир $f(x)$ функциясының һәмийн парчада иктидан функциясы, јә’ни гејри-мүәјјән интегралы вар вә буна көрә дә верилән функция мүәјјән нөгтәләрдә кәсилән олдуғда, онун кәсимәз олдуғу әјри-әјри интервал вә јә парчаларда интегралыңдан данышачағым. Мәсәлән, $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясы $x=0$ нөгтәсиндә кәсиләндир. Буна көрә дә һәмийн функцияның кәсимәз олдуғу $(-\infty, 0)$ вә $(0, \infty)$ интервалларының һәр бириңдә әјрилығда интегралыңдан данышмағ олар. Биринчи интервалда

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C, \quad (8)$$

иккинчи интервалда исэ

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (9)$$

олар. (8) ва (9) барабарликларини

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C. \quad (10)$$

шаклинда бирлашдирилир.

Интегралга гејри-мүәлјән адм. верилмаси онун гнјмәтнини конкрет (мүәлјә) бир функција олмајыб, сонсуз сәјдә функција-лар (чохлауғу) олмасы илә әләгәдардыр.

§ 2. ГЕЈРИ-МҮӘЛЈӘН ИНТЕГРАЛЫҢ СӘДӘ ХАССӘЛӘРИ

Интегралын тәрифиндән ајдындыр ки, верилиш $f(x)$ функција-сынын интегралын тапмаг (һесапламаг), онун бүтүн һоби-дан функција-лары чохлауғуну тапмаг демәкдир. Бунун үчүн исэ онун бир һобида функција-сыны, јәни $F'(x) = f(x)$ барабарли-јини өдәјән $F(x)$ функција-сыны билмәк кифәјәтдир. Бу һалда

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (1)$$

барабарлијини доғрулуғу бахыдан парчанни ва ја интерва-лын бүтүн һөтәләриндә

$$F'(x) = f(x) \quad (2)$$

мүнәсибәтинин өдәнилмәсинә эквивалентдир. Беләликлә, (1) барабарлијини доғрулуғуну, јохламаг үчүн онун сәг тәрәфи-нин тәрәмәсини интеграллағи $f(x)$ функција-сына барабар олдуғуну јохламаг кифәјәтдир:

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Бу заман јалда сахламаг ләзымдыр ки, ккн гејри-мүәлјән интегралын ва ја гејри-мүәлјән интеграллар даһил олан ккн ифаләнин барабарлији ккн чохлауғун (һобида функција-лар чохлауғуларынын) барабарлији демәкдир.

Дедикләриниңдән истифадә едәрәк интегралын бир сыра сәдә хассәләрини исбат едәк.

Хәссә 1. Гејри-мүәлјән интегралын тәрәмәси интеграллағи функција-ја барабардир:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x). \quad (3)$$

Доғрудан да, (1) ва (2) барабарликләринә көрә:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Хәссә 2. Сонлу сәјдә функција-лар чәминин гејри-мүәлјән интегралы онларын гејри-мүәлјән интегралларынын чәминә барабардир:

$$\begin{aligned} \int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \\ = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx \end{aligned} \quad (4)$$

Исбаты. Гејри-мүәлјән интегралын тәрифинә көрә (4) барабарлијиниң сол тәрәфи $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ функција-сынын һобида функција-лары чохлауғудур. (4) барабарлијиниң сәг тәрәфиниң тәрәмәси дә һәмин $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ функција-сына барабардир. Доғрудан да, (3) барабарлијинә көрә

$$\begin{aligned} \left[\int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx \right]' = \\ = \left[\int f_1(x) dx \right]' + \left[\int f_2(x) dx \right]' + \dots + \left[\int f_n(x) dx \right]' = \\ = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x). \end{aligned}$$

Демәли, (4) барабарлијиниң сәг тәрәфи дә $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ функција-сынын һобида функција-лары чохлауғудур. Бурадан (4) барабарлијиниң доғрулуғу ајдын олур.

Интегралын (4) барабарлијилә ифадә олунан хассәси функција-ларә нәзәрән интегралын аддитивлик хассәси айланыр.

Хәссә 3. Сабит гуруғу интеграл ишарәси харичинә чә-хармаг олар:

$$\int A f(x) dx = A \int f(x) dx. \quad (5)$$

Доғрудан да,

$$\left(A \int f(x) dx \right)' = A \left(\int f(x) dx \right)' = A f(x)$$

олдуғундан (5) барабарлији доғру олар.

Һәтичә. Ккн функција-лариниң гејри-мүәлјән интегралы онларын гејри-мүәлјән интегралларынын фәргинә барабардир:

$$\int [f(x) - \varphi(x)] dx = \int f(x) dx - \int \varphi(x) dx. \quad (6)$$

Исбаты:

$$\begin{aligned} \int [f(x) - \varphi(x)] dx &= \int [f(x) + (-1)\varphi(x)] dx = \\ &= \int f(x) dx + \int (-1)\varphi(x) dx = \int f(x) dx - \int \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Хәссә 4. Интегралын интеграллағи дәјишәнинә нәзәрән инвариантлыг хассәси бардыр, јәни

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

оларса, онда истәкиләм дифференциаллағи $u = u(x)$ функција-сы үчүн

$$\int f(u) du = F(u) + C. \quad (7)$$

Доғрудан да, (1) мүнәсибәтинә көрә

$$dF(x) = f(x) dx$$

олдуғундан, дифференциал шәклиниң инвариантлыгы (XV, § 5) хассәсинә әсәсән

$$dF(u) = f(u) du$$

олар. Бурадан (7) барабарлијиниң доғрулуғу ајдындыр.

Хүсүн халда, $u=ax+b$ оларса, онда

$$\int f(ax+b) d(ax+b) = F(ax+b) + C \quad (8)$$

вэ жа

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Мисал 1.

$$\begin{aligned} \int (2x^2 + x + 3) dx &= \int 2x^2 dx + \int x dx + \int 3 dx = \\ &= 2 \int x^2 dx + \int x dx + 3 \int dx = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + 3x + C. \end{aligned}$$

Мисал 2.

$$\begin{aligned} \int (5x - e^x) dx &= \int 5x dx - \int e^x dx = \\ &= 5 \int x dx - \int e^x dx = \frac{5}{2} x^2 - e^x + C \end{aligned}$$

§ 3. ЭСАС ИНТЕГРАЛЛАР ЧӨДВӨЛӨ

Геометри-математик интегралын төрлийнэ (§ 1) вэ эсас элементар функци-яларын төрөмөлөрү дүстурларына (XIV, § 8) эсас-сая ашарыдакы интеграллар чөдвөли алыныр. Бу дүстурларын догрулуугу дифференциалламага жохламаг олар.

$$1. \int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1 \text{ вэ сабит аддлдр}).$$

Хүсүн халда,

$$\int du = u + C.$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \quad (u\text{-нун сыфырдан фэргли олдууу нэр бир интервалда}).$$

$$3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a \text{ сабитдир, } a > 0, a \neq 1). \text{ Хүсүн халда, } a=e \text{ оларса, онда}$$

$$\int e^u du = e^u + C.$$

$$4. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$5. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$6. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C \quad (\cos u\text{-нун сыфырдан фэргли олдууу нэр бир интервалда}).$$

$$7. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C \quad (\sin u\text{-нун сыфырдан фэргли олдууу нэр бир интервалда}).$$

$$8. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$9. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C \quad (|u| < |a|).$$

$$10. \int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$$

$$11. \int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$$

$$12. \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$$

$$13. \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C \quad (\operatorname{sh} u\text{-нун сыфырдан фэргли олдууу нэр бир интервалда}).$$

$$14. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$15. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$$

Лухарыда гејл етдијимиз кими бу дүстурларын нэр бири-нин догрулуугу билаваситэ дифференциалламага жохламаг олар.

Мәсәлән, 15-чи дүстурун догрулуугу жохлајар. Саг тәрәфин дифференциалынын һесаblasар,

$$\begin{aligned} d(\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C) &= \frac{(u + \sqrt{u^2 \pm a^2})' du}{u + \sqrt{u^2 \pm a^2}} = \\ &= \frac{du}{u + \sqrt{u^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} \right) = \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} \end{aligned}$$

олар, јәни 15-чи дүстур догрудур.

Бу интеграллар чөдвөлиндән истифадә едәрәк, бир чох элементар функци-яларын интегралынын һесаblasар олар. Интегралы, чөдвөлдән истифадә едәрәк һесаblasарға билаваситэ интеграллама дејилир. Буна анд бир нечә мисал кәстәрәк.

Мисал 1.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Мисал 2.

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

Мисал 3.

$$\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Мисал 4.

$$\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

Мисал 5.

$$\int \operatorname{sh}(x+3) dx = \int \operatorname{sh}(x+3) d(x+3) = \operatorname{ch}(x+3) + C.$$

Мисал 6.

$$\int \lg x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C \quad (\cos x \neq 0).$$

Мисал 7.

$$\int 2x \sin(x^2 + 5) dx = \int \sin(x^2 + 5) d(x^2 + 5) = - \cos(x^2 + 5) + C.$$

Мисал 8.

$$\int e^{\ln x} \ln x dx = \int e^{\ln x} d(\ln x) = e^{\ln x} + C.$$

Мисал 9.

$$\int \frac{dx}{x-9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C = \ln \sqrt[6]{\left| \frac{x-3}{x+3} \right|} + C.$$

Мисал 10.

$$\int \frac{e^x dx}{3+e^x} = \int \frac{d(3+e^x)}{3+e^x} = \ln(3+e^x) + C.$$

Мисал 11.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2} \cdot \lg \frac{x}{2}} = \\ &= \int \frac{d\left(\lg \frac{x}{2}\right)}{\lg \frac{x}{2}} = \ln \left| \lg \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Бу мисалларин тамысында интеграл астындагы элементар функцияларын ибтидаи функцияларга элементар функцияларга элементар функцияларын мўаллақ қўбинишаси-дыр. Лакин елэ элементар функциялар вэр ки, онларын ибтидаи функциялар, элементар функцияларын һеч бир сонлу қўбинишаси вэснәтәснә ифада олунур.

Әхәл верхилнш $f(x)$ функциясынын ибтидаи функциясы элементар функция (нә ја онларын мўаллақ сонлу қўбинишаси) оларса, онда дејирлар ки, $\int f(x) dx$ интегралы элементар функцияларга сонлу шәклдә ифада олунур.

§ 4. ИНТЕГРАЛЛАМА ҲУСУЛЛАРЫ

Биз йухарыда (§ 3) бир сырә снәд функцияларын интегралыны һесаблидыг. Лакин верилнш функциянын интегралыны һесаблимаг һәмншә белә сада олмур.

Функцияны интегралламаг мәсәләсә, үмумијәтлә, чәтин-дир. Бунун сәбәби одур ки, истәниән функциянын интегралыны һесаблимаг үчүн үмуми конструктив гәјдә кәстәрмәк мүмкин олиур. Белә чәтинлик әксәр тәрс әмәлләр үчүн мәв-чуддур. Интеграллама иса дифференциаллананын тәрс әмәл-дир.

Дүз әмәл олан дифференциаллама конструктив шәкилдә та-јин олунур. Тәрәмәнин тәрифидә, верилнш функциянын мўаллақ нәтәдә тәрәмәсини тапмаг үчүн һансы әмәлләр (функциянын артымыны тапмаг, артымынын инверсиин дү-зәлтмәк, лимитә кәчмәк) һансы ардычылыгдә апармаг ләзми олдуғу кәстәрилир.

Лакин бәзи функциялар сияфини интегралыны һесабли-маг үчүн ҳусуллар кәстәрмәк мүмкүндүр.

I. АҲРИММА ҲУСУЛУ.

Бу ҳусулуи мавијәти ондан ибарәтдир ки, интеграл астын-дагы функция интеграллары асан һесаблима билән функция-ларын чәми шәклиндә кәстәрилир. Сонра иса интегралын сон-лу сәјдә функциялар чәмини интегралы онларын интеграл-лары чәминә бәрәбәрдир хәссәсиндән (§ 2, II) истифада олунур.

Мисал 1.

$$\int (2x^3 + 5^x - \cos x) dx = \int 2x^3 dx + \int 5^x dx - \int \cos x dx = \frac{x^4}{2} + \frac{5^x}{\ln 5} - \sin x + C.$$

Мисал 2.

$$\begin{aligned} \int \left(\lg x + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2} \right) dx &= \int \lg x dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx - \\ &- \int \frac{dx}{x^2} = - \ln |\cos x| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

АҲРИММА ҳусулуни тәтбиғ етмәк о заман әһәмијәтдир ки, аҲРИММАдан алынған һәдләрин интеграллары асан һесабли-син.

II. ДӘЈИШАНИ ӘВӘЗЕТМӘ ҲУСУЛУ.

Тутар ки, $F(x)$ функциясы $f(x)$ -ни ибтидаи функциясы-дыр. Онда

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (1)$$

олар. $x = \varphi(t)$ дифференциалланған функция оларса, онда

$$F[\varphi(t)] = F'[\varphi(t)] \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t)$$

нә буна кәрә дә

$$\int F'[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + C. \quad (2)$$

(1) нә (2)-дәи

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (3)$$

бәрәбәрлини алынур. Буна дәјишәни әвәзетмә дүстуру деји-дир.

Гәјд едәк ки, (3) бәрәбәрлинини сағ тәрәфиндәки интеграл-ы һесаблидыгдан сонра јенидән x дәјишәнинә гәјутмәг үчүн $x = \varphi(t)$ әвәзләмәсиндән истифада етмәк ләзими-дыр. Бәзән

$x = \varphi(t)$ өзвэлэмэсіндэн дејил, $\varphi(x) = t$ шәклиндә өзвэләмәдән истифада олунур. Бу һалда, ахырынчы бәрәбәрликдән $x = \Phi(t)$ тапылыр (әлбәттә, бунун мүмкүн олдуғуну гәбул едирәк) вә беләликлә дә

$$\int f(t) dx = \int f[\Phi(t)] \Phi'(t) dt \quad (4)$$

өзвәтмә дүстүрү алыныр.

Мисал 3.

$$J_1 = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

интегралыны һесабыламалы. Бу мөғсәдлә

$$x = a \sin t \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, -a \leq x \leq a \right)$$

өзвәләмәсіндән истифада едак:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\ &= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C. \end{aligned}$$

Јенидән x дәјишәниңә тајытмағ үчүн $x = a \sin t$ өзвәләмәсіндән $t = \arcsin \frac{x}{a}$ кәмијәтләрини таомағ ләзымдыр:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Беләликлә,

$$J_1 = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Мисал 4.

$$J_2 = \int \frac{\varphi'(x) dx}{\varphi(x)}$$

интегралыны һесабыламағ үчүн $t = \varphi(x)$ өзвәләмәсінни көтүрмәк әләсришлиндир. Бу һалда $dt = \varphi'(x) dx$ вә

$$J_2 = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\varphi(x)| + C$$

олар. Хүсуси һалда,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = - \ln |\cos x| + C,$$

$$\int \frac{x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(a^2 + x^2)}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \ln \left| \frac{x}{2} \right| + C.$$

Мисал 5.

$$J_3 = \int \frac{x^{n-1} dx}{a^2 + x^2}$$

интегралыны һесабыламағ үчүн $x^2 = t$ өзвәләмәсіндән истифада етсәк, аларыг:

$$J_3 = \frac{1}{n} \int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{na} \arctg \frac{t}{a} + C = \frac{1}{na} \arctg \frac{x^2}{a} + C.$$

III. һиссә-һиссә интеграллама дүстүрү.

Билирик ки, диференсәләнә билән $U = U(x)$ вә $V = V(x)$ функцијаларының һасилиниң диференсәләнә

$$d(UV) = V dU + U dV$$

кими һесабыламыр. Бу бәрәбәрлији интегралламағла

$$UV = \int V dU + \int U dV$$

вә јахуа

$$\int U dV = UV - \int V dU \quad (5)$$

дүстүрүну аларыг.

(5) дүстүрүна һиссә-һиссә интеграллама дүстүрү дејилир. $dV = V' dx$ вә $dU = U' dx$ олдуғундан (1) дүстүрүну

$$\int UV' dx = UV - \int U' V dx$$

кими јазмағ олар. Бу бәрәбәрлијә әсәсән n -чи тәртиб кәсил-мәјән төрәмәләри олан $U(x)$ вә $V(x)$ функцијалары үчүн ашағыданкы бәрәбәрликләри јазмағ олар:

$$\int UV^{(n)} dx = UV^{(n-1)} - \int U' V^{(n-1)} dx,$$

$$\int U' V^{(n-1)} dx = U' V^{(n-2)} - \int U'' V^{(n-2)} dx,$$

$$\int U'' V^{(n-2)} dx = U'' V^{(n-3)} - \int U''' V^{(n-3)} dx.$$

Бу бәрәбәрликләри нөвбә илә $+1$ вә -1 әдәдләринә вурарғ, алынған бәрәбәрликләри тәрәф-тәрәфә тоқласағ,

$$\int UV^{(n)} dx = UV^{(n-1)} - U' V^{(n-2)} + U'' V^{(n-3)} - \dots +$$

$$+ (-1)^{n-2} U^{(n-2)} V + (-1)^n \int U^{(n)} V dx \quad (6)$$

бәрәбәрлијини аларыг. (6) дүстүрүна үмумиләшкән һиссә-һиссә интеграллама дүстүрү дејилир.

Верилмиш интегралы һесабыламағ үчүн (5) (вә јә (6)) дүстүрүну тәтбиғ етмәк озамай әлверишлиндир ки, сәғ тәрәфәдә алынған $\int V dU$ ($\int U' V dx$) интегралы верилмиш $\int U dV$ ($\int UV^{(n)} dx$) интегралындан сәдә олсун. Бу мәсәлә интеграллағ ифадәни U вә dV киңи әлверишдә вурғуларың һасилә шәклиндә көстәрмәк-

дәл дө чоң асылдыр. Интегралалты ифаданы элверкшли вургуларын һасили шәклиндә көстөрмәк бачарығы исә чоңлу мисал һәлл етмәк нәтижәсиндә гавәнылар.

Мисал 6. $\int x^n \ln x dx = ?$

Бурада $u = \ln x$ вад $dV = x^n dx$ һесап етсәк, $du = \frac{dx}{x}$ вә $V = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (бурада $+C$ сабитини көтүрмәжин әһәмкәтти юхдур. Чүнки һәмин сабит нәтижәдә алынған ифадәдә даһил олмур. Юхлал!) олар. Онда (5) дүстуруна көрә алырыз:

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

Мисал 7. $\int x^{2m} e^x dx = ?$

Верилмиш интегралы үмүмиләшиниш һиссә-һиссә интеграллама дүстуру илә һесапламаг ләзымдыр. Бу мәгсәдлә $u = x^{2m}$ вә $V^{(2m)} = e^x$ һесап етмәк әлверкшлидир. Онда (6) дүстуруна көрә

$$\int x^{2m} e^x dx = e^x [x^{2m} - 2m x^{2m-1} + (2m-1)2m x^{2m-2} - \dots - (2m)!x] + \int (2m)! e^x dx = e^x [x^{2m} - 2m x^{2m-1} + 2m(2m-1)x^{2m-2} - \dots - (2m)!x + (2m)!] + C.$$

Мисал 8. $\int x^{2m} \sin x dx = ?$

Бу һалда $u = x^{2m}$ вә $V^{(2m)} = \sin x$ әвәзләмәләриндән ясти-фадә етмәк әлверкшлидир. Онда (6) дүстуруна көрә

$$\begin{aligned} \int x^{2m} \sin x dx &= -x^{2m} \cos x + (2m) x^{2m-1} \sin x - \dots \mp \\ &\mp (2m)! x \sin x \pm (2m)! \int \sin x dx = \\ &= -x^{2m} \cos x + (2m) x^{2m-1} \sin x - \dots \mp (2m)! x \sin x \mp \\ &\mp (2m)! \cos x + C. \end{aligned}$$

Мисал 9. $\int \arcsin x dx = ?$

$u = \arcsin x$ вә $dV = dx$ гәбул етсәк, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ вә $V = x$ олар. Онда (5) дүстуруна әсәсэн

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

IV. Рекуррент (кәтириә) дүстуру вәситәсилә интегралын һесапламасы.

Туыз кн, ахтарылан $J_n (n-1)$ кәмијәтнини кичик индекс-лн J_{n-1}, J_{n-2} вә с. вәситәсилә

$$J_n = f(J_{n-1}, J_{n-2}, \dots) \quad (7)$$

шәклиндә ифадә олундуғу бир дүстуру верилмишдир. Бу һалда J_n, J_1 вә с. кәмијәтләри мәлүм олса, онда бәјүк индексли кәмијәтләри (7) дүстурулары вәситәсилә ардычма һесапламаг олар.

(7) дүстуруларына рекуррент вә ја кәтириә дүстурулары дејилир. Рекуррент дүстурулары вәситәсилә интеграл һесапламаг анд бир нечә мисал һәлл едәк.

Мисал 10. $S_n = \int \sin^n x dx$ интегралын һесапламасы. Бу мәгсәдлә, верилмиш интеграла һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг едәк:

$$\begin{aligned} u &= \sin^{n-1} x, dV = \sin x dx, \\ du &= (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \cdot dx, V = -\cos x \\ \text{олдуғундан} \\ \int \sin^n x dx &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \\ \text{вә ја} \end{aligned}$$

$$S_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n$$

олар. Бурадан

$$S_n = -\frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} S_{n-2} \quad (8)$$

рекуррент дүстуруну алырыз.

$$S_0 = \int dx = x + C$$

$$S_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

олдуғундан (8) дүстуру вәситәсилә J_2, J_3 вә с. интегралларыны ардычыл оларат һесапламаг олар.

Мисал 11.

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

интегралында $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$ вә $dV = dx$ гәбул етсәк,

$$du = -\frac{2n x dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, \quad V = x$$

вә

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

олар. Бурадан

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \left[\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \right] = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n J_n - 2na^2 J_{n+1} \end{aligned}$$

вэ J_n

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n J_n - 2na^2 J_{n+1}$$

аларыг. Верилмиш интегралы hesabламаг үчүн ахырынчы ба-
рабэрликдэн

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} J_n \quad (9)$$

рекуррент дүстуруну тапарыг.

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$$

олдугуну билэрэк, (9) дүстуруна эсасэн J_1, J_2 вэ с. интеграл-
ларыны hesabламаг олар:

$$J_1 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} \arctg \frac{x}{a} + C,$$

$$J_2 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} J_1, \dots$$

§ 5. САДЭ РАЦИОНАЛ КЭСРЛЭР ВЭ ОНЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНЫМАСЫ

Рационал функцияларыны эн садэ нөвү

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (1)$$

шаклиндэ олан функция, J_n ни n дэрэжэни чэбри чоххэддидир.
Белэ функцияларыны интегралы билаваситэ hesabланыр:

$$\begin{aligned} \int P_n(x) dx &= \int \left(\sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} \right) dx = \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \int x^{n-k} dx = \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{n-k+1}}{n-k+1} + C. \end{aligned}$$

Садэ рационал кэсрлэр адланан

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k \geq 2$ натурал эдэддир),

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ ($q - \frac{p^2}{4} > 0$ шэрти өдэнкилр).

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ ($k \geq 2$ натурал эдэддир вэ $q - \frac{p^2}{4} > 0$ шэр-
ти өдэнкилр)

шаклиндэ кэсрлэрин интегралланымасы илэ мөшгул олар.

I. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C,$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) =$
 $= -\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, (k \neq -1).$

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ кэсринин интегралыны h саб амаг үчүн онун
мөхрөчнни ашагыдакы кими чевирек:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}. \end{aligned}$$

Шэртэ көрө $q - \frac{p^2}{4} > 0$ олдуугундан, сию a^2 илэ ишарэ ет-
мөк олар. Онда

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx$$

вэ бугада $t = x + \frac{p}{2}, x = t - \frac{p}{2}, dx = dt$ эвэзлэмэснни апар-
сар,

48216
$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{t^2 + a^2} dt = \frac{A}{2} \int \frac{2t dt}{t^2 + a^2} + \\ &+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{A}{2} \ln(t^2 + a^2) + \\ &+ \frac{1}{a} \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \arctg \frac{t}{a} + C \end{aligned}$$

аларыг. Јенидэн x дэишэнине гајытсар, аларыг:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \\ &+ \frac{1}{a} \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \arctg \frac{2x+p}{2a} + C. \end{aligned}$$

IV. Јухарыда көстөрилэн чевирмөлөр васитэсилэ.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx &= \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{(t^2+a^2)^k} dt = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} \end{aligned}$$

аларыг. Сэг тэрөфдэки биринчи интеграл билаваситэ hesabла-
ныр:

$$\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} = -\frac{1}{(k-1)} \frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Икинчи

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

интегралы исә әвәлки параграфда рекуррент дүстүр ысытасыз һесабынан интегралдыр (§ 4, мисал 11).

Бу гаҗда илә һәр бир IV нөв сәдә рационал кәсрин интегралы һесабыланыр.

Апардығымыз мүнәкимәдән әдидир ки, 1—IV нөв сәдә рационал кәсләрин интегралыны һәмшә һесапламаг мөмкүндүр. Бу кәсләрин һәр биринин интегралы элементар функцияларла (XI, § 19) ифадә олуунур.

Мисал 1.

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x+10} dx$$

интегралыны һесапламалы.

Бурада $x-1=t$, $dx=dt$ әвәләмәсини апарсаг, аларыг:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+3}{(x-1)^2+9} dx = \int \frac{(t+4) dt}{t^2+9} = \frac{1}{2} \int \frac{2t dt}{t^2+9} + 4 \int \frac{dt}{t^2+9} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2+9) + \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+10) + \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3} + C. \end{aligned}$$

§ 4. РАЦИОНАЛ КӘСРЛӘРИН СӘДӘ КӘСРЛӘРӘ АЛРЫЛМАСЫ

Һәр бир рационал (кәср) функция ики чәбри чохәдлинин һисбәти шәклиндә олуур:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \quad (1)$$

Рационал кәсрин сурәтиндәки $P(x)$ чохәдлисинин дәрәжәси мәхрәжидәки $Q(x)$ чохәдлисинин дәрәжәсиндән кичик олдугда она дүзкүн, әкс һалда исә дүзкүн олмаҗан кәср деҗиләр. Дүзкүн олмаҗан һәр бир рационал кәсрин сурәтинә мәхрәжинә беләрәк, буны мөҗҗәһ бир чохәдли илә дүзкүн рационал кәсрин чәми шәклиндә кәстәрмәк олар:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{\Phi(x)}{Q(x)}. \quad (2)$$

Бу бәрәбәрлиҗи һәр яки тәрафини интегралласаг,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int T(x) dx + \int \frac{\Phi(x)}{Q(x)} dx \quad (3)$$

аларыг, $T(x)$ чәбри чохәдлисинин интегралы билазасыз һесабыланыр. Демәли, һәр бир рационал кәсрин интегралланмасы бир дүзкүн рационал кәсрин интегралланмасына кәтириляр. Дүзкүн рационал кәсләр исә соҗлу сәдә сәдә рационал кәсләрин чәми шәклиндә кәстәрилә билір. Беләликлә, һәр бир рационал кәсрин интегралы сәдә рационал кәсләрин интегралына кәтириләрәк тамамилә һесабыланыр.

Инди һәр бир дүзкүн рационал кәсрин соҗлу сәдә сәдә рационал кәсләрин чәми шәклиндә кәстәрилә билдиҗини һисбат едәк.

Фәрс едәк ки, $\Phi(x)$ вә $Q(x)$ һәгиги әмсаллы чәбри чохәдлиләр вә

$$R(x) = \frac{\Phi(x)}{Q(x)} \quad (4)$$

дүзкүн рационал кәсрдир. Әкәр һәгиги a әдәди мәхрәжин $k(k > 1)$ дәфә тәкрарланан көкүдүрсә (XVIII, § 8), онда

$$Q(x) = (x-a)^k Q_1(x), Q_1(a) \neq 0 \quad (5)$$

олар.

Теорем 1. *Һәгиги a әдәди $Q(x)$ чохәдлисинин k дәфә тәкрарланан көкү олдугда, вә һәгиги A әдәди вә дәрәжәси $(x-a)^{k-1} Q_1(x)$ чохәдлисинин дәрәжәсиндән кичик олан $P(x)$ чохәдлиси вар ки,*

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)} \quad (6)$$

бәрәбәрлиҗи өдәниляр.

Һисбаты. (6) бәрәбәрлиҗинин өдәнилмәси үчүн

$$\Phi(x) = A Q_1(x) + P_1(x) (x-a)$$

олмалыдыр. Бурадан, $x=a$ олдугда

$$\Phi(a) = A Q_1(a)$$

вә $Q_1(a) \neq 0$ олдуғундан

$$A = \frac{\Phi(a)}{Q_1(a)}$$

аларыг, A -нын бу тиҗмәтиндә $x=a$ әдәди

$$\Phi(x) = A Q_1(x) \quad (7)$$

фәргинин көкүдүр. Буна көрә дә һәмин фәрг $x-a$ фәргинә бөлүнүр (XVIII, § 6). Демәли,

$$\frac{\Phi(x) - A Q_1(x)}{x-a} = P_1(x) \quad (8)$$

ифадәси чәбри чохәдлиндир вә онун дәрәжәси сурәтин дәрәжәсиндән (яғни (7) чохәдлисинин дәрәжәсиндән) бир ваһид аздыр. (7) чохәдлисинин дәрәжәси исә $Q(x)$ -ин дәрәжәсиндән ән азы бир ваһид кичикдыр. Демәли, $P_1(x)$ чохәдлисинин дәрәжәси $Q(x)$ -ин дәрәжәсиндән ән азы ики ваһид, $(x-a)^{k-1} Q_1(x)$ -ин дәрәжәсиндән исә бир ваһид кичикдыр.

Һәһәҗәт, (6) бәрәбәрлиҗи

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\Phi(x) - A Q_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)},$$

әйвәлиҗиндән (8) бәрәбәрлиҗиннә әсисән алыныр.

Инди фәрс едәк ки, $a = \alpha + ib$ комплекс әдәди һәгиги әмсаллы $Q(x)$ чохәдлисинин m дәфә тәкрарланан көкүдүр. Онда $\bar{a} = \alpha - ib$ әдәди дә онун m дәфә тәкрарланан көкү олар (XVIII, § 9) вә һәмин чохәдли һәгиги әмсаллы

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= [x - (\alpha + ib)] [x - (\alpha - ib)] \\ (p &= -2\alpha, q = \alpha^2 + b^2) \end{aligned}$$

квадрат үчхэдлестини m -чи дэрэчэдэн гүвээтнэ бөлүнөр:

$$O(x) = (x^2 + px + q)^m O_2(x). \quad (9)$$

Теорем 2. *Бөгөөд эмсаллы $Q(x)$ чоххэдлестини үчүн (9) барабарлиги догру олдугда, өлс хөгсиги B вэ C эдэдлэри вэ дэрэчэси $(x^2 + px + q)^{m-1} Q_2(x)$ чоххэдлестини дэрэчэснэдэн кичик олан $P_2(x)$ чоххэдлестини бар ги,*

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_2(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_2(x)} \quad (10)$$

ежилиги, өдөнилир.

Исбаты. (10) ежилигини хэр ик тэрэфини $\Phi(x)$ ифадэснэ вуригла

$$\Phi(x) = (Bx + C) Q_2(x) + (x^2 + px + q) P_2(x) \quad (11)$$

мүнасибэтини аларыг. Бурадан x эвэзинэ $a = a + ib$ вэ $\bar{a} = a - ib$ язмагла, B вэ C эдэдлэрини тапмаг үчүн

$$\begin{cases} \Phi(a) = (Ba + C) Q_2(a) \\ \Phi(\bar{a}) = (B\bar{a} + C) Q_2(\bar{a}) \end{cases} \quad (12)$$

системн алыныр.

$\Phi(x)$ вэ $Q_2(x)$ чоххэдлестини хөгсиги эмсаллы чоххэдлестини олдугуудан $\frac{\Phi(a)}{Q_2(a)}$ вэ $\frac{\Phi(\bar{a})}{Q_2(\bar{a})}$ эдэдлэри гаршылыглы гошма комплекс эдэд. эрдир:

$$\frac{\Phi(a)}{Q_2(a)} = M + iN, \quad \frac{\Phi(\bar{a})}{Q_2(\bar{a})} = M - iN.$$

Бу барабарликлэрдэн истифадэ едэрэк (12) системини

$$\begin{cases} Ba + C = M + iN \\ B\bar{a} + C = M - iN \end{cases}$$

кичи язмаг олар. Бурадан B вэ C тапылыр:

$$B = \frac{N}{b}, \quad C = M - \frac{Na}{b}. \quad (13)$$

(11) мүнасибэтиндэн ајдындыр ки, B вэ C -нин тапдыгымыз гијмэтлэриндэ

$$\Phi(x) = (Bx + C) Q_2(x)$$

фэргэ $x^2 + px + q$ квадрат үчхэдлестинэ бөлүнүр. Белэликлэ, ахтардыгымыз $P_2(x)$ чоххэдлестини

$$P_2(x) = \frac{\Phi(x) - (Bx + C) Q_2(x)}{x^2 + px + q} \quad (14)$$

шэкиндэ тапылыр. (13) вэ (14) мүнасибэглэриндэн тапылымыз B, C эдэдлэри вэ $P_2(x)$ чоххэдлестини үчүн (10) ежилигини догрулуугу ајдындыр.

Нэтичэ. *Хэр бир дүзкүн рационал кэср сонлу сајда садэ рационал кэслэрин чэми шэкиндэ кэстэрилийр.*

Догр дан да, тутар ки, $R(x) = \frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ дүзкүн рационал кэсри верилмишдир вэ онун махрэчи n дэрэчэли чэбри чоххэдлестини:

$$Q(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

(үмүнилији азайтмадан x^n -ни эмсалыны өзнід һесап едирик).

Бу чоххэдлестини бир вэ икидэрэчэли хөгсиги вуруглэрини һасил шэкиндэ кэстэрмак слар (XVIII, § 9).

$$Q(x) = (x - a_1)^{\nu_1} \dots (x - a_k)^{\nu_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\mu_s}$$

$$(n = \nu_1 + \dots + \nu_k + 2\mu_1 + \dots + 2\mu_s, p_i^2 - 4q_i < 0, i = \overline{1, s}).$$

Онда $\frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ дүзкүн рационал кэсринэ 1-чи теоремн тэтбиг еда билэрик:

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{P_1(x)}{(x - a_1)^{\nu_1-1} Q_1(x)}$$

Сағ тэрэфдэки икничи һэддэ дэ дүзкүн рационал кэсрдир. $\nu_1 - 1 > 1$ олдугда она јенидэн 1-чи теоремн тэтбиг етсэк,

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{\nu_1-1}} + \frac{P_2(x)}{(x - a_1)^{\nu_1-2} Q(x)}$$

аларыг. Бу просеси ардычыл давам етдирэрэк тапырыг:

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{\nu_1-1}} + \dots + \frac{A_{\nu_1}}{x - a_1} + \frac{P_{\nu_1}(x)}{Q_1(x)}$$

Сағ тэрэфдэки ахырынчы һэддэ дэ дүзкүн рационал кэсрдир. Она јенидэн $(x - a_2)^{\nu_2}, \dots, (x - a_k)^{\nu_k}$ вуруглэрына нэзэрэн 1-чи теоремн ардычыл тэтбиг етсэк,

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{\nu_1-1}} + \dots + \frac{A_{\nu_1}}{x - a_1} + \dots +$$

$$+ \frac{B_1}{(x - a_k)^{\nu_k}} + \frac{B_2}{(x - a_k)^{\nu_k-1}} + \dots + \frac{B_{\nu_k}}{x - a_k} + \frac{\Phi_k(x)}{Q^*(x)}$$

$$Q^*(x) = (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\mu_s}$$

аларыг. Инди сағ тэрэфдэ адынымш сонунчу $\frac{\Phi_1(x)}{Q^*(x)}$ һэддини дүзкүн рационал кэср олдугуну нэзэрэ аларыг, она ардычыл оларыг 2-чи теоремн тэтбиг етсэк, нэтичэдэ, тэлэб олунан үмүни

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{\nu_1-1}} + \dots + \frac{A_{\nu_1}}{x - a_1} + \dots +$$

$$+ \frac{B_1}{(x - a_k)^{\nu_k}} + \frac{B_2}{(x - a_k)^{\nu_k-1}} + \dots + \frac{B_{\nu_k}}{x - a_k} +$$

$$+ \frac{C_1 x + D_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1}} + \dots + \frac{C_r x + D_r}{x^2 + p_r x + q_r} + \dots +$$

$$+ \frac{E_1 x + F_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1}} + \dots + \frac{E_s x + F_s}{x^2 + p_s x + q_s} \quad (15)$$

ајрылышы алыныр ки, бу да нәтижәни доғру олдуғуну көс-
тәрир.

§ 7. РАЦИОНАЛ КӘСРЛӘРИН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Әвәлки параграфда көстәрдики ки, һәр бир рационал кәс-
рин интегралланмасы дүзкүн рационал кәсрин интеграллан-
масына кәтирилир. Дүзкүн рационал кәсрләр исә сонлу сәјда
садә рационал кәсрләрин чәми шәклиндә көстәрилә билдијиндә
н (§ 6, (15)) һәр бир дүзкүн рационал кәсрин интеграллан-
масы I—IV нөв садә рационал кәсрләрин интегралланмасына
кәтирилир. Истәйикдәи садә рационал кәсрин интегралы тама-
милә һесаблина билдир вә бу интеграллар елементар функција-
ларла сонлу шәкилдә ифадә олунур (§ 5).

Демәли, һәр бир рационал кәсрин интегралы тамамилә һе-
саблина билдир вә онун нәтижәси елементар функцијалар вәси-
тәсилә ифадә олунур.

Рационал кәсрин интегралланмасында әсас чәтинлик онун
садә рационал кәсрләрин чәми шәклиндә көстәрилмәсидир. Бу
мәсәдлә онун мәхрәчинин вуругла ајырмаг вә ајрылышын
әмсалларыны (§ 6-да јазылмыш (15) дүстурунда иштирак едән
 $A_i (i = \overline{1, n_1})$, $B_i (i = \overline{1, n_r})$, \dots , E_i вә $F_i (i = \overline{1, s})$ әмсаллары-
ны) тапмаг лазымдыр.

Һәр бир рационал кәсрин мәхрәчи сонлу дәрәчәли чәбри
чоххәддидир. $Q(x)$ чоххәддисиия вуругла ајырмаг принцип-
чә һәмишә мүмкүндүр (XVIII, § 9), ләкин бу мәсәлә $Q(x) = 0$
чәбри тәнлијини һәлл етмәјә эквивалентдир ки, бу да чох за-
ман асән олмур. Анчаг дәрәчәси дөрдән бөјүк олмајан истә-
вилән чәбри тәнлијини һәллә үсулу мә'лумдур. Дәрәчәси беш
вә бешдән бөјүк олан истәвилән чәбри тәнлијини көкләрини
әмсаллары вәситәсилә ифадә едән дүстур исә мә'лум дејил-
дир. Бу да рационал кәсрләрин садә кәсрләрә ајрылмасында
гаршија чыхај әсас чәтинликидир.

Әхәр мүәјјән үсуллар вәситәсилә $\frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ дүзкүн рационал
кәсринин мәхрәчи

$$Q(x) = (x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_k)^{n_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1} \dots (x^2 +$$

$$+ p_s x + q_s)^{n_s}$$

кини вуругла ајрылышыдырса, онда һәми рационал кәср
үчүн әвәлки параграфда јазылмыш (15) ајрылышы доғру

олмалыдыр. Бу ајрылышын әмсалларыны хүсуси гәјдалар вә
ја гејри-мүәјјән әмсаллар үсулу беләдир: (15) дүстурунун сағ

тәрәфи үмуми мәхрәчә кәтирилир, алынај бәрәбәрлијин һәр
иқи тәрәфини $Q(x)$ -ә. вурураг иқи чоххәддисиия бәрәбәрлијин
алыныр. Сол тәрәфдә рационал кәсрин сурәти олан мә'лум
әмсаллы $\Phi(x)$ чоххәддиси, сағ тәрәфдә исә әмсаллары ахтары-
лан мә'лум әмсаллардан асылы олан чоххәдди олур. Иқи
чоххәддисиия бәрәбәр олмасы үчүн x -ин ејни дәрәчәли гүввәт-
ләринин әмсаллары бәрәбәр олмалыдыр. Беләликлә, ахтары-
лан әмсаллары тапмаг үчүн хәтти тәнликләр системи алыныр.

Бә'зән (15) ајрылышында иштирак едән мә'лум әмсал-
лары тапмаг үчүн јухарыда көстәрдикимиз киими алынај бәра-
барликлә x ин ејни дәрәчәли гүввәтләринин әмсалларыны бә-
рәбәр көтүрмәк әвәзинә, x -ә мә'лум әмсалларын сәјы гәдәр
гијмәтләр кәсрәк, һәмин әмсаллары тапмаг үчүн хәтти тән-
ликләр системи алмаг олар. Бу заман x -ә мәхрәчин көкү олан
гијмәтләри вермәк бә'зән әлverişли олур.

Инди бир ичә мисал һәлл едәк.

Мисал 1. $\int \frac{5x^2 - x + 3}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$ интегралыны һесаблинамалы.

Интеграл алтындагы ифадә дүзкүн рационал кәсрдир. Ин-
тегралы һесаблинамаг үчүн һәмин кәсри садә рационал кәсрләрә
ајырмаг лазымдыр. Бу мәсәдлә әвәлчә мәхрәчәдики чоххәд-
лини вуругла ајырмајлыг. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ тәнлијини
һәлл едәрәк, онун $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ вә $x_3 = 3$ көкләрини тапырғ:
 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Инди һәмин кәср үчүн

$$\frac{5x^2 - x + 3}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3} \quad (1)$$

ајрылышыны јазаг. Бу бәрәбәрлијин һәр иқи тәрәфини $(x - 1)$
 $(x - 2)(x - 3)$ ифадәсинә вурсаг,

$$5x^2 - x + 3 = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) +$$

$$+ C(x - 1)(x - 2) \quad (2)$$

бәрәбәрлијини аларыг. Бурадан A , B вә C әмсалларыны иқи
јолла тапмаг олар:

1. (2) бәрәбәрлијиндә x -ә нөвбә илә $x = 1$, $x = 2$ вә $x = 3$
гијмәтләрини версәк,

$$\begin{cases} 7 = A \cdot (-1) \cdot (-2) \\ 21 = B \cdot 1 \cdot (-1) \\ 45 = C \cdot 2 \cdot 1 \end{cases} \quad (3)$$

хәтти тәнликләр системи алынар. Бурадан

$$A = \frac{7}{2}, \quad B = -21, \quad C = \frac{45}{2}.$$

II. (2) бəрəбəрлiйини сəг тəрəфини кəноник чəххəдли шəклиндə жəзсəг,

$$5x^2 - x + 3 = (A + B + C)x^2 + (-5A - 4B - 3C)x + (6A + 3B + 2C)$$

олар. Бурадан, x -ин еји дэрэчəли гүввəтлəрини эмсəллəрыны бəрəбəр нєсəб єтмəклə

$$\begin{cases} A + B + C = 5, \\ -5A - 4B - 3C = -1, \\ 6A + 3B + 2C = 3 \end{cases} \quad (4)$$

хəтти тəнликлəр системини аларыг. Бу системи хəлл єтдикдə эмсəллəр үчүн јенə дə хəми гијмəтлəр танылыр.

$$A = \frac{7}{2}, B = -21, C = \frac{45}{2}.$$

Лəкин (4) системи (3) системиндэн чəтин хəлл олунур. Буна кəрə дə бу мисəлдə I үсулла (аргументə гијмəтлəр вериəклə) хəтти тəнликлəр системи алыб, эмсəллəры орадан тапмаг дəнə əлвєришилди.

Нəтичəдə, (1) бəрəбəрлiйи

$$\frac{5x^2 - x + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - 21 \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{45}{2} \cdot \frac{1}{x-3}$$

шəклиндə олар вə

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 - x + 3}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx &= \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x-1} - 21 \int \frac{dx}{x-2} + \frac{45}{2} \int \frac{dx}{x-3} = \\ &= \frac{7}{2} \ln|x-1| - 21 \ln|x-2| + \frac{45}{2} \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

Мисəл 2. $\int \frac{x^2 - 5x + 1}{x^3 - 3x^2 - 4} dx$ интегрəлыны нєсəблəмəлы. Вунук үчүн интегрəл алтындəкы рəсионəл кəсрин мəхрəчини вуруглəрə əйрəг:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x^2 - 4 &= x^2 - 4x^2 + x^2 - 4 = (x^2 - 4)x^2 + (x^2 - 4) = \\ &= (x^2 + 1)(x^2 - 4) = (x^2 + 1)(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

Онда рəсионəл кəсри

$$\frac{x^2 - 5x + 1}{(x^2 + 1)(x-2)(x+2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

кими сəдə рəсионəл кəсрлəрə əйрəмаг олар. Бурадан

$$x^2 - 5x + 1 = (Ax + B)(x-2)(x+2) + C(x^2 + 1)(x+2) + D(x^2 + 1)(x-2)$$

вə јəхуд

$$x^2 - 5x + 1 = (A + C + D)x^2 + (B + 2C - 2D)x^2 + (-4A + C + D)x + (-4B + 2C - 2D)$$

бəрəбəрлiйини аларыг. x -ин еји дэрэчəли гүввəтлəрини

сəллəрыны бəрəбəр нєсəб єдəк:

$$\begin{cases} A + C + D = 1, \\ B + 2C - 2D = 0, \\ -4A + C + D = -5, \\ -4B + 2C - 2D = 1. \end{cases}$$

Бу хəтти тəнликлəр системи хəлл єдилəрəк эмсəллəр

$$A = \frac{6}{5}, B = -\frac{1}{5}, C = -\frac{1}{20}, D = -\frac{3}{20}$$

кими тапылыр. Демəли,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 5x + 1}{x^3 - 3x^2 - 4} dx &= \int \frac{\frac{6}{5}x - \frac{1}{5}}{x^2 + 1} dx + \int \frac{-\frac{1}{20}}{x-2} dx + \int \frac{-\frac{3}{20}}{x+2} dx = \\ &= \frac{3}{5} \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} - \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^2 + 1} - \frac{1}{20} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{3}{20} \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= \frac{3}{5} \ln|x^2 + 1| - \frac{1}{5} \arctg x - \frac{1}{20} \ln|x-2| - \frac{3}{20} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

Шəрх єтдијимиз үсул, истəнилəн рəсионəл функцијанын интегрəллəнмəсина тəтбиг олуна билəр. Лəкин хəр бир рəсионəл функцијанын интегрəллəнмəсина бу үсулу мəхəнники оларəг тəтбиг єтмəк олмəз. Бəзи рəсионəл функцијə арын интегрəлыны хўсуси јоллəр вə əвəзлəмəлəр вəситəсилə нєсəблəмəг дəнə əлвєриш и олур. Мəсəлən,

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

интегрəлыны нєсəблəмəг үчүн $\frac{x}{x^2 + 1}$ рəсионəл кəсрини сəдə рəсионəл кəсрлəрə əйрəмаг єттијəк јəхдур. $x^2 = t$ əвəзлəмəсиндэн истəфəдə єтсəк,

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2} \arctg t + C = \frac{1}{2} \arctg x^2 + C.$$

Бурада бир чəхəти хўсуси гəјд єтмəк лəзымдыр. Јухарыда кəстəрдик ки, истəнилəн рəсионəл кəсрини интегрəлы принципчə хəмишə ахыра кими нєсəблəныр вə онун нəтичəси єлємєнтəр функцијəлəрлə сонлў шəхнлə ифəдə олунур. Бу чəх мўлўм вə əнəмијəтлi нəтичəдир. Хəр хансы бир функцијанын интегрəлыны мўјјəн чəвириə вə əвəзлəмəлəр вəситəсилə рəсионəл функцијанын интегрəлына кəтирмəк мўмкўн олрсə, јухарыда кəстəрилəн үсулла хəмишə интегрəлы нєсəблəмəг олар.

Демəли, мўјјəн рəсионəл функцијанын интегрəлына хəтирилə билən хəр бир интегрəл принципчə хəмишə тамамилə нєсəблəнə билəр. Бу чəх мўлўм тəклифдэн охучу бєлə бир нəтичə чыхармəмəлыдыр ки, истəнилəн єлємєнтəр функцијанын интегрəлыны хəмишə сонлў сəјдə єлємєнтəр функцијəлəрлə кəстəрмəк мўмкўн олур.

Бир чох элементар функцијаларын интегралыны сонлу саяда элементар функцијалар васитәсилә ифадә етмәк мүмкүн дејилдир. Мәсәләх, $\int \frac{dx}{\ln x}$ (интеграл логарифм), $\int \frac{\sin x}{x} dx$ (интеграл синус), $\int \frac{\cos x}{x} dx$ (интеграл косинус), $\int \sin x^2 dx$ вә $\int \cos x^2 dx$ (Френел интеграллары), $\int e^{-x^2} dx$ (егһималлар интегралы), $\int \frac{e^x dx}{x}$ (интеграл үстлү функција) вә с. интегралларыны сонлу саяда элементар функцијаларла ифадә етмәк мүмкүн дејилдир.

Биз кәләчәкдә көрәчәјик ки, јухарыда јаздығымыз интеграллар алтындакы функцијаларын һәмисынын ибтидан функцијалары вардыр, ләкин бу ибтидан функцијалар элементар функцијалар дејилдир.

Мәсәлән,

$$F_1(x) = e^{-x^2}, F_2(x) = \frac{\sin x}{x}, F_3(x) = \frac{1}{\ln x}, \dots$$

мүнәсибәтләрини өдәјән $F_1(x), F_2(x), F_3(x), \dots$ ибтидан функцијалары гејри-элементар функцијалардыр (XI, § 19).

$P_m(x)$ вә $Q_n(x)$ функцијалары ујғун олараг m вә n дәрәҗәли чәбри чохһәдлийәр олдуғда,

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx \quad (5)$$

интегралы да $n > 2$ олдуғда, әксәр һәлләрда элементар функцијаларла ифадә олунмур. $n = 3$ вә $n = 4$ олдуғда (5) интегралына *эллиптик*, $n > 4$ олдуғда исә оға *гиперэллиптик* интеграл дејилир. Хүсуси һәлдә,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \text{ вә } \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx$$

интеграллары ујғун олараг Лежандр шәклиндә *биринчи вә икинчи чикс эллиптик* интеграллар адылар.

Гејд едәк ки, n натурал әдәд олдуғда

$$\int \frac{\sin x}{x^2} dx, \int \frac{\cos x}{x^2} dx, \int \frac{e^x}{x^2} dx$$

интеграллары да элементар функцијалар васитәсилә ифадә олунмур.

§ 8. САДӘ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛАНМАСЫ

1. Истәнилән иррационал функцијаның (XI, § 20) интегралыны һәмишә һесабламаг вә нәтиҗәни элементар функцијаларла ифадә етмәк мүмкүн олмур. Ләкин елә садә иррационал функцијалар вар ки, онларын интегралыны рационал функци-

јаларын интегралына кәтирмәк олар Рационал функцијаларын интегралыны исә һәмишә һесабламаг мүмкүндүр (§ 7).

Тутаг ки U_1, U_2, \dots, U_n дәјишәнләринә нәзәрән чохһәдлий олан

$$P(U_1, \dots, U_n) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n < m} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} U_1^{\alpha_1} \dots U_n^{\alpha_n}$$

вә

$$Q(U_1, \dots, U_n) = \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_n < N} b_{\beta_1, \dots, \beta_n} U_1^{\beta_1} \dots U_n^{\beta_n}$$

верилмишдир. Онда

$$R(U_1, \dots, U_n) = \frac{P(U_1, \dots, U_n)}{Q(U_1, \dots, U_n)}$$

шәклиндә ифадәјә U_1, \dots, U_n дәјишәнләринин рационал функцијасы дејилир. Мәсәләх,

$$R(x, \sqrt{x}) = \frac{5x + 3(\sqrt{x})^3}{2\sqrt{x}},$$

$$R(\sqrt{x+1}, \sqrt{x}, x) = \frac{(\sqrt{x+1})x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 3x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^4 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 5 \sin x \cos x} \text{ вә с.}$$

2. Тутаг ки,

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right] dx \quad (1)$$

интегралыны һесабламаг ләзимдыр. Бурада r_1, r_2, \dots, r_n рационал әдәдләрдир. $r_k = \frac{p_k}{q_k}$ ($k = \overline{1, n}$) кәсрләринин үмүми мәнрәчи N олдуғда (1) интегралында

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N \quad (2)$$

әвәзләмәсини апармаг олар. Бу һәлдә $Nr_k = p_k$ гәбул етмәклә

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k} = t^{Nr_k} = t^{p_k} \quad (k = \overline{1, n}),$$

$$x = \frac{dt^{N-b}}{a-ct^N}, \quad dx = \frac{dNt^{N-1}(a-ct^N) + ct^{N-1}(dt^N-b)}{(a-ct^N)^2} dt$$

аларыг вә (1) интегралы

$$\begin{aligned} & \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right] dx = \\ & = \int R\left[\frac{dt^{N-b}}{a-ct^N}, t^{p_1}, \dots, t^{p_n}\right] \frac{(adN-bt^N)t^{N-1}}{(a-ct^N)^2} dt \end{aligned}$$

шәклиндә јазылар. Сағ тәрәфдәки интеграл алтындакы ифадә t -

ний рационал функциясиды. Беләиклә, (1) интегралы (2) әвәзләмәсә вәситәсә рационал функцияның интегралына кәтириләр:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx = \int R_1(t) dt.$$

Рационал кәсрин интегралыны һесапладыдан сонра t әвәзинә

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

язмаг ләзимдыр.

Җәд едәк ки, хуҗуи һалда (1) интегралы

$$\int R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_n}) dx,$$

$$\int R(x, (ax+b)^{r_1}, \dots, (ax+b)^{r_n}) cx$$

вә с. шәклһндә ола биләр.

Мисал 1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$ интегралыны һесапламалы.

Бу мәсәллә

$$x = t^6, dx = 6t^5 dt.$$

әвәзләмәсиндән истифәдә едәк. Онда:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{t^2 \cdot 6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^7 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^4 (t^3 + t^2 + 1 - \frac{1}{t+1}) dt}{t^3 + t^2} \\ &= \frac{6}{5} t^5 - \frac{3}{2} t^4 + 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1| + C = \\ &= \frac{6}{5} \sqrt[5]{x^5} - \frac{3}{2} \sqrt[4]{x^4} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C. \end{aligned}$$

Мисал 2. $\int x\sqrt{x-1} dx$ интегралыны һесапламаг үчүн $\sqrt{x-1} = t$ әвәзләмәсиндән истифәдә етмәк ләзимдыр:

$$\sqrt{x-1} = t, x-1 = t^2, x = 1+t^2, dx = 2tdt.$$

Онда

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1} dx &= \int (1+t^2)t \cdot 2t dt = 2 \int t^3 dt + 2 \int t^5 dt = \\ &= \frac{2}{3} t^3 + \frac{2}{5} t^5 + C = \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + \frac{2}{5} \sqrt{(x-1)^5} + C. \end{aligned}$$

§ 9. ЕЛЕР ӘВӘЗЛӘМӘЛӘРИ

Дәјишә и әвәзәтмә вәситәсә

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx, a \neq 0 \quad (1)$$

шәклһндә һәр бир интеграл рационал функцияның инте-

гралына кәтирилир. Бу мәсәллә. Еләр әвәзләмәләри адына ашәгыдакы үч әвәзләмәдән истифәдә олунар.

I. Елери кәтирилә

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t \quad (2)$$

әвәзләмәсә $a > 0$ олдугда тәтбиг олунар (ишарәләрин истәкилән комбинәсиясы кәтүрүлә биләр). Бурада t јени дәјишәндә р.

(2) бәрабәрлиһини һәр ики тәрофини квадрата јүксәлтсәк,

$$ax^2 + bx + c = a^2x^2 \pm 2xt\sqrt{a} + t^2$$

ол р. Бурада и

$$x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2t\sqrt{a}},$$

$$dx = \frac{(2bt \pm 2t^2\sqrt{a} - 2c\sqrt{a}) dt}{(b \pm 2t\sqrt{a})^2}$$

аларыг. x -иң бу гүјмәтини (2) бәрабәрлиһиндә јеринә јазсаг $\sqrt{ax^2+bx+c}$ радикалы t -иң рационал функциясы киңи ифәдә олунар:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a^2\sqrt{a} - bt \pm c\sqrt{a}}{b \pm 2t\sqrt{a}}.$$

Верилмиш (1) интегралы алында x , $\sqrt{ax^2+bx+c}$ вә dx әвәзинә онларың t -иң рационал функциясы олаң ифәдәләрниң јаздыгда t -иң рационал функциясының интегралы алыны:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx = \int R_1(t) dt.$$

II. Елериң икинчи әвәзләмәсә, ax^2+bx+c квадрат үчһәдәлиси иң ики һәгиғи x_1 вә x_2 көкләри олдугда тәтбиг олунар. Квадрат үчһәдәлиһиң көкләри бәрабәр ($x_1 = x_2$) оларса, онда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} (x - x_1)^2 = (x - x_1) \sqrt{a}$$

олар ки, бу да (1) интегралы алында x -иң рационал функциясы олдуғу гү кәтәриләр. Буна көрә дә $x_1 \neq x_2$ һалына баһмаг кифәјәтдир. Бу һалда әвәзләмә

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - x_1) t$$

киңи кәтүрүләр. Бурадан

$$a(x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)^2 t^2, a(x - x_2) = (x - x_1) t^2,$$

$$x = \frac{ax_2 - x_1 t^2}{a - t^2}, dx = \frac{2a(x_1 - x_2)t}{(a - t^2)^2} dt$$

тапарыг. x , $\sqrt{ax^2+bx+c}$ вә dx үчүн тапдығымыз гүјмәтләри (1) интегралында јеринә јазсаг, рационал функцияның интегралы алынар:

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx &= \int R\left(\frac{ax_2 - x_1 t^2}{a - t^2}, \frac{(ax_2 - x_1 t^2 - x_1 t^2)}{a - t^2}\right) \frac{2a(x_1 - x_2)t}{(a - t^2)^2} dt = \\ &= \int R_1(t) dt. \end{aligned}$$

Гејд. Ејлерин биринчи ва икинчи эвэлэмэлери (1) шаклинде бүтүн интеграллары ҳисабламаг үчүн кифајатдир. Догрудан да, $a > 0$ олдугда биринчи эвэлэмә тәтбиг олунур, $a < 0$ олдугда икә $ax^2 + bx + c$ квадрат үчәдәлсинин көкләри һәгиги олиналмдыр. Чүнки $a < 0$ олдугда көкләр $(\alpha + i\beta)$ ва $(\alpha - i\beta)$ кими комплекс әдәдләр оларса, оңда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} [x - (\alpha + i\beta)] [x - (\alpha - i\beta)] = \sqrt{a} [(x - \alpha)^2 + \beta^2]$$

олар ки, бу да көкәлти ифадәнин мәнфи олдугуну көстәрир. Бу һалда икә һәгиги дәјишәнли функциялар нәзәријәсиндә, јәни ријәзи анализ курсунда бахылмыр.

Ејлерин биринчи ва икинчи эвэлэмәләри (1) шаклинде бүтүн интеграллары ҳисабламаг үчүн кифајат етдијинә бахмараг, $c > 0$ олдугда Ејлерин үчүнчү эвэләмәси адланан

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{c} \pm xt \quad (3)$$

эвэләмәси дә тәтбиг едилир. Бурадан x дәјишәнни үчүн t -нин расионал функциясы кими тапылмыш гијмәти вәситәсилә $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ вә dx ифадәләри t -нин расионал функциясы кими ифадә олунур. Нәтичәдә, (1) интегралы t дәјишәннини расионал функциясынын интегралына кәтирилмиш олур.

Мисал. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + q}}$ ($q \neq 0$) интегралыны ҳисабламаг үчүн Ејлерин биринчи эвэләмәсини

$$\sqrt{x^2 + q} = t - x, \quad t = x + \sqrt{x^2 + q}$$

шәклиндә көтүрәк. Онда

$$x^2 + q = t^2 - 2xt + x^2, \quad x = \frac{t^2 - q}{2t},$$

$$dx = \frac{t^2 + q}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2 + q} = t - \frac{t^2 - q}{2t} = \frac{t^2 + q}{2t}.$$

Бурадан

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + q}} = \int \frac{2t}{t^2 + q} \cdot \frac{t^2 + q}{2t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \\ = \ln |x + \sqrt{x^2 + q}| + C.$$

Нәһәјәт, гејд едәк ки, (1) интегралынын тәбини үмумиләшмәси

$$\int \frac{R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}) dx}{\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}) dx}$$

шәклиндә олан интеграллардыр. Булар да, еллиптик интеграллар адланыр (§ 7).

Еллиптик интеграллар, бир сыра хусуси һаллар мүстәсна олмагла, элементар функциялар вәситәсилә ифадә олунмур.

§ 10. БИНОМИАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНЫМАСЫ

m, n, p расионал әдәдләр, a вә b ихтијари һәгиги әдәдләр олдугда

$$x^m (a + bx^n)^p dx$$

шәклиндә ифадәјә *биномиал дифференциал* дејилир. Биномиал дифференциалын

$$J = \int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (1)$$

интегралыны ҳисабламаг үчүн ову

$$x^n = t, \quad x = t^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

эвэләмәси вәситәсилә

$$J = \frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bt)^p dt \quad (2)$$

шәклиндә кәтирәк.

Биномиал дифференциалын интегралы ашағыдакы үч һалда сонлу сәјдә элементар функцияларла көстәрилә биләр:

I. p там әдәддир. Онда $\frac{m+1}{n} - 1 = \frac{r}{s}$ расионал әдәд олдугундан $t = U^s$, $dt = sU^{s-1} dU$ эвэләмәсиндән истифадә едилир:

$$J = \frac{s}{n} \int U^{r+s-1} (a + bU^s)^p dU. \quad (3)$$

Интеграл алтындакы ифадә U дәјишәннинә нәсәрән расионал функция олдугундан (3) интегралы элементар функцияларла ифадә олунар. Нәтичәдә U эвәзинә $x^{\frac{s}{n}}$ јазараг, (1) интегралынын гијмәтини аларыг.

II. $\frac{m+1}{n}$ там әдәддир. Бу һалда $p = \frac{r}{s}$ расионал әдәддир вә (2) интегралында

$$a + bt = V^s, \quad t = \frac{1}{b} (V^s - a), \quad dt = \frac{1}{b} V^{s-1} dV$$

эвэләмәсини апармаг олар. Онда

$$J = \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int V^{r+s-1} (V^s - a)^{\frac{m+1}{n}-1} dV \quad (4)$$

алыныр. Бу интеграл алтындакы ифадә V дәјишәннини расионал функциясыдыр. Расионал функциянын интегралы икә элементар функциялар вәситәсилә ифадә олунур.

III. $\frac{m+1}{n} + p$ там әдәддир. Бу һалда (2) интегралыны раси-

сионал функцијанын интегралына кәтирмәк үчүн ону

$$J = \frac{1}{a} \int t^{\frac{a+1}{a}-1} \left(\frac{a+bt}{t} \right)^p dt$$

шәклиндә язмаг ва

$$\frac{a+bt}{t} = z^{\frac{1}{p}}, t = \frac{a}{z^{\frac{1}{p}-b}}, dt = -\frac{a z^{\frac{1}{p}-b-1}}{(z^{\frac{1}{p}-b})^2} dz, p = \frac{a}{\mu}$$

әвәзләмәсиндән истифадә етмәк ләзымдыр. Онда

$$J = -\frac{\mu a^{\frac{1}{p}+1}}{a} \int \frac{z^{\frac{1}{p}-b-1}}{(z^{\frac{1}{p}-b})^{\frac{a}{\mu}+1}} dz$$

алыныр ки, бурада да интеграл алтындагы ифадә z дәјишәнинин рационал функцијасыдыр. Рационал функцијанын интегралы исе һесабланыр ва нәтижәси элементар функцијаларла ифадә олунур.

Беләликлә, јухарыда кәстәрилән үч һалда (1) интегралынын һәм һесаб. вәвә билдијини ва һәм дә һансы үсулла һесабландығыны кәстәрдики.

П. Л. Чебышев¹ кәстәрмишди ки, (1) интегралы анчаг јухарыда кәстәрилән үч һалда сонлу шәкилдә интегралланыр ва нәтижәси сонлу сада элементар функцијаларла ифадә олунур. $p, \frac{m+1}{n}$ ва $\frac{m+1}{n} + p$ әдәдләринин һеч бири там әдәд

дејилсә, онда биномиал дифференциалын (1) интегралы һеч бир үсулла сонлу сада элементар функцијалар вәситәсилә кәстәрилә билмәз.

Мисал 1. $J = \int_1^3 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2 dx$ интегралыны һесабламагы.

Бурада $n = \frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{2}$ ва $p = 2$ олдуғундан 1 һалда кәстәрилән шәрт (p -нин там әдәд олмасы) өдәнилир. Буна көрә дә веримиз интегралы әвәзләтә

$$\sqrt{x} = t, x = t^2, dx = 2t dt$$

әвәзләмәсиндән истифадә едәрәк

$$J = 2 \int_1^{\sqrt{3}} t^{\frac{5}{3}} (1+t)^2 dt$$

шәклинә кәтирмәк, сонра исе

$$t = U^3, dt = 3U^2 dU$$

әвәзләмәсиндән истифадә етмәк ләзымдыр. Онда

¹ П. Л. Чебышев (1821—1894) мәшһур рус рәзәлијәтчысыдыр.

$$\begin{aligned} J &= 6 \int U^7 (1+U^3)^2 dU = 6 \int U^7 dU + 12 \int U^{10} dU + 6 \int U^{13} dU = \\ &= \frac{3}{4} U^8 + \frac{12}{11} U^{11} + \frac{3}{7} U^{14} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{8}{3}} + \\ &+ \frac{12}{11} x^{\frac{11}{3}} + \frac{3}{7} x^{\frac{14}{3}} + C. \end{aligned}$$

Мисал 2. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ интегралыны элементар функцијалар вәситәсилә кәстәрмәк мүмкүн дејилдир. Чүнки $m = 0$, $n = 4$ ва $p = -\frac{1}{2}$ олдуғундан $p = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{4}$ ва $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$ әдәдләринин һеч бири там әдәд олмур.

Мисал 3. $J_n = \int \sqrt[n]{1+x^2} dx$ ($n \geq 2$) интегралыны һесабламалы.

Бурада $m = 0$, $n = n$ ва $p = \frac{1}{n}$ олдуғундан $p = \frac{1}{n}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{n}$ ва $\frac{m+1}{n} + p = \frac{2}{n}$ әдәдләринин һеч бири $n \neq 2$ олдугда

там әдәд ола билмәз, $n = 2$ олдугда исе $\frac{m+1}{n} + p$ әдәди там олур. Јә'на III һалда кәстәрилән шәрт өдәнилир. Демәли, J_n интегралыны $n \neq 2$ олдугда элементар функцијаларла кәстәрмәк мүмкүн дејилдир, $n = 2$ олдугда исе

$$J_2 = \int \sqrt{1+x^2} dx$$

интегралыны рационал функцијанын интегралына кәтирмәк үчүн

$$t = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}, x = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}, dx = -\frac{tdt}{(t^2-1)^2}$$

әвәзләмәсиндән истифадә етмәк олар. Онда

$$\begin{aligned} J_2 &= -\int \frac{tdt}{(t^2-1)^2} = -\frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+1} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{(t-1)^2} \right] dt = -\frac{1}{4} \left[\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} - \ln|t+1| - \right. \\ &\left. - \frac{1}{t+1} \right] = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{t}{2(t^2-1)} + C. \end{aligned}$$

Бурада t әвәзинә $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$ ифадәсини јазсаг, аларыг:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{4} \ln |2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln |x+\sqrt{x^2+1}|^2 + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} + C = \\ &= \frac{1}{2} (\ln |x+\sqrt{x^2+1}| + x\sqrt{x^2+1}) + C. \end{aligned}$$

§ 11. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЈАЛАР, ДАХИЛ ОЛАН ИФАДАЛАРИН ИНТЕГРАЛЛАНЫМАСЫ

1. Универсал эвэлэмэ. Тутар ки,

$$\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sec x, \operatorname{cosec} x) dx \quad (1)$$

шаклинде интегралын хесаблинамасы талэб олунур. $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ вэ $\operatorname{cosec} x$ функцијалары хесаб эмэллэри васитэсилэ $\sin x$ вэ $\cos x$ илэ ифада олундугундан

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

(1) интегралы хэмишэ

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (2)$$

шаклинде интеграла чеврилир. Буна көрө дэ аңчаг (2) интегралынын хесаблинамасы илэ мэшфул олаг.

(2) интегралында

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad (3)$$

эвэлэмэсини апарар:

$$\begin{aligned} x &= 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Онда хэмин интеграл t хэжишэнинден асылы рационал функцијанын интегралына чеврилир.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R(t) dt.$$

Рационал функцијанын интегралы исэ хесаблана билир.

Демэли, (2) шаклинде хэр бир интеграл (3) эвэлэмэси васитэсилэ рационал функцијанын интегралына хэтирилир. Буна көрө дэ (3) эвэлэмэсинэ „универсал тригонометрик эвэлэмэ“ дејилир. Универсал тригонометрик эвэлэмэ бэвэн чох мүрэккэб рационал функцијанын интегралына хэтирлр. Белэ калларда дикэр эвэлэмэлэрдэн истифада етмэк даһа фајдалы олур.

Мисал 1. $J_1 = \int \frac{dx}{\sin^2 x}$ интегралыны хесабламаг үчүн (3) эвэлэмэсинден истифада едэк. Онда

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^2 \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{2} t + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ шаклинде интеграллар. Бурада m вэ n рационал эдэдлэр олдугда $t = \sin x$ вэ ја $t = \cos x$ эвэлэмэси васитэсилэ верилмиш интеграл биномиал дифференциалын интегралына хэтирилир. Догрудан да, $t = \cos x$ эвэлэмэсини көтүрсэк, онда

$$\begin{aligned} \sin x &= (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}, \quad dt = -\sin x dx \\ dx &= -(1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

олур вэ верилмиш интеграл

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = - \int t^n (1 - t^2)^{\frac{m-1}{2}} dt$$

шаклинэ хэтирилир ки, бу да биномиал дифференциалын интегралыдыр (§ 10). m вэ n там эдэдлэр олдугда верилмиш интеграл ја билаваситэ хесабланан интеграла, ја да рационал функцијанын интегралына хэтирилир.

а) Тутар ки, $m = 2k + 1$ (m истэнилэн там эдэддир). Онда верилмиш интеграл $t = \cos x$ эвэлэмэси васитэсилэ рационал функцијанын интегралына хэтирилир:

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx &= - \int \sin^{2k} x \cos^n x d(\cos x) = \\ &= - \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x) = - \int (1 - t^2)^k t^n dt. \end{aligned}$$

б) $n = 2k + 1$ (n истэнилэн там эдэддир) олдугда $t = \sin x$ эвэлэмэси васитэсилэ верилмиш интеграл рационал функцијанын интегралына хэтирилир.

в) m вэ n эдэдлэринин хэр икиси $m = 2k > 0$ вэ $n = 2l > 0$ кими мүсбэт чүт эдэдлэр олаугда

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \quad (4)$$

дүстурлары васитэсилэ верилмиш интеграл

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right)^k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x\right)^l dx \end{aligned}$$

кими јазылыр. Интеграл алтындалы икхэдлэри көстэрилэн дэрэчэдэн гүвэвэтэ јүксэлтдикден сонра $\cos 2x$ -ни гүвэвэтэринэ нэзэрэн чоххэдди алыныр. Тэкдэрэчэли хэдлэр б) хаянда көстэрилэн гајда илэ хесабланыр. Чүтдэрэчэли хэдлэрин интегралыны исэ (4) дүстурларыны јениден тэтбиг етмэккэ кчик дэрэчэли гүвэвэтэринин интегралына хэтирилэр. Бу просес $\int \cos kx dx$ интегралына хэлиб чыхана гэдэр давам етдирилир.

д) m вэ n эдэдлэринин хеч олмаса бири мэнфи чүт эдэд олдугда $t = \operatorname{tg} x$ вэ ја худ $t = \operatorname{ctg} x$ эвэлэмэси васитэсилэ ве-

риллиш интеграл ја билавасита ҳесабланан интеграл, ја да раснонал функцияны интегралына кәтириллр

Мисал 2. $J_2 = \int \cos^4 x dx$ интегралыны ҳесабламаг үчүн (4) дүстурларынын икинчисиндән ис ифадә едәк:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \\ &+ \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C = \frac{3}{8} x + \\ &+ \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

3. Тригонометрик функцияларын ҳасили дахил олан $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ интеграллары

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) x - \cos (\alpha + \beta) x],$$

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) x + \sin (\alpha - \beta) x],$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) x + \cos (\alpha - \beta) x]$$

дүстурларынын тәтбиғ етдикдә билавасита ҳесабланыр.

4. Тр гонометрик функциялар ахил олан

$$\int e^{ax} \cos \beta x dx \text{ вә } \int e^{ax} \sin \beta x dx$$

интегралларыны ҳесабламаг үчүн

$$(e^{ax} \cos \beta x)' = e^{ax} (a \cos \beta x - \beta \sin \beta x),$$

$$(e^{ax} \sin \beta x)' = e^{ax} (a \sin \beta x + \beta \cos \beta x)$$

бәрабәрликлариндән интеграллағды функциялары тапаг:

$$e^{ax} \cos \beta x = \frac{a}{a^2 + \beta^2} (e^{ax} \cos \beta x)' + \frac{\beta}{a^2 + \beta^2} (e^{ax} \sin \beta x)',$$

$$e^{ax} \sin \beta x = \frac{a}{a^2 + \beta^2} (e^{ax} \sin \beta x)' - \frac{\beta}{a^2 + \beta^2} (e^{ax} \cos \beta x)'$$

Бу бәрабәрликләри интегралласаг, аларыг:

$$\int e^{ax} \cos \beta x dx = \frac{(a \cos \beta x + \beta \sin \beta x) e^{ax}}{a^2 + \beta^2} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin \beta x dx = \frac{(a \sin \beta x - \beta \cos \beta x) e^{ax}}{a^2 + \beta^2} + C.$$

5. Ниссә-ниссә интеграллама үсулуны тәтбиғ етмәклә

$$\int x^n \cos \alpha x dx, \int x^n \sin \alpha x dx, \int x^n e^{\alpha x} dx,$$

$$\int x^n \arcsin x dx, \int x^n \arccos x dx, \int x^n \arctg x dx, \int x^n \operatorname{arctg} x dx$$

интегралларыны ҳесабламаг оләр.

Мисал 3. $J_2 = \int x^2 \arctg x dx$ интегралыны ниссә-ниссә интеграллама үсулу илә ҳесаблағат:

$$u = \arctg x, \quad dv = x^2 dx,$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

Онда

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{x^3}{3} \arctg x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{x^3}{3} \arctg x - \\ &- \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} \arctg x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

XXII ФАСИЛ

МУЪЛЖАН ИНТЕГРАЛ

§ 1. ИНТЕГРАЛ ЧӘМИ ВӘ МУЪЛЖАН ИНТЕГРАЛЫН ТӘРИФИ

Сонлу $[a, b]$ парчасында йерләшән вә

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

мүнәсибәтнин өдәјән x_0, x_1, \dots, x_n нөгтәләри верилдикдә, дејирләр ки, $[a, b]$ парчасы кичик $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, n-1$) ниссәләринә бөлүнмүшдүр. Бу бөлкүнү бир һәррәдә ишарә едирләр:

$$T = T[a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b]. \quad (1)$$

$[x_k, x_{k+1}]$ парчасынын узунлуғуну Δx_k илә ишарә едәк: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, Δx_k ($k = 0, n-1$) эдәдләринин ән'бәјүү T бөлкүсүнүн параметри адланыр вә $\lambda(T)$ илә ишарә олунар:

$$\lambda = \lambda(T) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k. \quad (2)$$

Тутаг ки, $y = f(x)$ функциясы сонлу $a < x < b$ парчасында тәјин олуғмушдур. $[a, b]$ парчасынын бөлүндүјү кичик $[x_k, x_{k+1}]$ парчаларынын һәр биринин дахилиндә ихтијари бир $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, n-1$) нөгтәси көтүрүб ашағыдакы кими чәм д үзәлдәк:

$$\sigma(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (3)$$

Бу чәмин гүјмәти $[a, b]$ парчасынын T бөлкүсүнәдән вә ξ_k нөгтәләринин сәјилмәсиндән асылдыр. (3) чәминә $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ парчасы да *интеграл чәми* дејилдир.

Тә'риф 1. Тутаг ки, сонлу J вә истәнилән кичик мүс-
бат δ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, $[a, b]$ парчасынын
 $\lambda(T) < \delta$ шәртини өдәжән ихтијари T бөлкүсү вә $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$
($k = 0, n-1$) нөгтәләри үчүн

$$|J_n(T) - J| < \delta$$

бәрабәрсизлији өдәнилик. Онда J әдәдиңә $J_n(T)$ интеграл
чәминин $\lambda(T) \rightarrow 0$ шәртиндә лимити дејилир вә

$$J = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} J_n(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

кими јазылыр.

Интеграл чәминин (вә ја буна охшар башгә ифадәләрин)
лимити, ардычыллыгын вә функцијанын лимити аңлајышла-
рындан фәрғли олан јени аңлајышдыр.

Тә'риф 2. $f(x)$ функцијасы үчүн $[a, b]$ парчасында дүзәл-
миш (3) интеграл чәминин $\lambda(T) \rightarrow 0$ шәртиндә сонлу J ли-
мити варса, онда $f(x)$ функцијасына $[a, b]$ парчасында ин-
тегралланан функција, J әдәдиңә исә онук $[a, b]$ парчасын-

да мүйәҗҗән интегралы дејилир вә $\int_a^b f(x) dx$ илә ишарә едиллик:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (4)$$

Бурада $f(x)$ функцијасы интегралалты функција, a вә b
әдәдләри, ујғун олараг, мүйәҗҗән интегралын ашағы вә јухары
сәрһәдләри, x дәјишәни исә интеграллама дәјишәни адланыр.

Тә'рифдән ајдындыр ки, мүйәҗҗән интегралын гијмәти интег-
раллама дәјишәниндән асылы дејилдик:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

Мүйәҗҗән интегралын тә'рифинә әләвә олараг гејд еләк ки,
 $a = b$ олдугда мүйәҗҗән интеграл

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

бәрабәрлији илә, $a > b$ олдугда исә

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

кими тә'јин олуноу.

Мүйәҗҗән интегралын тә'рифини биринчи дәфә Риман¹ вер-
дијиндән бә'зән (3) чәминә Риманын интеграл чәми, (4)
интегралына исә Риман интегралы дејилир.

¹ Бернгар Риман (1826—1866) мәшһур ахман ријазиијатчысыдыр.

Мүйәҗҗән интегралын тә'рифи һаггында бир мәсәләни бурада
хүсуси гејд етмәк ләзимдыр. Әкәр $[a, b]$ парчасынын T бөл-
күсү үчүн $\lambda(T) \rightarrow 0$ шәрти өдәниликсә, онда $[a, b]$ парчасы-
нын ајрылдыгы кичик $[x_k, x_{k+1}]$ парчаларынын сајы олан n
әдәди дә сонсузлуға јакынлашар. Бунун тәрси исә доғру де-
јилдик. $[a, b]$ парчасынын кичик һиссәләрә елә бөлмәк олар ки,
бөлкүдән алынған кичик $[x_k, x_{k+1}]$ һиссәләринин сајы сонсуз-
луға јакынлашдыгы ($n \rightarrow \infty$) һалда, бөлкүнүн параметри $\lambda(T)$
сыфра јакынлашмаз ($\lambda(T) \rightarrow 0$). Лакин $[a, b]$ парчасы бәрабәр
һиссәләрә бөлүндүкдә $\lambda(T) \rightarrow 0$ вә $n \rightarrow \infty$ мүнәсибәтләри экви-
валент олуру. Бу һалда интегралын (4) тә'рифини

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (5)$$

кими јазмағ олар.

$[a, b]$ парчасында тә'јин олуноуш истәнилән $f(x)$ функци-
јасынын һәмин парчада мүйәҗҗән интегралы вармы?

Хејр, јохдур. Нәр шејдән әввәл, $[a, b]$ парчасында интег-
ралланан функција һәмин парчада һөкмән мәһдуд олмалыдыр.
Чүнки әкәр $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында гејри-мәһдуд
оларса, онда ξ_k нөгтәләрини елә сечмәк олар ки, (3) интеграл
чәми мүтләғ гијмәтчә истәнилән гәдәр бөјүк әдәд олсун. Белә
чәмин исә сонлу лимити ола билмәз.

Демәли, $[a, b]$ парчасында тә'јин олуноуш $f(x)$ функција-
сынын мәһдуд олмасы, онун һәмин парчада интегралланан ол-
масы үчүн зәрури шәртдик. Лакин бу зәрури шәрт, јә'ни функ-
сијанын мәһдуд олмасы, онун интегралланан олмасы үчүн ка-
фи дејилдик. Мәсәләң, $[0, 1]$ парчасында тә'јин олуноуш мәһду-
д $D(x)$ Дирихле функцијасынын (XI, § 6) һәмин парчада мүйәҗҗән
интегралы јохдур. Доғрудан да, $[0, 1]$ парчасынын ихти-
јари T бөлкүсүнү апарараг әввәлчә ξ_k нөгтәләри олараг ујғун
кичик парчаларда рационал нөгтәләри, сонра исә ξ_k нөгтәләри ола-
раг иррационал нөгтәләри көтүрсәк вә ујғун интеграл чәмләри

дүзәлтсәк, онда ујғун олараг $J_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_k = 1 - 0 = 1$ вә

вә $J_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot \Delta x_k = 0$ олар. Буна көрә дә $J_n(T)$ чәминин

$\lambda(T) \rightarrow 0$ шәртиндә ξ_k нөгтәләринин сечилмәсиндән асылы ол-
мајан лимити јохдур, јә'ни $D(x)$ функцијасы $[0, 1]$ парчасын-
да интегралланан дејилдик.

Мәһдуд функцијаларын интегралланан олмасы үчүн кафи
шәртләр сонрақы параграфларда көстәрилик.

Мисал 1. $\int_a^b x dx$ ($a < b$) интегралынн һесабламалы.

Бу нэгсэдлэ $[a, b]$ парчасны ашагыдакы нөгтөлөрлэ n барабар ниссэжэ бөлөк:

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)h, x_n = a + nh = b.$$

Бурада $\Delta x_k = h = \frac{b-a}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). ξ_k нөгтэси оларг $[x_k, x_{k+1}]$ парчасынын сол учуну көтүрэрэк, $f(x) = x$ функциясү үчүн интеграл чэми дүзэлдэк:

$$\begin{aligned} J_n(T) &= \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a + kh) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a + \\ &+ \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} k = (-a)a + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = a(b-a) + \\ &+ \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$

Бурада биз $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ мүнәибэтинден истифада етдик (эдэди силсиланин чэми). Ајдындыр ки,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(T) &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right) = \\ &= (b-a) \frac{a+b}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

вэ ја

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Мисал 2. $\int_a^b \sin x dx$ интегралынн hesabламалы.

Бу балда $[0, \pi]$ парчасыны $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{n}, x_2 = 2\frac{\pi}{n}, \dots, x_n = \pi$ нөгтөлэри васитэсилэ n барабар ниссэжэ бөлэрэк вэ ξ_k нөгтөлэри оларг ујуун кичик парчаларын саг учуну сечэрэк $f(x) = \sin x$ функциясү үчүн интеграл чэми дүзэлдэк:

$$J_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(x_{k+1}) \Delta x_k = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}.$$

Бу чэми талмаг үчүн онун үзэриндэ ашагыдакы чевирмэлэри апарат:

$$J_n(T) = \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}} \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \sin \frac{\pi}{2n} =$$

$\int_a^b x \cdot x$ вэ $\int_a^b \sin x dx$ интегралларыннн агарыг 4-чү параграфын 1-чи теоремидэн ајдындыр.

$$= \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}} \sum_{k=1}^n \left[\cos \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n} \right) - \cos \left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} \right) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}} \left[\cos \frac{\pi}{2n} - \cos \left(\pi + \frac{\pi}{2n} \right) \right] = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2n}} 2 \cos \frac{\pi}{2n}.$$

Бурадан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2n}} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{2n} \right) = 2$$

вэ ја

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$$

Бу мисаллар көстэри ки, мүәјјән интегралын, тәрифинэ эсасон, \int_a^b ин интеграл чэминин лимити кини hesabламасы мүрәккәб чэмлэрин лимитинин hesabламасы илэ бағлыдыр. Мүәјјән и тегралларын садэ hesabлама үсуллары илэ кәләчәкдә (§ 8, § 9) таныш олачагыг.

§ 2. ДАРБУ ЧЭМЛЭРИ

Сонлу a, b парчасында мөһдул олан ихтијари $f(x)$ функциясү көтүрөк. $[a, b]$ парчасынын истәнилән

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

бөлүкүсү үчүн тәјин олунмуш

$$m_k = \inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x), \quad (k = 0, n-1)$$

тә

$$M_k = \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x), \quad (k = 0, n-1)$$

кәмијәтлэри васитәсилэ ашагыдакы чэмлэри дүзэлдэк:

$$s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad (1)$$

$$S_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k. \quad (2)$$

Бу чэмлэрә $f(x)$ функциясинин, ујуун оларг, ашагы вэ јухары Дарбу чэмлэри вэ ја ашагы вэ јухары интеграл чэмлэри дејилер. Ајдындыр ки,

$$m \leq f(x) \leq M$$

¹ Гастон Дарбу (1842—1917) франсыз математик.

барабарсизлигини өлөжөн һәр бир мөһлүд $f(x)$ функциясы үчүн

$$m(b-a) \leq s_n(T) \leq S_n(T) \leq M(b-a) \quad (3)$$

олар. Доғрудан да, $m_k \leq M_k$ вә $\Delta x_k > 0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) олдугундан

$$s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S_n(T)$$

аларыг. Бундан башга,

$$S_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = (b-a)M$$

вә

$$s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \geq m \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = (b-a)m.$$

Дарбу чәмләринин даһа ики мөһүм хәссәси вардыр:

Хәссә 1. $[a, b]$ парчасынын T бөлкү нөгтәләри сырасына јени бөлкү нөгтәләри алава етдиндә ашағы Дарбу чәми азалмаз, јухары Дарбу чәми исә артмаз.

Доғрудан да, тутаг кн, $[a, b]$ парчасынын

$$T = T[a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b]$$

бөлкү нөгтәләри сырасына јени бир x_k нөгтәси алава олунмушдур:

$$T' = T[a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b].$$

Бу T вә T' бөлкүләринә ујғун олан ашағы Дарбу чәмләри үчүн һәмишә

$$s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = m_0 \Delta x_0 + \dots + m_k \Delta x_k + \dots +$$

$$+ m_{n-1} \Delta x_{n-1} \leq m_0 \Delta x_0 + \dots + (m_k \Delta x_k' + m_k' \Delta x_k'') + \dots +$$

$$+ m_{n-1} \Delta x_{n-1} = s_n(T')$$

барабарсизлија доғру олар. Бурада

$$m_k' = \inf_{x_k < x < x_{k+1}} f(x), \quad m_k'' = \inf_{x_k < x < x_{k+1}} f(x), \quad \Delta x_k' = x_k' - x_k,$$

$$\Delta x_k'' = x_{k+1} - x_k', \quad m_k \leq m_k', \quad m_k \leq m_k'', \quad \Delta x_k = \Delta x_k' + \Delta x_k''$$

мүнасибәтләри нәзәрә алынмышдыр.

Ејни мөһакимә илә јухары Дарбу чәмләри үчүн $S_n(T) > S_n(T')$ барабарсизлијинин доғрулуғуну јохламаг олар.

Хәссә 2. Истәнидән бир T , бөлкүсүнә ујғун олан ашағы

$s_n(T_1)$ Дарбу чәми, ихтијари башга бир T_2 бөлкүсүнә ујғун олан јухары $S_n(T_2)$ Дарбу чәминдән бөјүк ола билмәз.

Доғрудан да, T_1 вә T_2 бөлкүләринин бирләшмәсиндән ибарәт олан бөлкүнү $T_1 \cup T_2$ илә ишарә етсәк, 1-чи хәссәјә вә (3) мүнасибәтигә кәрә

$$s_n(T_1) \leq s_n(T_1 \cup T_2) \leq S_n(T_1 \cup T_2) \leq S_n(T_2).$$

(3) барабарсизлијиндән ајдындыр кн, һәр бир мөһлүд $f(x)$ функциясынын бүтүн ашағы Дарбу чәмләри јухарыдан, бүтүн јухары Дарбу чәмләри исә ашағыдан мөһлүлдур:

$$s_n(T) \leq M(b-a), \quad m(b-a) \leq S_n(T).$$

Буна кәрә дә

$$J_0 = \sup \{s_n(T)\}, \quad J^* = \inf \{S_n(T)\}$$

хәмијәгләри сонлу олар (IX, § 9). 2-чи хәссәјә вә (3) мүнасибәтинә кәрә исә ихтијари $s_n(T)$ вә $S_n(T)$ Дарбу чәмләри үчүн ашағыдакы мүнасибәт доғрудур.

$$s_n(T) \leq J_0 \leq J^* \leq S_n(T). \quad (4)$$

J_0 вә J^* әдәдләринә, ујғун оларәг ашағы вә јухары Дарбу интегралы дејилр.

§ 3. МҮӨЛҖӘН ИНТЕГРАЛЫН ВАРЛЫГ МӘСӘЛӘСИ

Тутаг кн, $f(x)$ сонлу $[a, b]$ парчасында мөһлүд функциялар. $[a, b]$ парчасынын ихтијари T бөлкүсү үчүн интеграл вә Дарбу чәмләри дүзәлдәк:

$$J_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

$$s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k,$$

$$S_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Бурада $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) ихтијари нөгтәләр олдугундан $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ барабарсизлијини вә буна кәрә дә

$$s_n(T) \leq J_n(T) \leq S_n(T) \quad (1)$$

барабарсизлијини јазә биләрик. Бундан башга, Дарбу чәмләри үчүн

$$S_n(T) - s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} [M_k - m_k] \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k \quad (2)$$

$$s_n(T) = \inf \{J_n(T)\}, \quad S_n(T) = \sup \{J_n(T)\} \quad (3)$$

мүнасибәтләрини алыаг олар. Бурада $\omega_k = M_k - m_k$ хәмијәтинә $f(x)$ функциясынын $[x_k, x_{k+1}]$ парчасында рәгги дејилр.

Теорем. $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш мәддүд $f(x)$ функциясынын бу парчада интегралланган олмасы үчүн

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} [S_n(T) - s_n(T)] = 0 \quad (4)$$

мүнәсибәтинин өдәнгиләси зәрури һәм кафи шәртдир. Шәртии зәрурилији. Тутаг ки, $f(x)$ функциясы $[a, b]$ пар-

часында интегралландыр, вә $J = \int_a^b f(x) dx$ онун мүнәјән ин-

тегралдыр. Онда мүнәјән интегралын тә'рифинә кәрә истәнилән $\epsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, $\lambda(T) < \delta$ шәртини өдәјән ихтијари T бөлкүсү вә ихтијари $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ нөг-тәләрн үчүн

$$|J_n(T) - J| < \epsilon \text{ вә } |a - J - \epsilon < J_n(T) < J + \epsilon$$

бәрәбәрлији өдәнилик. Бурадан, (3) бәрәбәрликләринә әсасән

$$J - \epsilon < s_n(T) < S_n(T) < J + \epsilon$$

мүнәсибәти алыныр ки, бу да

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} s_n(T) = J, \quad \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_n(T) = J$$

вә J тәләб олунан

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} [S_n(T) - s_n(T)] = 0$$

бәрәбәрлијини дәггү олдуғуну кәстәрир

Шәртии кафилији. Тутаг ки, (4) бәрәбәрлији өдәнилик. Онда әввәлки параграфдакы (4) мүнәсибәтинә кәрә $J_n = J^*$ олар вә $J = J_n = J^*$ әдәди үчүн

$$s_n(T) < J < S_n(T) \quad (5)$$

бәрәбәрлији өдәнилик.

(1) вә (5) бәрәбәрликләриндән чыхыр ки, истәнилән $\epsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, $\lambda(T) < \delta$ шәртини өдәјән ихтијари T бөлкүсү үчүн

$$|J_n(T) - J| < \epsilon$$

бәрәбәрлији өдәнилик. Бурадан

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} J_n(T) = J$$

алыныр ки, бу да $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ парчасында интеграл анал олдуғуну кәстәрир.

(2) бәрәбәрлијинә әсасән ашағыдакы нәтичә алыныр.

$[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш мәддүд $f(x)$ функциясынын бу парчада интегралланган олмасы үчүн

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0 \quad (6)$$

мүнәсибәтинин өдәнгиләси зәрури вә кафи шәртдир.

§ 4. КӘСИЛМӘЈӘН ВӘ МОНОТОН ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНГАН ОЛМАСЫ

Теорем 1. $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функциясы һәмин парчада интеграллангандыр.

Исбаты. Мә'лумдур ки, парчада кәсилмәјән функция һәмин парчада мәддүддүр (XIII, § 3) вә мүнәјән кәсилмәјәндир (XIII, § 10). Буна кәрә дә ихтијари $\frac{\epsilon}{b-a} > 0$ әдәди үчүн елә $\delta_0 > 0$ вар ки, $[a, b]$ парчасынын $|x' - x''| < \delta_0$ бәрәбәрлијини өдәјән ихтијари x', x'' нөгтәләриндә

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

бәрәбәрлији өдәнилик. Икки ихтијари $\delta_0 > 0$ әдәди үчүн $[a, b]$ парчасынын бөлкүсүнү елә көтүрәк ки, $\lambda(T) < \delta_0$ олсун. Бу һалда $f(x)$ функциясынын истәнилән $[x_k, x_{k+1}]$ парчасында рәгси

$$\omega_k = M_k - m_k = |f(x'_k) - f(x''_k)| = |f(x'_k) - f(x''_k)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

мүнәсибәтини өдәјәр. Бурада биз, $[x_k, x_{k+1}]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функциясынын һеч олмаса бир x'_k нөгтәсиндә һәмин парчадакы ән бөјүк гијмәтини $M_k = f(x'_k)$, һеч олмаса бир x''_k нөгтәсиндә ән гијчик гијмәтини $m_k = f(x''_k)$ алмасындан (XIII, § 8) истифадә етдик. Онда $[a, b]$ парчасынын һәмин T бөлкүсү үчүн

$$S_n(T) - s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \epsilon$$

вә J

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} [S_n(T) - s_n(T)] = 0$$

олар ки, бу да $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ парчасында интегралланган олдуғуну кәстәрир (§ 3).

Теорем 2. $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш монотон $f(x)$ функциясы һәмин парчада интеграллангандыр.

Исбаты. Үмумлији азалтмалап, фәрз еләк ки, $f(x)$ функциясы $[a, b]$ парчасында азалмајандыр. Онда $f(x)$ функциясы $[a, b]$ парчасында мәддүд олар вә парчанын истәнилән $[x_k, x_{k+1}]$ ниссәсиндә рәгси

$$\omega_k = M_k - m_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) \geq 0$$

кичик тә'јин олунар. Беләликлә, $[a, b]$ парчасынын истәнилән T бөлкүсү үчүн

$$S_n(T) - s_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \lambda(T) \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k =$$

$$= \lambda(T) \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] = \lambda(T) [f(b) - f(a)]$$

вә буна көрә дә

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} [S_n(T) - s_n(T)] = 0$$

олур. Демәли, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интеграллан-
нандыр.

Гейд. Китабын XIII фәслиндә (§ 7) исбат етмишдик кж, $[a, b]$ парчасында монотон олан $f(x)$ функцијасының һәмийн парчала анчаг бирикчи һөв кәсиһә һөғгәләри ола биләр. Бу кәсиһә һөғгәләри сонлу сәйзә вә ја ән чоһу һесаби сәйзә ола биләр. Кәстәрмәк олар ки, тәһкә монотон функција-
лар дејил, бу хәссәзә малик олан бүтүн һәғдуд функцијалар да интеграл-
ланандыр. Башга сөзлә, $[a, b]$ парчасында мәһдуд вә бу парчала ән чоһу
һесаби сәйзә кәсиһә һөғгәси олан һәр бир функција һәмийн парчала интег-
ралланандыр. ²¹

§ 5. МҮӘЈҖӘН ИНТЕГРАЛЫН ӘСАС ХАССӘЛӘРИ

Мүәјҗән интегралын интеграл чәминик лимити олмасына әсасланараг онун бир сыра хәссәләринин мүәјҗән етмәк олар. Бу хәссәләр, истәнилән интегралланан функцијалар үчүн доғру олдуғуна баһмајараг, бурада кәсилмәјән функцијалар үчүн ис-
бат едилир. Буна көрә дә баһылан бүтүн функцијалар бурада
кәсилмәз һесаб едилир.

Хәссә 1. Сабит әуругу мүәјҗән интеграл шәрәси ха-
риһкә чыхармаг олар:

$$\int_a^b \mu f(x) dx = \mu \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

(μ сабит әдәддир).

Исбаты. Тәриғә көрә $[a, b]$ парчасының истәнилән T
бөлкүсү үчүн

$$\begin{aligned} \int_a^b \mu f(x) dx &= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \mu f(\xi_k) \Delta x_k = \\ &= \mu \left[\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \right] = \mu \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

олар. Хүсуси һалда, $f(x) = 1$ оларса, онда

$$\int_a^b \mu dx = \mu \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \mu (b-a)$$

вә бурадан $\mu = 1$ олдуғда

$$\int_a^b dx = b-a \quad (2)$$

аһыһыр.

Хәссә 2. Сонлу сәйзә $f_1(x), \dots, f_n(x)$ функцијаларының
чәминик мүәјҗән интегралы топлананларын мүәјҗән интег-
ралларының чәминә барабәрдир:

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^n f_k(x) \right] dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx. \quad (3)$$

Исбаты. Тәриғә көрә

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n f_k(x) \right] dx &= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=1}^n f_k(\xi_j) \right] \Delta x_j = \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f_k(\xi_j) \Delta x_j \right] = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx. \end{aligned}$$

Һәткәчә.

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (4)$$

Хәссә 3. Истәнилән c һөғгәси үчүн

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (5)$$

барабәрлији доғрудур.

Исбаты. Әвәләчә $a < c < b$ һалына баһаг. $[a, b]$ парча-
сының истәнилән T бөлкүсүнү апарат вә мүәјҗән интегралын
варлығы ξ_k һөғгәләриның сечилмәсиндән асылы олмадығындан,
 c һөғгәсини бөлкү һөғгәси кәтүрәрәк, $f(x)$ функцијасы үчүн
интеграл чәми дүзәлдәк:

$$J_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{[a,c]} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{[c,b]} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Бу чәми $[a, c]$ вә $[c, b]$ парчаларында јерләшән ујғун һис-
сәләр үзрә ики чәмә ајырмаг олар. Онда аһырынчы барабәр-
лији

$$J_n(T) = \sum_{[a,c]} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{[c,b]} f(\xi_k) \Delta x_k$$

һими јазараг, $\lambda(T) \rightarrow 0$ шәртиндә лимитә кәчсәк (5) барабәр-
лијини аларыг.

Әкәр $a < b < c$ оларса, онда исбат етдијимизә әсасән

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

вә ја

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

олар. Бурада

$$\int_a^c f(x) dx = - \int_c^a f(x) dx$$

олдугуну (§ 1) нээгээр алсав, тэгнэ дэ (5) бэрэбэрлийн алынныр. Гэлэн халларда да (5) бэрэбэрлийннн догрулуугу еүнн гайда илэ исбат олунур.

Нэтича. Сонлу сайда c_1, \dots, c_m нөггэлэри үчүн

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_m}^b f(x) dx \quad (6)$$

бэрэбэрлийн догрудуг. Бурада бахылан бүтүн интегралларын варлыгы фэрэ олунур.

Хэссэ 4. $a < x < b$ парчасында $f(x) > 0$ олзгса, очда

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Исбаты. $f(\xi_k) > 0$ вэ $\Delta x_k > 0$ олдуғундан

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k > 0.$$

Нэтича. $a < x < b$ парчасында $f(x) < \varphi(x)$ бэрэбэрэцэли-
нн өдөнчилсэ, очда

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (7)$$

Догруден да, $\varphi(x) - f(x) > 0$ олдуғундан

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)] dx > 0$$

олар. Бурадан

$$\int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) dx > 0, \quad \int_a^b \varphi(x) dx > \int_a^b f(x) dx$$

алынныр.

Хэссэ 5. $a < x < b$ парчасында кэснлмэжэн истэннлэн $f(x)$ функциясн үчүн

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f(x)| dx \quad (8)$$

бэрэбэрэцэлиин догрудур.

Исбаты. Мүтлэг гнжмэтин тэрифинэ (IX, § 7) көрө x -нн $[a, b]$ парчасындакн бүтүн гнжмэтлэриндэ

$$-|f(x)| < f(x) < |f(x)|$$

олар. Бу бэрэбэрэцэликлэрн хэдбэхэд интегралласаг

$$-\int_a^b |f(x)| dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b |f(x)| dx$$

мүнэснбэти влынныр кн, бу да (8) бэрэбэрэцэлиинн догру ол-
дугуну кэстэрир.

Бу хэссэ илэ алагадир олараг гелд едэк кн, $f(x)$ функци-
ясн $[a, b]$ парчасында кэснлмэжэн олдугда $|f(x)|$ функциясн
да нэ нн парчада кэснлмэжэн олур. Бука көрө дэ $f(x)$ -нн $[a, b]$
парчасында интегралланан олмасындан $|f(x)|$ -нн дэ нэ нн парчада
интегралланан олмасы чыхыр. Бу тэклнф истэннлэн интеграл-
ланан функција үчүн дэ догрудур. $f(x)$ функциясн $[a, b]$ пар-
часында интегралланандырса, очда $|f(x)|$ функциясн да нэ нн
парчада интегралланандыр. Бунун тэрсн догру олмэ дэ бн-
лэр. Мэсэлэн,

$$f(x) = \begin{cases} +1, & x \text{ рационал элэд олдугда,} \\ -1, & x \text{ иррационал элэд олдугда} \end{cases}$$

функцияснын мүтлэг гнжмэти $|f(x)| \equiv 1$ нэр бир сонлу пар-
чада интегралланандыр, өзү исэ интегралланан дежилдыр.

Хэссэ 6. $[a, b]$ парчасынын анчаг бир нөггэснндэ снфнр-
дан фэргли олан функцияснын интегралн снфра бэрэбэрднр,
тэ нн

$$f_c(x) = \begin{cases} 0, & x \neq c, \\ 1, & x = c \end{cases} \quad (9)$$

тэклнндэ функцияснын интегралн снфра бэрэбэрднр:

$$\int_a^b f_c(x) dx = 0.$$

Исбаты. $[a, b]$ парчасынын истэннлэн T бөлхүсүнү апар-
лыгда c нөггэсн бөлхүдэн алынн кнчнк $[x_k, x_{k+1}]$ парчалары-
нын анчаг бнрннэ дахыл олар: $x_m < c < x_{m+1}$. Бу халда $f_c(x)$
функцияснын интеграл чэмнндэ анчаг ннн хэд снфнрдан фэрг-
ли ола бнлэр:

$$J_n(T) = \sum_{k=1}^{n-1} f_c(\xi_k) \Delta x_k = f_c(\xi_{m-1}) \Delta x_{m-1} + f_c(\xi_m) \Delta x_m.$$

Бурадан

$$|J_n(T)| \leq |f_c(\xi_{m-1})| |\Delta x_{m-1}| + |f_c(\xi_m)| |\Delta x_m| \leq$$

$$< |\varphi| (|\Delta x_{m-1}| + |\Delta x_m|)$$

бэрэбэрэцэлиин вэ $\lambda(T) \rightarrow 0$ шэртнндэ догру олан

$$0 < |\Delta x_{m-1}| + |\Delta x_m| < 2\lambda(T) \rightarrow 0$$

мүнэснбэтинэ эсвсэн $J_n(T) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow 0$) алыннар.

Нэтича. $[a, b]$ парчасында интегралланан $f(x)$ функци-
яснын бнр $c \in [a, b]$ нөггэснндэ гнжмэтинн дэжншндрнх
олук интегралланмасынн вэ интегралнн дэжншндр.

Догрудан да, $f(x)$ функциясынын c нөгтөсіндә гижмәтини дәјишмәк онун үзәринә (9) шәклиндә функция эләвә етмәк демәкдир:

$$\varphi(x) = f(x) + f_c(x).$$

6-чы хәссәјә көрә $\int_a^b f_c(x) dx = 0$ олдугундан,

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f_c(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Хәссә 7. $[a, b]$ парчасында интегралланан $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функцияларынын һәһили дә һәмин парчада интегралланандыр.

Бу хәссәни мүйәјјән интегралын варлыг теореминә әсәсән исбат етмәк олар.

§ 6. ОРТА ГИЈМӘТ ТЕОРЕМИ

Теорем. $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функциялары $[a, b]$ парчасында кәһилмәјән функциялар олдугда вә $\varphi(x)$ функциясы бу парчада ишәрәсини дәјишмәдигдә, елә $a < \xi < b$ нөгтәси вар ки,

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx \quad (1)$$

бәрабәрлији өдәһилир.

Исбаты. $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ парчасында ән кичик гижмәтини $m = \inf f(x)$ вә ән бәјүк гижмәтини $M = \sup f(x)$ члә ишәрә етсәк, x -ин һәмин парчадакы бүтүн гижмәтләриндә

$$m \leq f(x) \leq M \quad (2)$$

олар. Мүйәјјәнлик үчүн фәрз едәк ки, $[a, b]$ парчасында $\varphi(x) \geq 0$. Онда (2) бәрабәрсизлијини һәр үч тәрәфи $\varphi(x)$ функциясына вурмагла

$$m \varphi(x) \leq f(x) \varphi(x) \leq M \varphi(x)$$

аларыг. Бу бәрабәрсизлији һәдбәһәд интегралласаг,

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx \quad (3)$$

олар.

Әкәр $\int_a^b \varphi(x) dx = 0$ оларса, онда (3) бәрабәрсизлијинә кө-

рә $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = 0$ алынар. Бу һалда (1) бәрабәрлији $f(x)$ -ин истәһилән $\xi \in [a, b]$ нөгтәсиндәки гижмәти үчүн өдәһиләр.

$\int_a^b \varphi(x) dx > 0$ олдугда исә (3) мүнәсибәтиндән

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \leq M$$

бәрабәрсизлији алынар. Бурадан ајдындыр ки,

$$\tau = \frac{\int_a^b f(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \quad (4)$$

әдәди $m \leq \tau \leq M$ шәртини өдәјир. Онда кәһилмәјән функцияларын мәлүм хәссәсинә (XIII, § 8) көрә $[a, b]$ парчасынын һеч олмаса бир ξ нөгтәсиндә $f(\xi) = \tau$ олар. Буну (4) бәрабәрлијиндә нәзәрә алсаг, (1) алынар.

Һәһити чә. $f(x)$ функциясы $[a, b]$ парчасында кәһилмәјән олдугда, елә $a < \xi < b$ нөгтәси вар ки,

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi) \quad (5)$$

бәрабәрлији өдәһилир.

(5) бәрабәрлијини доғрулуғуна инанмаг үчүн (1) мүнәсибәтиндә $\varphi(x) = 1$ вә $\int_a^b dx = (b-a)$ олдугуну нәзәрә аламаг ләзымдыр.

(5) бәрабәрлијини ашағыдакы кими јазаг:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi).$$

Бу бәрабәрлији сол тәрәфиндәки әдәдә $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ парчасында орта гижмәти дејилир. Буна көрә дә исбат етдијимиз нәтичә орта гижмәт теорем, (5) бәрабәрлији орта гижмәт дүстүрү вә исбат етдијимиз теорем үмумиләшмиш орта гижмәт теорем адалыр.

§ 7. ЈУХАРЫ СӘРҲӘДИ ДӘЈИШӘН ОЛАМ МҮӘЈҖӘН ИНТЕГРАЛЛАР

Јутаг ки, $y' = f(t)$ функциясы $[a, t]$ парчасында тәјһин олунмуш кәһилмәјән функциядыр. Онда бу функция истәһилән $[a, x]$ ($a < x < b$) парчасында интегралланан олар. Һәмин

парча үэрэ көтүрүлмүш интегралы

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

илэ ишара едэк a сабит эдэк, x ясэ $[a, b]$ парчасында дэишэн көмүлжөт олдугда (1) интегралы x -ни функцијасы олар. Буна көрө дэ, (1) интегралына *јухары сэрхэди дэишэн олан мүөјјөн интеграл* дејилир.

Бурада $f(x)$ функцијасынын мүөјјөн хассалэри мэлум олдугда *јухары сэрхэди дэишэн олан* (1) интегралынын, јэни $F(x)$ функцијасынын ујгуи хассалэри өјрөнилэр.

Теорем. Экэр $f(x)$ функцијасын $[a, b]$ парчасында кэсилмэјендирсэ, онда һэмин парчанын истэтилен x нөгтөсиндэ

$$F'(x) = f(x) \quad (2)$$

өд. ја

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

бэрабэрлији доғрудур, јэни мүөјјөн интегралыни јухары сэрхэди нэзэрэн төрөтөси интегралалты функцијада интеграллама дэишэни эдэишэ јухары сэрхэди јаздында алтынн гијмэтэ бэрабэрдир.

Исбаты. Аргумента x нөгтөсиндэ Δx артымы вериб, $F(x)$ функцијасынын ујгуи артымыны һесаблајар:

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \\ &= \left(\int_a^x + \int_x^{x+\Delta x} \right) f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

Алдыгымыз интеграла орта гијмэт теоремини тэтибг етсэк,

$$\Delta F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x, \quad \xi \in [x, x + \Delta x]$$

олар, Бурадан

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(\xi), \quad \xi \in [x, x + \Delta x] \quad (3)$$

бэрабэрлијини аларыг. Алдымдыр ки, $\Delta x \rightarrow 0$ шэртиндэ $\xi \rightarrow x$ олар. Буна көрө дэ (3) бэрабэрлијини $\Delta x \rightarrow 0$ шэртиндэ лимитэ кечсэк вэ $f(x)$ функцијасынын кэсилмэз олдугуну нэзэрэ аласаг,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$$

өд. ја

$$F'(x) = f(x)$$

олар.

Нэтичэ. $[a, b]$ парчасында кэсилмэјөн $f(x)$ функцијасынын һэмин парчада ибтидаи функцијасы бардыр.

Доғрудан дэ, $f(x)$ кэсилмэјөн функција олдугда $F(x) =$

$= \int_a^x f(t) dt$ функцијасы онун ибтидаи функцијасы олар: $F'(x) =$

$= f(x)$.

Бу нэтичэ эсиндэ гејри-мүөјјөн интегралыни варлыг теоремидир.

§ 8. НЈУТОН-ЛЕЈБНИС ДУСТУРУ

Гејдедек ки, мүөјјөн интегралыни интеграл чэмнини лимити кими (јэни билаваситэ тэрифинэ эсасэн) һесабланмасы нисбатэн чэтин мәсэлэди. Бу усулла интеграллары һесабладыгда чох заман мүрэккэб чэмлэрини лимитини билаваситэ талмаг лазым кэлэр. Мэлумдур ки, һэтта садэ интегралалты функцијалар үчүн интеграл чэмнини лимитини һесабламаг бэзэн бөјүк техники чэтинликлэрлэ бағлы олар.

Интегралалты функцијанын ибтидаи функцијасы мэлум олдугда мүөјјөн интегралы һесабламаг үчүн чох элверишли бир дустур мэлумдур.

Теорем. $[a, b]$ парчасында кэсилмэјөн $f(x)$ функцијасынын ибтидаи функцијаларындан бири $\Phi(x)$ функцијасыдырса, онда

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (1)$$

дустуру доғрудур. (1) дустуруна. Нјутон-Лејбнис дустуру дејилир.

Исбаты. Шэртэ көрө $\Phi(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында кэсилмэјөн $f(x)$ функцијасынын ибтидаи функцијаларындан бириди. Эввэлки параграфда исбат етмишик ки,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

функцијасы дэ һэмин функцијанын ибтидаи функцијасыдыр. Верилмиш функцијанын ики ибтидаи функцијасы бир-бириндэк анчаг сабит бир эдэдлэ фэргэлэнэ билэр (XXI, § 1). Буна көрө дэ

$$\int_a^x f(t) dt = \Phi(x) + C \quad (2)$$

олмалыдыр. Бу бэрабэрликдэ $x = C$ көтүрсэк вэ $\int_a^C f(t) dt = 0$

олдугуну нэзэрэ аласаг, $C = -\Phi(a)$ тапарыг. Бу гијмэти (2) бэ-

рабэрлијиндэ јеринэ јазыб, сонра да алынган барабарлиқдэ $x=b$ көтүрсэи:

$$\int_a^b f(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

аларыг.

Гейд едэк кк, (1) дүстүрүнүн саг тэрэфиндэки фэрги чох вахт

$$\overline{\Phi(b) - \Phi(a)} = \Phi(x)|_a^b$$

вэ ја

$$\Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x)]_a^b$$

книш ишарэ едирлэр. Бу һалда Нјутон-Лейбнис дүстүру

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x)|_a^b \quad (2)$$

книш јазылып. Верилмиш $f(x)$ функцијасынын бүтүн ибтидан функцијалары бир-бириндэн анчаг сабит эдэдлэ фэрглэндиклэриндэн $\Phi(b) - \Phi(a)$ фэрги $\Phi(x)$ ибтидан функцијасынын сечилмэсиндэн асылы дејил. $f(x)$ -ни бүтүн $F(x)$, $\Phi(x)$,... ибтидан функцијалары үчүн

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \dots = \int_a^b f(x) dx$$

фэрглэри сабит олур.

Мисал 1.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}), (n \neq -1).$$

Мисал 2.

$$\int_a^b a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \Big|_a^b = \frac{1}{\ln a} (a^b - a^a), (a > 0, a \neq 1).$$

Мисал 3.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1 - 1) = 2.$$

Јуһарыда (§ 1) бу интеграл мүәјјән интегралын тэ'рифинэ әсасән һесаблинышыдыр.

Мисал 4.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Мисал 5.

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2+3} \Big|_0^1 = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}.$$

§ 9. МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ҺЕСАБЛАНАМА ҮСУЛЛАРЫ НАГГЫНДА

Мүәјјән интегралын интеграл чәминин лимити кими вэ Нјутон-Лейбнис дүстүру васитәсилә һесаблинамасы һаггында әввәлләр данышышыг. Бу үсуллар мүәјјән интегралы һесаблинамаг үчүн үмуми үсуллар һесаб олуна биләр.

Мүәјјән интегралын интеграл чәминин лимити кими һесаблинамасы үсулу принципә бүтүн һалларә тәтбиғ олуна биләр. Лакин алынган интеграл чәмләринин лимитини һесаблинамаг бәјүк техникә чәтиликләрдә бағлы олдуғунда бу үсул әксәр һалларда әлверилиши дејилдәр.

Мүәјјән интегралларын Нјутон-Лейбнис дүстүру васитәсилә һесаблинамасы нисбәтән әлверилиши үсулдур. Бу үсулла мүәјјән интегралы һесаблинамағда исә әввәлчә ујуғун гејри-мүәјјән интегралы һесаблинамағ тәләб олунур ки, бу да чох вахт әлверилиши олмур. Буна керә дэ бир чох мүәјјән интеграллары бә'зән хусуси үсулларә һесаблинамағ даһа мүнәсиб олур. Белә хусуси үсулларын бир нечәси ашағыда көстәрилир.

1. һиссә-һиссә интеграллама.

Теорем 1. $[a, b]$ парчасында һиссәләһән вэ һиссәләһән тәрәһәлләри олан $U=U(x)$ вэ $V=V(x)$ функцијалары үчүн

$$\int_a^b U(x) dV(x) = [U(x) V(x)]_a^b - \int_a^b V(x) dU(x) \quad (1)$$

барабарлиғи доғрудур. Бу дүстүрә мүәјјән интеграл үчүн һиссә-һиссә интеграллама дүстүрү дејилир.

Ис баты. Ики функција һасили тәрәһәсинин һесаблинамағи

$$[U(x) V(x)]' = U'(x) V(x) + U(x) V'(x)$$

дүстүрүнүн һәр ики тәрәфини $[a, b]$ парчасы үзәрә интеграллағат:

$$\begin{aligned} \int_a^b [U(x) V(x)]' dx &= \int_a^b U'(x) V(x) dx + \int_a^b U(x) V'(x) dx = \\ &= \int_a^b V(x) dU(x) + \int_a^b U(x) dV(x). \end{aligned}$$

Бу барабарлиғин сол тәрәфиндәки интеграл Нјутон-Лейбнис дүстүру васитәсилә һесаблиныр:

$$\int_a^b [U(x) V(x)]' dx = [U(x) V(x)]_a^b.$$

Онда

$$[U(x) V(x)]_a^b = \int_a^b V(x) dU(x) + \int_a^b U(x) dV(x)$$

вэ жа тэлэб олуиан

$$\int_a^b U(x) dV(x) = [U(x) V(x)]_a^b - \int_a^b V(x) dU(x)$$

дүстүрү алыныр.

Мисал 1. $\int x \ln x dx$ интегралыны (1) дүстүрү клэ һесабли-

маг үчүн $U(x) = \ln x$ вэ $dV(x) = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$ һесаб едэк. Онда

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

Мисал 2. $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ($n > 0$ там эдэддир).

Бу интегралы һесаблимаг үчүн һиссэ-һиссэ интеграллама дүстүрү васитэһилэ рекуррент дүстүр аймаг олар. Онда:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot d(-\cos x) = [-\sin^{n-1} x \cdot \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = (n-1) \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1) (J_{n-2} - J_n).$$

Буралап

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} \quad (2)$$

рекуррент дүстүрү алыныр.

Экэр $n=2m$ оларса, онда $J_0 = \frac{\pi}{2}$ олдугундан (2) дүстүрү-на эһасэи

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot J_0 = \frac{(2m-1) \cdots 3 \cdot 1}{(2m) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$n=2m+1$ олдугда һсэ

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot J_1 = \frac{(2m) \cdots 4 \cdot 2}{(2m+1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1} \cdot J_1$$

П. Мүдөн интегралда дэһиһэиһи эһэһтмэ.

Теорем 2. Тутаг ки, 1) $f(x)$ функциһасы $[a, b]$ пар-часында һэһиллэһэндир; 2) $x=\varphi(t)$ функциһасы вэ оһун $\varphi'(t)$ төрөһэһи $[a, b]$ парчасында һэһиллэһэндир; 3) $[a, b]$ парчасында

$$a = \varphi(\alpha) < \varphi(t) < \varphi(\beta) = b$$

һуһасиһэһи өдөһиллэр. Онда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (3)$$

бэрэһэрлиһи доһрудур.

Бу дүстүрү мүдөһиһи интегралда дэһиһэиһи эһэһтмэ дүс-түрү дэһиллэр.

Иһбаты. Теоремия һэртлэриһидэн аһдыһдыр ки, $f(x)$ функ-сиһасы $[a, b]$ парчасында, $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ функциһасы һсэ $[a, b]$ парчасында интегралланаһдыр (уһуһи парчаларда һэһиллэһэ олдуглары үчүн). Бундан башта, экэр $F(x)$ функциһасы $f(x)$ -ни һэр һансы һбтидан функциһасыһдырса, онда $F(\varphi(t))$ функциһасы да $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ функциһасыһыһи һбтидан функциһасы олар. Бу-радан, Нүһтон-Лейбниһ дүстүрүна көрө

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

вэ жа тэлэб олуиан

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

дүстүрү алыныр.

Мисал 3. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - x^2} dx$ интегралыны дэһиһэиһи эһэһ-тмэ дүстүрү васитэһилэ һесаблиаг.

$x = a \sin t$ эһэһлэһиһиһи һөтүрһак, t дэһиһэиһи $0 < t < \frac{\pi}{2}$ парчасында дэһиһидиһиһи $0 < x < a$ оһур. $t=0$ олдугда $x=0$. $t = \frac{\pi}{2}$ олдугда һсэ $x = a \sin \frac{\pi}{2} = a$ оһур. Онда $dx = a \cos t dt$ вэ (3) дүстүрүна көрө:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4} \end{aligned}$$

Геһд. Теоремия бүтүһи һэртлэри һуһуһидур. Оһаарыһи һэр һансыһи һиһи өдөһиһиһиһиһи (3) дүстүрү доһру оһиһа билир. Бунһа көрө да теоремия бү-

түн шартларинин өдөниллигини жогламадин (3) дүстүрүнү татбиг етмөк ол-
маз. Мәселэн,

$$\int_0^{\pi} dx = \pi$$

барабарлигинин сол тарафиндеки интегралы

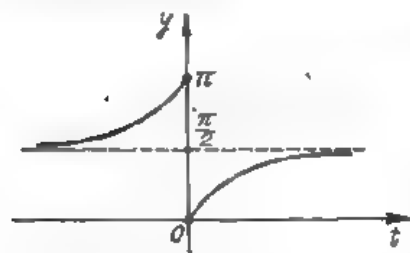
$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \tan^2 x)}$$

кимин жазарат, акырынкы интегралда $t = \tan x$ өзгөзмөсүнүн апарсаг ($\tan 0 = 0$, $\tan \pi = 0$)? онда

$$\pi = \int_0^{\pi} dx = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2}, \quad \pi = 0?$$

кимин ма'насыз барабарлик аларыг.

Бунун сәбәби одур ки, $t = \tan x$ ($0 < x < \pi$) барабарлигин илэ тә'йин олутан $x = \varphi(t)$ функцијасы кәсиландир (шәкил 198). Буна көрә дә теоремин шәрт-
ларин өдөниллирини (3) дүстүрүнү татбиг етмөк олмаз



Шәкил 198

III. Тәк вә чүт функци-
јанын симметрик парча
үзрә интегралы.

Тутаг ки, $f(x)$ функци-
јасы симметрик $[-a, a]$ пар-
часында тә'йин олунмуш
чүт функцијадыр, јә'ни x -ин
 $[-a, a]$ парчасындакы бү-
түн гүјмәтилериндә

$$f(-x) = f(x)$$

барабарлигин өдөнилер. һәмин функцијанын $[-a, a]$ парчасы
үзрә көтүрүлмүш интегралыны

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

кимин жазарат. Сағ тәрафдаки биринчи интегралда $x = -t$ өзгөзлө-
мөсүнүн апарсаг

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) dx &= - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = - \int_a^0 f(t) dt + \\ &+ \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

вә ја

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (4)$$

мүнәсибәтиники аларыг. Демәли, чүт функцијанын симметрик

парча үзрә интегралы, һәмин функцијанын парчанын јарысы
үзрә интегралынын ики мислине барабардир.

Инди фәрз едәк ки, $[-a, a]$ парчасында $f(x)$ тәк функци-
јадыр. Онда

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt + \\ &+ \int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(t) dt + \\ &+ \int_0^a f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

вә ја

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (5)$$

Мисал 4.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 2 \int_0^{\pi} \cos x dx = 2 [\sin x]_0^{\pi} = 0.$$

Мисал 5.

$$\int_{-a}^a x^{2n+1} dx = 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Мисал 6.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \sin x)^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \\ &= 2\pi + 2 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = 2\pi + 2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = 2\pi + \pi - \\ &- \int_0^{\pi} \cos 2x dx = 3\pi - \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

§ 10. ТЕЈЛОУ ДҮСТУРУ ГАЛЫГ ҺӘДДИНИН ИНТЕГРАЛ ШӘКЛИ

Фәрз едәк ки, $y = f(x)$ функцијасынын $x = a$ нөггәсини өз
дахилинә алаң һәр һансы интервалда $n+1$ тәртибли кәсилмәз
төрәмәси вардыр. Онда һәмин интервалда $f(x)$ функцијасы
үчүн

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (1)$$

Тејлоу дүстүру доғру олар.

Бу дүстүрү исбат етмэк үчүн

$$R(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (2)$$

интегралыны ардыңчыл оларак ниссә-ниссә интеграллајар:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n d[f^{(n)}(t)] = \frac{1}{n!} (x-t)^n f^{(n)}(t) \Big|_a^x + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t) \Big|_a^x + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t) dt = \\ &= -\frac{f^{(n)}(a)}{n} (x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \\ &+ \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x (x-t)^{n-2} d[f^{(n-2)}(t)] = \dots = \\ &= -\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + f(x) \end{aligned}$$

вә ја

$$R(x) = -\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + f(x).$$

Бурадан (1) дүстүрү алыныр.

(2) ифадәси Тејлор дүстүрү галыг һәддидикин интеграл шәкли адланыр. Тејлор дүстүрүнү (XVI, § 5) бир сыра мәсәләләрә тәтбиг едәркән, галыг һәддидикин интеграл шәклиндә кәтүрмәк чох вахт әлверишли олур.

§ II. МҮӘЈҖАН ИНТЕГРАЛЫН ТӘҒРИБИ ҺЕСАБЛАНМАСЫ

$[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функцијасынын ибтидан функцијасы $F(x)$ мә'лум олдуғда

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

интегралыны Нјутоу-Лејбнисия

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

дүстүрү илә һесабламағ олар. Ләкин кәсилмәјән функцијанын ибтидан функцијасынын һәмишә тапмағ мүмкүн олмур вә ја иб-

тидан функција гејри-элементар функција олур. Буна көрә дә (1) интегралыны тәҗриби һесабламағ ләзым кәлир.

Бир чох практик мәсәләләрин һәллиндә интегралалты функција анчағ чәдәәл шәклиндә верилир. Белә һалларда да (1) интегралы тәҗриби һесабланмалы олур.

Верилимиш мүәјјән интегралыны тәҗриби һесабланма дүстүруна *квадратур дүстүр* дејилир.

Мүәјјән интегралыны ән садә тәҗриби һесабланма дүстүрләры, ја ни квадратур дүстүрләры онун тәрифинә әсасән алыныр. Бу дүстүрләрын бир нечәсини бурада кәстәрәк.

$[a, b]$ парчасыны $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ($k=0, 1, \dots, n$) нөггәләри вәситәсилә n бәрәбәр ниссәјә ајырсағ, онда

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx. \quad (2)$$

I. *Дүзбучағлылар дүстүрү.* Јенә дә $[a, b]$ парчасыны $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ($k=0, n$) нөггәләри вәситәсилә n бәрәбәр ниссәјә бөләк вә $f(x)$ функцијасынын бу нөггәләрдәки гијәтләрни ујғун оларағ

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$$

илә ишара едәк. Бу һалда n -ин бәјүк гијәтләриндә

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx y_k \Delta x_k \quad (3)$$

тәҗриби бәрәбәрлијини кәтүрмәк олар. Бурада

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

(3) тәҗриби бәрәбәрликләрини тәрәф-тәрәфә топласағ, онда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \quad (4)$$

тәҗриби бәрәбәрлијини аларығ. Буна (1) мүәјјән интегралынын тәҗриби һесабланмасы үчүн *дүзбучағлылар дүстүрү* дејилир.

(3) тәҗриби бәрәбәрлији әвәзинә

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx y_{k+1} \Delta x_k, \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \Delta x_k$$

вә с. ким тәҗриби бәрәбәрликләр кәтүрсәк, онда *дүзбучағлылар дүстүрү* ујғун оларағ

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \quad (5)$$

ва с. кими олар.

(4) дүзбучагылар дүстүрүнүн сар тарафиндаки ифадэ $f(x)$ функциясинин интеграл чэмидир. Буна көрө дэ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k \right) = \int_a^b f(x) dx$$

олар. Демали, (4) дүзбучагылар дүстүрүнүн мүтлөг хэтасы

$$R_n = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k \right) \quad (6)$$

$n \rightarrow \infty$ шартиндэ сонсуз кичилэн кэмийетдир. Бунун тәртиби наггында нэ демек олар?

$f(x)$ функциясинин $[a, b]$ парчасында биртәртибли мөлдүд төрөмөсү олдулда

$$|R_n| < \frac{M_1(b-a)^2}{2n} \quad (7)$$

барабарсизлиги доғру олар. Бурада

$$M_1 = \sup_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

(7) барабарсизлигини исбат етмек үчүн Лагранж дүстүрүн-ден алынай

$$|f(x) - f(x_k)| = |f'(\xi)(x - x_k)| < M_1 |x - x_k|$$

барабарсизлигиндэн истифадэ елэк. Бу налда

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - y_k \Delta x_k \right| &= \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(x_k)] dx \right| < \\ < M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k) dx = \frac{M_1 (\Delta x_k)^2}{2} = \frac{M_1 (b-a)^2}{2n^2} \end{aligned}$$

олар. Онда (7) хэтасы үчүн төлөб олунан

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k \right) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - y_k \Delta x_k \right) \right| < \\ < \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - y_k \Delta x_k \right| < \frac{M_1(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{M_1(b-a)^2}{2n} \end{aligned}$$

дүстүрү алыныр.

II. Трапесијалар дүстүрү. Бу налда (3) эээни

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \Delta x_k \quad (8)$$

тәгриби барабарлиги көтүрүлүр. Бу тәгриби барабарликләри тәраф-тәрафа топламалла

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n] \quad (9)$$

тәгриби барабарлиги алыныр. Буна (1) иүәлән интегралынын тәгриби һесаблимәсы үчүн трапесијалар дүстүрү дејилир.

Трапесијалар дүстүрүнүн мүтлөг хэтасы наггында ашагы-дакы тәклифи сөйлөмөк олар:

$f(x)$ функциясинин $[a, b]$ парчасында икитәртибли мөлдүд төрөмәсү олдулда

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \Delta x_k \right| < \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \quad (10)$$

барабарсизлиги доғру олар. Бурада

$$M_2 = \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

(8) тәгриби барабарлиги $f_1(x) = Ax + B$ хәтте функцијасы үчүн дәгиг барабарлиге чеврилир. Бурадан адындыр ки, (9) трапесијалар дүстүрү хәтте функцијалар үчүн дәгигдир.

Бундан башга, n (бөлкү нөгтәләринин саны) артадыгча (9) тәгриби барабарлигини мүтлөг хэтасы азалыр, јәни һәмни тәгриби барабарлигин дәгиглиги артыр.

Гејд елэк ки, (10) барабарсизлиги (7) барабарсизлигини ис-бат едәркән апардыгымыз мүнәкинә ялэ исбат олунур.

III. Параболалар (ва ја Симпсон) дүстүрү. (1) интегралы-ны тәгриби һесаблимаг үчүн бу налда $[a, b]$ парчасыны

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

нөгтәләри наситәсилә $2n$ сәјдә барабәр һиссәләрә ајырырлар. Әввәлчә $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) парчасы үзрә көтүрүл-мүш

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx \quad (11)$$

интегралынын тәгриби гијметини һесаблијаг. Бу мәгсәдлә

$$F_k(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (12)$$

квәдрат үчһәдликсини (параболәсини) эисалларыны елэ сөһөм ки, онун графиги (x_{2k}, y_{2k}) , (x_{2k+1}, y_{2k+1}) ва (x_{2k+2}, y_{2k+2}) нөг-тәләриндән кечсин. Онда

$$\begin{aligned} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} F_k(x) dx &= \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6} [2A(x_{2k}^2 + x_{2k} \cdot x_{2k+2} + x_{2k+2}^2) + \\ &+ 3B(x_{2k} + x_{2k+2}) + 3C] = \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) = \\ &= \frac{b-a}{6n} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) \end{aligned}$$

олар. $F_k(x)$ функцијасынын $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ парчасында графиги

(парабола) $f(x)$ функцијасынын нәмин парчадыкы графикинә
јахын олдугундан

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x) dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+2}} P_k(x) dx$$

вә ја

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) \quad (13)$$

тәғриби бәрәбәрлијини алмағ олар. Бу тәғриби бәрәбәрликлә
ри тәрәф-тәрәфә топласағ,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) =$$

$$= \frac{b-a}{6n} [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})] \quad (14)$$

тәғриби бәрәбәрлијини аларығ. Буна мүәјјән интегралык тәғ-
риби һесаблинамасы үчүн параболалар дүстуру (вә ја Симпсон
дүстуру) дејиләр.

(14) параболалар дүстурунун мүтләғ хәтәси һағгында аша-
ғыдакы тәклиф мәлумдур:

$f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында дөрдтәртибли мән-
дуд төрмәск олдугда

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) \right| < \frac{M_4(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} \quad (15)$$

бәрәбәрсизлији доғру олар. Бурада

$$M_4 = \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

Бу бәрәбәрсизлики көстәрир ки, параболалар дүстуру интег-
ралалты $f(x)$ функцијасы хәтти $(Ax+B)$, квадратик $(Ax^2 +$
 $Bx+C)$ вә кубик $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ функција олдугда n -дән
әсылы олмәјарағ мүәјјән интегралык дәғиг гијмәтини верир.
Чүнки бу һалларда $f^{(4)}(x) = 0$, $M_4 = 0$ вә буна көрә дә (15)
бәрәбәрсизлијинә әсәсән $R_n = 0$ олар.

Әкәр мүәјјән интегралык параболалар дүстуру васитәсилә
« дәғиглији илә тәғриби гијмәтини таямағ лағымдырса, онда

$$\frac{M_4(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} < \epsilon$$

бәрәбәрсизлијиндән там n әдәди тапылыр:

$$n > \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180 \cdot 16 \cdot \epsilon}} \quad (16)$$

Сонра икә $[a, b]$ парчасыны $2n$ сәјдә бәрәбәр һиссәјә бә-

ләрәк $y_k (k=0, 1, \dots, 2n)$ кәмијјәтләри һесаблинар вә беләликлә
дә (14) дүстуру гурулуғ.

Мисал. $I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$ интегралыны Симпсон дүстуру васи-
тәсилә $\epsilon = 0,000005$ дәғиглији илә һесаблајағ.

(16) мүһәсәбәтиндән әддиңдәр ки, бу һалда $n=10$ көтүр-
мәк олар. Онда $2n=20$ вә $b-a=2$ олар. $y = e^{-x^2}$ функцијасы-
нын $x_k = k \cdot \frac{1}{10} (k=0, 1, 2, \dots, 19, 20)$ көгтәләриндәки гијмәт-
ләрини ашағыдакы хәдвәл шәклиндә јазар:

k	x_k	x_k^2	$y_k = e^{-x_k^2}$ гијмәтләри		
			$k=0$ иә $k=10$	k тәң олдугда	k чүт олдугда
0	0	0	1	0,99005	
1	0,1	0,01			0,96079
2	0,2	0,04		0,91393	
3	0,3	0,09			0,85214
4	0,4	0,16		0,77880	
5	0,5	0,25			0,69768
6	0,6	0,36		0,61263	
7	0,7	0,49			0,52729
8	0,8	0,64		0,44486	
9	0,9	0,81			0,36788
10	1,0	1,00		0,29820	
11	1,1	1,21			0,23693
12	1,2	1,44		0,18452	
13	1,3	1,69			0,14086
14	1,4	1,96		0,10540	
15	1,5	2,25			0,07730
16	1,6	2,56		0,05558	
17	1,7	2,89			0,03916
18	1,8	3,24		0,02705	
19	1,9	3,61	0,01832		3,00003
20	2,0	4	1,01832	4,41102	

Бурадан (14) дүстуруна әсәсән

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{30} (1,01832 + 4 \cdot 4,41102 + 2 \cdot 3,90003) = 0,88208$$

аларығ.

МҮЭҶҶАН ИНТЕГРАЛЫН ТӨТБИГЛЭРИ

§ 1. ИНТЕГРАЛ НЭЖЭ ЛАЗЫМДЫР?

Ријазијат елми чох гэдим дөврдэн јаранмаға башламышдыр. Ф. Енселс јазыр: „Бүтүн башга елмләр кими, ријазијат да инсанларын эмәли еһтијачларындан: торпаг саһәләрини вә габләрүн тутумуну өлчмәкдән, вахтын һесаблинамасындан вә механикадан эмәлә кәлмишдир.“¹

Ријазијатда јаранмыш илк методларла анчаг чох садә фигурларын саһәсини, садә әриләрин узунлуғуну, дүзкүн фигурларын һәчмини вә с. һесабламағ мүмкүн олурду. Бу заман һәмийн әри вә фигурларын хусуси хассәләриндән истифадә едилди. Ријазијаттын, физиканын, механиканын вә б. елмләрин инкишафыны исә бу тәмин едә билмәзди. Буна көрә дә гаршыја чыхан һәјати мәсәләләр һәлл етмәк үчүн үмуми методларын јаранмасына бөјүк еһтијач вар иди.

Квадратын, үчбұчағын вә с. саһәсини елементар һәндәсә методлары илә һесабламағ олур. Бәс ихтијари әри илә әһатә олунмуш фигурун саһәсини, ихтијари сәтһлә әһатә олунмуш чисмин һәчмини нечә һесабламағ олар?

Бүтүн бу мәсәләләр һәлл етмәк үчүн јаранам үмуми метод — интеграл һесабыдыр. Интеграл һесабы, јарандығы илк дөврдән мүстәғил, дифференциал һесабындан асылы олмадан инкишаф етмишдир. Сонралар (XVII—XVIII әсрләрдә) дифференциал вә интеграл һесабынын чох дәрин әлағәси кәшф едилмишдир ки, бу да ријазијат вә башга елмләрин сүр'әтлн инкишафына сәбәб олмушдур.

Мүасир ријазијаттын әсас аңлајышларындан бири олан мүәјјән интеграл ријазијатда вә бүтүн башга елм саһәләриндә кениш тәтбиг олунур. Саһә, һәчм, иш, сүр'әт, әрнини узунлуғу, әталәт моменти вә с. кими кәмијәтләр мүәјјән интеграл васитәсилә һесабланыр.

Мүәјјән интегралын тәтбиг олунмасынын әсас схеми беләдир: Тутаг ки, һәр һансы $[a, b]$ парчасы илә бағлы олак сабит A кәмијәткни һесабламағ ләзымдыр. $[a, b]$ парчасыны $[x_1, x_1 + \Delta x_1]$ кими кичик һиссәләрә ајырдыгда A кәмијәти дә ΔA_1 кими кичик һиссәләрә ајрылыр. Мәсәләнин шәртиндән вә диһәр вериләнләрдән истифадә едәрәк ΔA_1 үчүн тәғриби гијмәт тапылыр:

$$\Delta A_1 \approx q(x_1) \Delta x_1.$$

Онда ахтарылан кәмијәт үчүн

$$A \approx \sum_{i=1}^n q(x_i) \Delta x_i \quad (1)$$

¹ Ф. Енселс, „Анти-Дührинг“, Азәрнәшр, 1953, сәһ. 34.

тәғриби бәрәбәрлијини алмағ олур. Верилмиш 'парчаны даһа кичик һиссәләрә бөлдүкчә (1) тәғриби бәрәбәрлијинин хәтәсы азалыр вә нәтичәдә лимитә кечмәклә

$$A = \int_a^b q(x) dx \quad (2)$$

кими дәғиғ бәрәбәрлик алыныр.

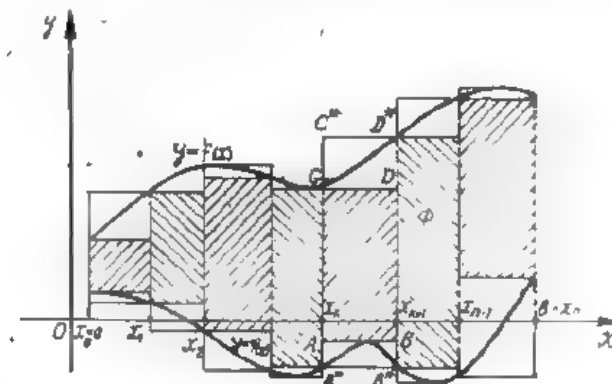
Бир даһа гејд етмәк ләзымдыр ки, ахтарылан A кәмијәти үчүн тапылан (1) гијмәти, үмумијәтлә, онун тәғриби гијмәтидир. Һәмийн бәрәбәрликдә лимитә кечдикдә исә хәтә кетдикчә азалыр вә нәтичәдә дәғиғ (2) гијмәти алыныр.

Буна көрә дә (1) тәминдән (2) интегралына кетмәк чох мүһүм әмәлијат олуб, мүәјјән интеграл аңлајышынын јаранмасына сәбәб олмушдур. Ријазијат тарихиндә дә белә олмуш вә „S“ чәм ишарәси (әввәлләр чәми „Summa“ (чәм) латын сөзүнүн биринчи S һәрфи илә ишарә едирдиләр) дәјишәрәк индики \int (интеграл) ишарәси шәклини алмышдыр.

§ 2. МҮСТӘВИ ФИГУРУН САҢӘСИ ВӘ ОНУН ДҮЗБҮЧАҒЛЫ КООРДИНАТ СИСТЕМИНДӘ ҺЕСАБЛАНМАСЫ

Тутаг ки, јухарыдан $y=f(x)$ әриси вә ашырыдан $y=\varphi(x)$ әриси ($\varphi(x) \leq f(x)$) илә вә јандардан $x=a$ вә $x=b$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш мүстәви фигуру верилмишдир (шәкил 199). $[a, b]$ парчасыны

$$T = T(a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b)$$



Шәк ил 199

пәғтәләри (T бөлкүсү) илә кичик $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) парчаларына ајырағ. $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функцијаларынын $[x_k, x_{k+1}]$ парчасында ән кичик вә ән бөјүк гијмәтләрини ујғун оларағ

$m_k(f)$, $m_k(\varphi)$, $M_k(f)$ вә $M_k(\varphi)$ илә ишарә едәк. Һәр бир $[x_k, x_{k+1}]$ парчасына уҗғун ики дүзбучаглы гуриаг олар:

I. $y = m_k(f)$, $y = M_k(\varphi)$, $x = x_k$, $x = x_{k+1}$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш $ABCD$ дүзбучаглылары. Бу дүзбучаглылар чызыгланмышдыр вә Φ фигурунун дахилиндә җерләшир.

II. $y = M_k(f)$, $y = m_k(\varphi)$, $x = x_k$, $x = x_{k+1}$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш $A^*B^*C^*D^*$ дүзбучаглылары. Бу дүзбучаглылар Φ фигурунун уҗғун һиссәсини өз дахилинә алыр.

Биринчи нөв дүзбучаглыларын сәһәләриниң чәмини

$$S_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} [m_k(f) - M_k(\varphi)] \Delta x_k \quad (1)$$

илә вә икинчи нөв дүзбучаглыларын сәһәләриниң чәмини

$$S_n^*(T) = \sum_{k=0}^{n-1} [M_k(f) - m_k(\varphi)] \Delta x_k \quad (2)$$

илә ишарә едәк. T белкүсүнүн параметри (XXII, § 1) $\lambda = \lambda(T)$ олсун.

Тә'риф. (1) вә (2) чәмләриниң $\lambda(T) \rightarrow 0$ шәртиндә бир-биринә бәрәбәр олан лимитләри варса, һәмим лимитә Φ фигурунун сәһәси деҗилир вә $S(\Phi)$ илә ишарә олунур:

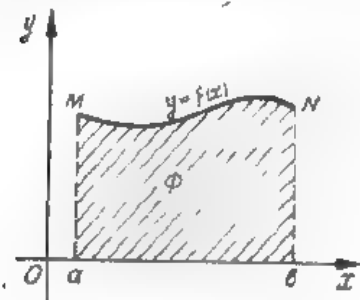
$$S(\Phi) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_n(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_n^*(T). \quad (3)$$

Сонду сәһәси олан мүстәви фигура квадратланап фигур деҗилир:

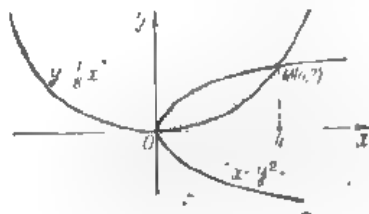
$[a, b]$ парчасында кәсилмәҗән $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функциялары һәмим парчада интегралланандыр (XXII, § 4). Буна көрә дә

$$S(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*(T) = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx \quad (4)$$

олар. $y = \varphi(x) = 0$ олдугда Φ фигуруна (шәкил 200) әҗрихәтли трапесија деҗилир.



Шәкил 200



Шәкил 201

(4) дүстуруна әсасән $aM.Nb$ әҗрихәтли трапесијасынни сәһәсини һесабламаг үчүн

$$S(\Phi) = \int_a^b f(x) dx \quad (5)$$

дүстуруну ($f(x) \geq 0$) аларыг.

Мисал 1. $y = \frac{1}{8}x^2$ вә $x = y^2$ параболалары илә әһатә олунмуш фигурун сәһәсини тапмалы (шәкил 201).

Шәкилдән аҗындыр ки, параболаларын кәсишмә нөктәләри $O(0, 0)$ вә $M(4, 2)$ олар. Онда (4) дүстуруна көрә

$$S = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{8}x^2 \right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{24}x^3 \right]_0^4 = \frac{8}{3}.$$

Верилмиш әҗрихәтли трапесијаны әһатә едән $y = f(x)$ ($x > 0$) әҗрисини параметрик шәкилдә верилмәкдә дә онун сәһәсини һесабламаг олар. Доғрудан да, тутар ки, $y = f(x)$ ($a < x < b$) функциясы

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (a < t < \beta)$$

параметрик шәкилдә верилмишдыр. Бурада $x = \varphi(t)$ функциясы монотондур, $[a, \beta]$ парчасында кәсилмәҗән төрәмәси вардыр вә $\varphi(a) = a$, $\varphi(\beta) = b$ бәрәбәрликләрини едәҗир. Онда (5) интегралында $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ әвәзләмәсини апарсар вә $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$ олдуғуну нәзәрә аласар,

$$S(\Phi) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) dt \quad (6)$$

олар.

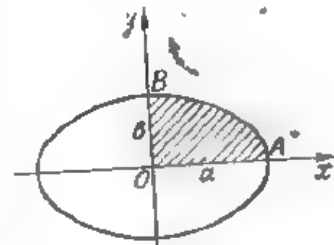
Мисал 2. Јарымохлары a вә b олан еллипслә әһатә олунмуш фигурун сәһәсини тапмалы.

Бу еллипсини (шәкил 202) параметрик тәнлији

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

шәкилдә јазиыр (XX, § 3). Еллипсини биринчи квадрантта җерләшән һиссәсини сәһәсини (6) дүстуру илә һесаблаҗар:

$$S_1 = \int_0^{\pi/2} y dx = - \int_0^{\pi/2} y(t) x'(t) dt = - \int_0^{\pi/2} b \sin t \cdot (-a \sin t) dt =$$



Шәкил 202

$$= + ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = + \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}.$$

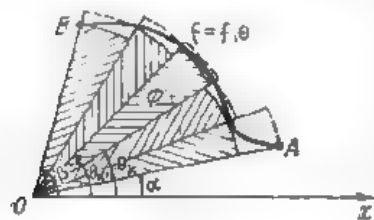
Бурадан эллипсін саһәси үчүн

$$S = 4S_1 = \pi ab$$

ифадәсини аларыг.

§ 3. ӘРИХӘТЛИ СЕКТОРУН САҺӘСИ

Мүстәви үзәриндә OA вә OB радиус-векторлары вә AB әриси илә һудудлаымыш Φ фигуруна баһаг (шәкил 203). Белә фигура мәркәзи координат башлангычында олан әрихәтли сектор дежилир.



Шәкил 203

Полјар координат системиндә AB әрисинин $r=f(\theta)$ ($\alpha < \theta < \beta$) тәнлији верилдикдә OAB әрихәтли секторунун саһәсини һесаблајаг.

Бу мәсәллә $[\alpha, \beta]$ парчасынын $T[\theta_0 = \alpha < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta]$ бөлкүсүнү көтүрәк вә $\theta = \theta_0 = \alpha, \theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots, \theta = \theta_n = \beta$ шәалары илә верилмиш сектору n һиссәә бөләк.

Тутаг ки, $r=f(\theta)$ функцијасы $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәјән-дир. $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ парчасында $f(\theta)$ функцијасынын ән кичик гијмәти m_k вә ән бөјүк гијмәти M_k олсун.

Инди, $\theta_k < \theta < \theta_{k+1}$ бутарында радиуслары $r=m_k$ вә $r=M_k$ олан ики даирәви сектор гураг. Бу даирәви секторларын саһәси, ујғун олараг

$$\frac{1}{2} m_k^2 \Delta \theta_k \text{ вә } \frac{1}{2} M_k^2 \Delta \theta_k \quad (\Delta \theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k)$$

олар. Онда биринчи нөв бүтүн даирәви секторларын (чызыгланымш вә Φ фигуру дахилиндә јерләшәнләрин) саһәләринин чәми

$$s_n(T) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \Delta \theta_k \quad (1)$$

вә икинчи нөв бүтүн даирәви секторларын саһәләринин чәми

$$S_n(T) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \Delta \theta_k \quad (2)$$

олар. T бөлкүсүнүн параметри $\lambda = \lambda(T) = \max |\Delta \theta_k|$ олсун.

Тә'риф. (1) вә (2) чәмләринин $\lambda(T) \rightarrow 0$ шәртиндә бир-биринә сәрабәр олан лимитләри варса, онда һәмим лимитә әрихәтли Φ секторунун саһәси дежилир.

$$S(\Phi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_n(T) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n(T).$$

(1) вә (2) чәмләри $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәјән $\frac{1}{2} [f(\theta)]^2$

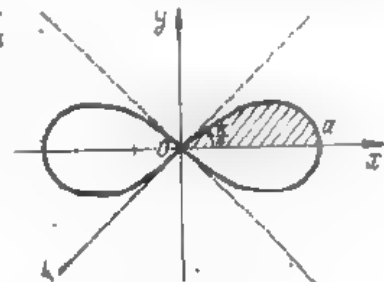
функцијасынын ујғун олараг ашагы вә јухары Дарбу чәмләри (XXII, § 4) олдуғундан

$$S(\Phi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s_n(T) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n(T) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

вә јә

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta.$$



Шәкил 204

Мисал. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ лемнискаты (XI, § 4) илә әһәтә олунмуш фигурун саһәсини һесабламалы (шәкил 204).

Шәкилдән ајдындыр ки,

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

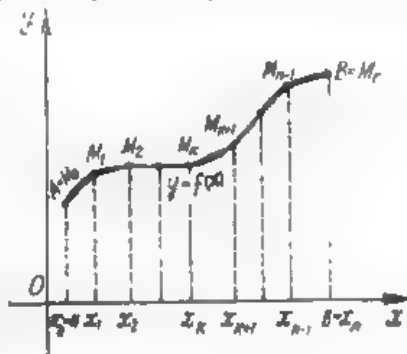
олар.

§ 4. ӘРИ ГӨВСҮНҮН УЗУНЛУҒУ

Тутаг ки, $\Gamma = (AB)$ мүстәви әриси дүзбучаглы координат системиндә $y=f(x)$ ($a < x < b$) тәнлији илә верилиншдир. $[a, b]$ парчасынын ихтијари

$$T = T(a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b)$$

бөлкүсүнә, әри үзәриндә, координатлары ујғун олараг x_k вә $y_k = f(x_k)$ ($k=0, 1, \dots, n$), олан $A = M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = B$ нөгтәләри ујғун олар (шәкил 205). Бу нөгтәләри ардычыл олараг дүз хәтт парчалары илә бирләшдирдикдә Γ әриси дахилинә чәкилмиш $M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-1} M_n$ сыныг хәтти



Шәкил 205

алыныр. Әринең $M_k M_{k+1}$ вәтеринин узунлуғу Δl_k илә ишарә едәк. Онда Γ әриси дахилия чәкилиш сыныг хәттин узунлуғу

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta l_k \quad (1)$$

олар. Сыныг хәттин ән бөјүк тәрәфинин узунлуғу λ олсун:

$$\lambda = \max(\Delta l_0, \Delta l_1, \dots, \Delta l_{n-1}).$$

Тәриф. Γ әриси дахилия чәкилиш сыныг хәттин узунлуғун $\lambda \rightarrow 0$ шәртиндә соңлу лимити варса, һәм Γ әриси соңлу узунлуғу әриси

$$l = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta l_k \quad (2)$$

лимитиә онун узунлуғу дејилер.

Һәмәр Γ әриси (XX, § 3) үчүн (јәни $f(x)$ функцијасы вә онун $f'(x)$ тәрәмәси $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән олдуғда) (2) лимити вар. Догрудан да, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ вә $\Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ олдуғуну нәзәрә аласаң,

$$\Delta l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k$$

олар. Лагранж теоремия әсасән

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = f'(\xi_k), \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$$

олдуғундан (1) чәми

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k$$

шәклиндә јазылыр. Бу ифадә $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функцијасынын интеграл чәмидир. Буна хәрә дә мәјән интегралын тәрифия әсасән

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

олар. Демәли, һәр бир һәмәр Γ әриси соңлу узунлуғу әриси

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (3)$$

дүстуру илә һесаблиныр.

Инди, фәрә едәк ки, һәмәр Γ әриси

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq \beta) \quad (4)$$

параметрик тәклиләри вәситәсилә верилишди (XX, § 3) вә $\varphi'(t)$ тәрәмәси $[\alpha, \beta]$ парчасында һеч јердә сыфра чәвилмир. Онда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

олдуғуну (XIV, § 10) нәзәрә аларың, (3) интегралында $x = \varphi(t)$ әвәзләмәсини ($a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$) алармағ олар.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2} \varphi'(t) dt = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Бурадан, (4) параметрик шәклиндә верилиш һәмәр Γ әриси узунлуғуну һесабламағ үчүн

$$l = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (5)$$

дүстуру алыныр.

Ејин мүнәкимә илә

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \gamma(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq \beta)$$

параметрик шәклиндә верилиш һәмәр Γ фәза әриси (XX, § 6) узунлуғуну һесабламағ үчүн

$$l = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\gamma'(t)]^2} dt \quad (6)$$

дүстуруна алмағ олар.

Мисал 1. R радиуслу чәврәнин (шәкил 206) узунлуғуну һесабламағ.

Чәврәнин параметрик тәклији

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

олдуғундан (5) дүстуруна әсасән алырың.

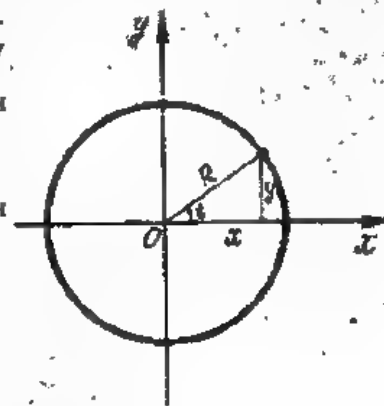
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt =$$

$$= R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

Шәкил 206

Мисал 2. Тәклилдә әриси (XX, § 3) бир будағынын узунлуғуну һесабламағ.



Бу әррини параметрик тәнлији

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

олдугундан (5) дүстуруна көрә алыры:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a.$$

Әррини тәнлији полјар координатларда $\rho = f(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) шәкинә вериддикдә, јенә дә онун тәнлијини

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta, \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

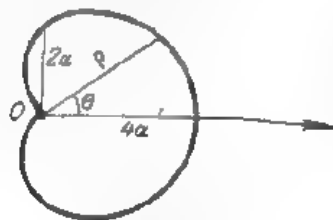
параметрик шәкилдә јазмаг олар (XX, § 3). Бу һалда

$$\begin{aligned} x'_\theta &= f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, \\ y'_\theta &= f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta \end{aligned}$$

олар вә (5) дүстурундан

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta \quad (7)$$

мүнәсибәти алыныр.



Шәкил 207

Мисал 3. $\rho = 2a(1 + \cos \theta)$ кардиоидә әррисини (шәкил 207) узунлуғуну һесабламагы.

Кардиоидә әрриси полјар оха нәзәрән симметрик олдугундан (7) дүстуруна көрә аларыг:

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^\pi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = \\ &= 4a \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = \\ &= 8a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 16a. \end{aligned}$$

(3), (5), (6) вә (7) дүстурларында интегралларын јухары сәрһәдини дәјишән көтүрмәклә гөвсүн узунлуғунун һәмин дәјишәнә нәзәрән төрәмәсини тапмаг олар. Догрудан дә, (3) дүстурунда интегралын јухары сәрһәдини x илә әвәз етдикдә гөвсүн узунлуғу x -ни функс. јасы олар:

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

(интеграллама дәјишәнн t илә әвәз едилмишдиг).

Бу интегралын јухары сәрһәдә нәзәрән төрәмәси вар:

$$\frac{dl(x)}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Буралан гөвс дифференциалынын мә'лум ифадәси (XX, § 6) алыныр:

$$dl(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (8)$$

Ејни мүнәкимә илә (5) вә (7) дүстурларындан гөвс дифференциалынын параметр вә полјар координатлар васитәсилә ашағыдакы мә'лум ифадәләри дә алыныр:

$$dl(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

$$dl(\theta) = \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta.$$

§ 5. ЧИСИМЛӘРИН НӘЧМИНИН ҺЕСАБЛАНЫМАСЫ

Тутаг ки, фәзада Q чисми веридмишдир. Бу чисмин, Ox охуна перпендикулјар олан мүстәвиләрлә кәсијини саһәси мә'лум олдугда, һәчмини һесабламаг олар. Q чисминин нөгтәләри абсисләрини эн кичији a , эн бөјүјү исә b олсун (шәкил 208).

Q чисминин $[a, b]$ парчасынын x нөгтәсиндә ($a \leq x \leq b$) Ox охуна перпендикулјар кечирилмиш мүстәви илә кәсијини саһәсини $S(x)$ илә ишәрә едәк. Фәрә едәк ки, $S(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында кәсимәјәндир.

Инди $[a, b]$ парчасынын истәнилән

$$T = T[a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b]$$

бөлкүсүнү көтүрәк вә $x = x_k$ ($k = \overline{0, n}$) бөлкү нөгтәләриндән Ox охуна перпендикулјар мүстәвиләр кечирәк. Бу мүстәвиләр Q чисминин лајлара бөлүр. Нәр бир лаја кичик бир цилиндр кими бахсаг, онда $[x_k, x_{k+1}]$ парчасына ујғун лајын отурачағынын саһәси $S(\xi_k)$ ($x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$), һүндүрлүјү $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ вә һәчми тәғрибән $S(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ әдәдиә барабәр олар.

Онда бүтүн цилиндрләри һәчми үчүн

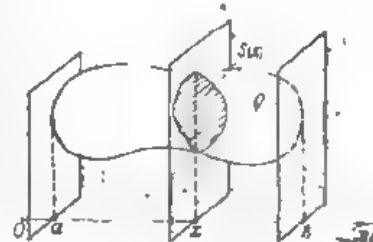
$$V_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k) \Delta x_k \quad (1)$$

ифадәсини аларыг. T бөлкүсүнүн параметрини $\lambda = \lambda(T)$ илә ишәрә едәк.

Тәғриф. (1) чәминин $\lambda(T) \rightarrow 0$ шәртиндә лимити варса, һәмин лимитә Q чисминин һәчми дејилир вә $V(Q)$ илә ишәрә едилир:

$$V(Q) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k) \Delta x_k. \quad (2)$$

Сонлу һәчми олан чисмә кубланан чисим дејилир.



Шәкил 208

(1) чөйи $S(x)$ функциясынын $[a, b]$ парчасынын истәйиләк T бөлүсүнә уйгун интеграл чөмидир. Буна көрә дә, (2) бара-барлигиндән мөһәҗәт интегралын тә'рифинә әсәсән Q чысикнин һәммин һесапламаг үчүн

$$V(Q) = \int_a^b S(x) dx \quad (3)$$

дүстуруну аларыг.

Әкәр Q чысик $y=f(x) > 0$ ($a < x < b$) әрисиини Ox оху әтрафында фырланмасындан алынмышса, онда онун Ox охуна перпендикуләр мүстәзиләрлә кәсикләри даираләр олар. Бу һалда

$$S(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$$

олар вә буна көрә дә (3) дүстурундан

$$V(Q) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (4)$$

алынар.

Хүсуси һалда, $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $f(x) > \varphi(x) > 0$ ($a < x < b$) әриләри вә $x=a$, $x=b$ дүз хәтләри илә әһәтә олунмуш фигурун Ox оху әтрафында фырланмасындан алынған чысикни һәммин

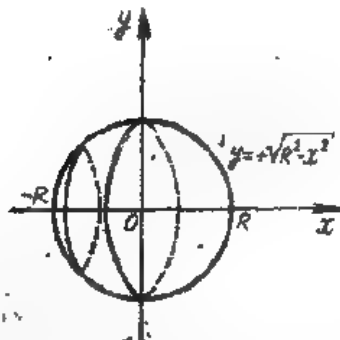
$$V(Q) = \pi \int_a^b [f^2(x) - \varphi^2(x)] dx \quad (5)$$

дүстуру илә һесаплавар.

Мисал 1. R радиусу күрәни һәммин һесапламалы.

Белә күрә, тәһлијә $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ ($-R \leq x \leq R$) олан R радиусу жарымчөврәни Ox оху әтрафында фырланмасындан алыныр (шәкил 209). Буна көрә дә, (4) дүстуруна әсәсән

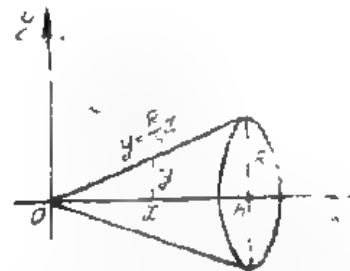
$$V(Q) = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \pi \frac{4R^3}{3}$$



Шәкил 209

Мисал 2. Нүндүрлү h вә отурачагынын радиусу R олан конусун һәммин һесапламалы.

Белә конус $y = \frac{R}{h} x$ ($0 \leq x \leq h$) дүз хәтт парчасынын Ox оху әтрафында фырланмасындан алыныр (шәкил 210). Демәли,



Шәкил 210

(4) дүстуруна көрә

$$V(Q) = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{h} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

§ 8. ФЫРЛАНМАДАН АЛЫНАН СӘТҺИН САҢӘСИ

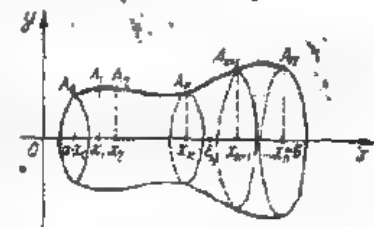
Фәрз едәк ки, $[a, b]$ парчасында тә'рин олунмуш $f(x)$ функциясы һәммин парчада кәсикләндәр вә кәсикләмәјән төрәмәси вардыр. $y=f(x)$ ($a < x < b$) әрисиини Ox оху әтрафында фырланмасындан алынған сәтһин саҢәсини һесаплајаг.

Бу мәгсәдлә $[a, b]$ парчасынын ихтијари

$$T = T[a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b]$$

бөлкүсүнү кәтүрәк. $x=x_k$ ($k=0, 1, \dots, n$) бөлкү нөгтәләринә әрри үзәриндә уйгун олан нөгтәләр $A_k[x_k, f(x_k)]$ ($k=0, 1, \dots, n$) олсун (шәкил 211). Бу нөгтәләри дүз хәтт парчалары илә бирләшдирдикдә $A_0 A_1 \dots A_n$ сыныг хәтти алыныр.

Һәммин сыныг хәттин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынған сәтһин саҢәси (кәсик конусларын јан сәтһләринин саҢәләри чөйи)



Шәкил 211

$$P_n(T) = 2\pi \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} l_k = \pi \sum_{k=0}^{n-1} (y_k + y_{k+1}) l_k \quad (1)$$

олар Бурада $y_k = f(x_k)$ ($k=0, 1, \dots, n$) вә

$$l_k = |A_k A_{k+1}| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2},$$

$$(k=0, 1, \dots, n-1).$$

Тә'риф. (1) чөйини $\lambda(T) \rightarrow 0$ шәртиндә лимити варса, һәммин лимитә сәтһини саҢәси дејилир вә $P(\sigma)$ илә ишарә едилир

$$P(\sigma) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} P_n(T) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (y_k + y_{k+1}) l_k \quad (2)$$

$$\lambda = \lambda(T) = \max(\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}).$$

Сәтһин саҢәси сонлу олдугда она квадратланы сәтһ дејилир.

Инди сәтһини саҢәсини һесаплајаг.

Лагранж дүстуруна (XVI, § 2) көрә

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(t_k) \Delta x_k, \quad t_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

олдугундан (1) ифадэсини

$$P_n(T) = \pi \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k = \\ = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k + \quad (3)$$

$+ \pi \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) - f(t_k)] + [f(x_{k+1}) - f(t_k)] \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k$
 кими жазмаг олар. Бу барабарлијин сағ тарафиндеки биринчи

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k$$

чэми $f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функциясывин интеграл чэмидир. Бу-
 на көрө дэ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (4)$$

олар. (3) барабарлијинин сағ тарафинде јерлэшэи икинчи һэд-
 диң $\lambda \rightarrow 0$ шәртинде лимитинин сыфра барабар олдуғуну ис-
 бат едэк.

$[a, b]$ парчасында кэсилмэјэн $f(x)$ функцијасы һэмин пар-
 чада мүнтэзэм кэсилмэјэн (XIII, § 10) олдуғундан, иктијари
 $\varepsilon > 0$ эдэди үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, $|f(T)| < \delta$ олдугда $|f(x_k) -$
 $- f(t_k)| < \varepsilon$ вэ $|f(x_{k+1}) - f(t_k)| < \varepsilon$ барабарсизликлэри өдэнилар.
 Онда

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) - f(t_k)] + [f(x_{k+1}) - f(t_k)] \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k \right| < \\ < 2M\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = 2M(b-a)\varepsilon \quad (M = \sup_{a \leq x \leq b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2})$$

олар ки, бу да (3) барабарлијинин сағ тарафиндеки икинчи
 һэддиң $\lambda \rightarrow 0$ шәртинде лимитинин сыфра барабар олдуғуну
 көстэрир.

Белэликлэ, (3) барабарлијинде $\lambda \rightarrow 0$ шәртинде лимитэ кеч-
 сэк, σ сәтһини саһэсини һесабламаг үчүн

$$P(\sigma) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (5)$$

дүстуруну аларыг.

Верилмиш әјри

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\} \quad (a \leq t \leq \beta)$$

параметрик тәликлэри илә верилдикдэ (5) дүстурундан исти-

фаде етмәклә онун ҫырланмасындан алынган сәтһини саһэсини
 һесабламаг олар. Бу мәғсәдлә һэмин дүстурла $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$,
 $y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ жазмаг лазымдыр. Онда

$$P(\sigma) = 2\pi \int_a^\beta \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (6)$$

олар.

Мисал 1. R радиуслу сфера сәтһини саһэсини һесабла-
 малы.

Белә сфера R радиуслу јарымчеврәнини Ox оху әтрафында
 ҫырланмасындан алыныр. Јарымчеврәнини параметрик тәлијини

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos t, \\ y &= R \sin t \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

кими јазылыр. Онда (6) дүстуруна әсәсән

$$P(\sigma) = 2\pi \int_0^\pi R \sin t \cdot \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \\ = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin t dt = 2\pi R^2 (-\cos t) \Big|_0^\pi = 4\pi R^2$$

аларыг.

Мисал 2. $\rho = 2a(1 + \cos \theta)$ кардионда әјрисиниң (§ 4, шәкил
 207) полјар ох әтрафында ҫырланмасындан алынган сәтһини са-
 һэсини һесабламамы.

Кардионда әјрисиниң полјар охун јухары тарафинде јерлә-
 шән һиссәсиниң тәлијини

$$\left. \begin{aligned} x &= 2a(1 + \cos \theta) \cos \theta, \\ y &= 2a(1 + \cos \theta) \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

кими жазмаг олар. Онда (6) дүстуруна көрә

$$P(\sigma) = 8\pi a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta) \sin \theta \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = \\ = 64\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4 \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{128}{5} \pi a^2$$

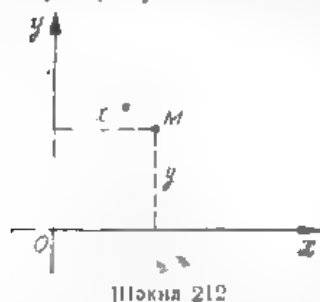
аларыг.

§ 7. МАДДИ НӨГТӘЛӘР СИСТЕМИНИН СТАТИК МОМЕНТИ ВӘ АҒЫРЛЫҒ МӘРКӘЗИ

Тутаг ки, Ox мүстәвиси үзәринде јерләшән вә күтләси m
 олан M мадди нөгтәси верилмишдир.

Мадди нөгтә нәдир? Мү.]] и күтләси олуб, һәндәси өлчү-
 ләри чох кичик олан һәр бир чисим (һиссәчик) ријазийәтда
 мадди нөгтә kimi көтүрүлүр. Үмумийәтлә, бир чисини бүтүн
 күтләсини бир нөгтәдә јығылмыш (чәмләнмиш) һесап етмәк
 мүмкүн олдугда, ону мадди нөгтә һесап едирләр.

Мадди M нөгтөснийн хэр хансы оха нэээрэн статик моменти онун күтлэси илэ хэмийн охдан олан мөсөфэснийн хасилинэ барабардир. Демэлж, M нөгтөснийн Ox вэ Oy охларына нэээрэн статик моменти уугун оларат tu вэ tx олар (шэкил 212).



Шэкил 212

Инди Oxy мөстөвсисиндэ жерлэшэн вэ күтлэлэри уугун оларат m_1, m_2, \dots, m_n олан $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ мадди нөгтөлөр системи көтүрөк. Мадди нөгтөлөр системийн хэр хансы оха нэээрэн статик моменти системийн бүтүн нөгтөлөрнийн хэмийн оха нэээрэн статик моментларинийн чөмийнэ дежилир. Бурадан айдандыр ки, верилмиш нөгтөлөр системийн Ox вэ Oy охларына нэээрэн статик моментлэри уугун оларат

$$C_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad C_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k \quad (1)$$

олар. Бурада C_x вэ C_y илэ верилмиш мадди нөгтөлөр системийн уугун оларат Ox вэ Oy охларына нэээрэн статик моментлэри ишарэ олуиушдур.

Верилмиш $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ мадди нөгтөлөр системийн ағырлыг мөркөзийн $A(x_A, y_A)$ илэ ишарэ едэж. Механикадан мө'лумдур ки, мадди нөгтөлөр системийн ағырлыг мөркөзийн x_A вэ y_A координатлары

$$x_A \cdot \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad y_A \cdot \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_k y_k$$

барабарликлэрини едэжир. Бурадан верилмиш мадди нөгтөлөр системийн ағырлыг мөркөзийн координатларыны тэ'йи етмөк үчүн

$$x_A = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_A = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$

дүстурларыны ааврыг.

§ 8. МАДДИ ЭҮРИНИН СТАТИК МОМЕНТИ ВЭ АҒЫРЛЫГ МӨРКӨЗИ

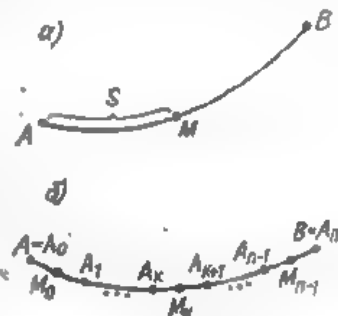
Фэрэ едэж ки, Oxy мөстөвсис үзэриндэ жерлэшэн вэ мадди нөгтөлөрдөн ибарэт олан кэснлмөз AB эҮрисн верилмишдир. ЭҮрини вайлд узунлугунда олан гөвсүнүн күтлэсинэ хатти сыхлыг дежилир вэ ρ илэ ишарэ олуиур.

Тутар ки, AB эҮрисн сонлуузунлугу эҮридир вэ онун үзэриндэки иктиҮари $M(x, y)$ нөгтөснийн вэзиҮэти AM гөвсүнүн s узунлугу илэ тэ'йи олуиур (шэкил 213, а). Бу халда хэмийн эҮринин параметрик тэвлиҮи

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s) \end{cases} \quad (0 \leq s \leq S) \quad (1)$$

кими жазылар (XX, § 3). Бурада $S = \text{узунлуг } AB$. Онда эҮрини M нөгтөсиндэ хатти сыхлыгы де AM гөвсүнүн узунлугунда асылы олар, жэ'ки $\rho = \rho(s)$ олар.

Мадди AB эҮрисини бүтүн нөгтөлөриндэ хатти сыхлыг еҮни олдугда она бирчынсли эҮри, эис халда исэ бирчынсли олмаҮан эҮри дежилир.



Шэкил 213

Инди бирчынсли олмаҮан мадди AB эҮрисини координат охларына нэээрэн статик моментларини вэ ағырлыг мөркөзийн координатларыны тэ'йи едэж. Бу мөсөдлэ AB эҮрисини $A = A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \dots, A_n(x_n, y_n) = B$ нөгтөлэри илэ n хиссэҮэ бөлөк (шэкил 213, б)). Буна уугун оларат $[0, S]$ парчасы да n хиссэҮэ бөлүнөт:

$$T(s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < s_n = S)$$

вэ

$$x_k = x(s_k), \quad y_k = y(s_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Онда $A_k A_{k+1}$ гөвсүнүн узунлугу $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$ олар. Бу гөвс үзэриндэ бир $M_k(x_k^*, y_k^*)$ нөгтөси көтүрөк ($x_k^* = x(s_k^*), y_k^* = y(s_k^*), s_k < s_k^* < s_{k+1}$) вэ фэрэ едэж ки, $A_k A_{k+1}$ гөвсүнүн бүтүн нөгтөлөриндэ сыхлыг еҮни олуб, M_k нөгтөсиндэки $\rho = \rho(s_k^*)$ сыхлыгы барабардир. Бу халда мадди $A_k A_{k+1}$ гөвсүнүн күтлэси тэҮрибэн $m_k \approx \rho(s_k^*) \Delta s_k$ ифадэсинэ барабар олар. Инди хэр бир мадди $A_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) гөвсү күтлэсини уугун $M_k(x_k^*, y_k^*)$ нөгтөсиндэ чөмлөндиҮини тэсэвүр едэж. Онда мадди AB эҮрисини Ox вэ Oy охларына нэээрэн статик моментлэри уугун оларат эввэлки параграфдакы (1) дүстурларына эсэсэн

$$C_x \approx \sum_{k=0}^{n-1} y(s_k^*) \rho(s_k^*) \Delta s_k, \quad C_y \approx \sum_{k=0}^{n-1} x(s_k^*) \rho(s_k^*) \Delta s_k$$

тэҮриби барабарликлэри илэ тэ'йи олуиар. Бу барабарликлэри

ларин сөг тэрэфиндэки чэмлэр $y(s)$ $\mu(s)$ вэ $x(s)$ $\mu(s)$ функциаларын $[0, S]$ парчасындагы утгун интеграл чэмидир, һэмни барабэрликлэрдэ $\lambda = \lambda(T) \rightarrow 0$ шэртиндэ лимитэ кечсэк, мүүжэи интегралын тэрифинэ эсасэн

$$C_x = \int_0^S y(s) \mu(s) ds, \quad C_y = \int_0^S x(s) \mu(s) ds \quad (2)$$

дүстурларыны аларыг.

Мадди $M_k(x_k^*, y_k^*)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) нөгтэлэри системин ағырлыг мэркэзинин координатлары исэ

$$x_k^* = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x(s_i^*) \mu(s_i^*) \Delta s_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \mu(s_i^*) \Delta s_i}, \quad y_k^* = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} y(s_i^*) \mu(s_i^*) \Delta s_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \mu(s_i^*) \Delta s_i}$$

барабэрликлэри илэ тэжин олунар. Бу барабэрликлэрдэ $\lambda(T) \rightarrow 0$ шэртиндэ лимитэ кечсэк, мадди AB эрисиин ағырлыг мэркэзинин координатларыны тэжин етмэк үчүн

$$x_A = \frac{\int_0^S x(s) \mu(s) ds}{\int_0^S \mu(s) ds}, \quad y_A = \frac{\int_0^S y(s) \mu(s) ds}{\int_0^S 1(s) ds} \quad (3)$$

дүстурларыны аларыг.

Хүсуси һалда, мадди AB эриси бирчинсли олдулда, јэни $\mu(s)$ μ сабит олдулда, (3) дүстурлары ашағыдакы кими садэ шэкилдэ јазылар:

$$x_A = \frac{1}{S} \int_0^S x(s) ds, \quad y_A = \frac{1}{S} \int_0^S y(s) ds. \quad (4)$$

Бу һалда мадди AB эрисиин ағырлыг мэркэзинин координатлары эрисиин сыхлыгындан асылы олмур

Демэли, мадди AB эриси бирчинсли олдулда онун ағырлыг мэркэзинин координатлары јалпыз эрисиин һэндэси хассэлэриндэн асылыдыр (сыхлыгындан исэ асылы дејилдир).

Экэр AB эрисиини тэнлији $y=f(x)$ ($a < x < b$) шэкилдэ верилсэ, онда $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ олдуғуну (XX, § 6) нээ-

рэ алараг, (4) дүстурларыны

$$x_A = \frac{1}{S} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \\ y_A = \frac{1}{S} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (5)$$

кими јазмаг олар.

§ 9. МАДДИ МҮСТӘВИ ФИГУРУН СТАТИК МОМЕНТИ ВЭ АҒЫРЛЫГ МЭРКӘЗИ

Мүүжэи күтлэси олан чох назик (вэ галыныгы сабит олан) лөвһә рижизилатда *мадди мүстәви фигур* һесап едилир. Бу фигурун бир сәһи өлчүсү ваһидинэ дүшән күтлэсинэ онун *сәһи сыхлыгы* дејилир вэ μ илэ ишәргә олуноу.

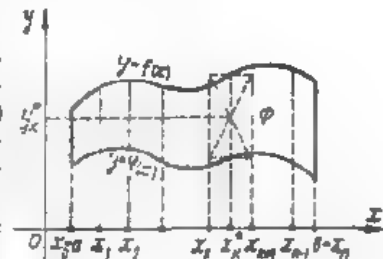
Тутаг ки, $[a, b]$ парчасында кэсилмәјән $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ ($\varphi(x) < f(x)$) эјрилэри вэ $x=a$, $x=b$ ($a < b$) дүз хәтлэри илэ эһәтә олуноуш Φ бирчинсли (јәни сәһи сыхлыгы сабит олан) мадди мүстәви фигуру верилмишдир. Бу фигурун статик моментини вэ ағырлыг мэркэзини һесапламаг үчүн ону $x=x_k$ ($k=0, 1, \dots, n$, $x_0=a$, $x_n=b$) дүз хәтлэри васитәсилә n золағә ајыраг (шәкил 214). Золағлар чох кичик олдулда онлары тәгриби оларәг дүзбучағлыларла эвәз етмэк мүмкүндүр. Мәсәлән, k -чы золағи отүрчәғи $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ вэ һүндүрлүҗү $f(x_k^*) - \varphi(x_k^*)$ олан ($x_k^* = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$) дүзбучағлы илэ эвәз едәк. Онда k -чы дүзбучағлынын күтлэси

$$m_k = \mu [f(x_k^*) - \varphi(x_k^*)] \Delta x_k$$

вэ ағырлыг мэркэзинин (механикадан мәлүмдүр ки, дүзбучағлынын ағырлыг мэркэзи онун диагоналарынын кәсишмә нөгтәсидир) координатлары

$$x_k^* = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad y_k^* = \frac{1}{2} [\varphi(x_k^*) + f(x_k^*)]$$

олар. Фәрз едәк ки, k -чы дүзбучағлынын күтлэси онун (x_k^* , y_k^*) ағырлыг мэркэзиндә јерләшир. Онда k -чы золағын Ox вэ



Шәкил 214

Оу охларына нэээрэн статик моментлэри ујгуи оларат

$$\mu [f(x_k^*) - \varphi(x_k^*)] \Delta x_k = \frac{1}{2} [\varphi(x_k^*) + f(x_k^*)] \Delta x_k \\ = \frac{\mu}{2} [f^2(x_k^*) - \varphi^2(x_k^*)] \Delta x_k$$

вэ

$$\mu [f(x_k^*) - \varphi(x_k^*)] \Delta x_k \cdot x_k^*$$

олар. Бу нфадэлэрин һэр биринни, k -нын $0, 1, \dots, n-1$ ги-мэтлэринэ ујгуи гијмэтлэрини ајрылыгда топласаг, Φ фигурунун Ox вэ Oy охларына нэээрэн статик моментлэрини ујгуи таг-риби гијмэтлэрини аларыг:

$$M_x \approx \frac{1}{2} \mu \sum_{k=0}^{n-1} [f^2(x_k^*) - \varphi^2(x_k^*)] \Delta x_k \quad (1)$$

вэ

$$M_y \approx \mu \sum_{k=0}^{n-1} x_k^* [f(x_k^*) - \varphi(x_k^*)] \Delta x_k. \quad (2)$$

(1) бэрэбэрлијиний сағ тэрэфиндэки чэм $[f^2(x) - \varphi^2(x)]$ функцијасынын $[a, b]$ парчасынын

$$T = T[a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b]$$

бөлкүсүнэ ујгуи интеграл чэми, (2) бэрэбэрлијиний сағ тэрэ-финдэки чэм исэ $x [f(x) - \varphi(x)]$ функцијасынын интеграл чэмидир. Онда $\lambda(T) \rightarrow 0$ шэртиндэ (1) вэ (2) бэрэбэрликлэрин-дэ лимитэ кечсэк, Φ фигурунун Ox вэ Oy охларына нэээрэн статик моментлэрини һесабламаг үчүн

$$M_x = \frac{1}{2} \mu \int_a^b [f^2(x) - \varphi^2(x)] dx, \quad (3)$$

$$M_y = \mu \int_a^b x [f(x) - \varphi(x)] dx \quad (4)$$

дүстурларыны аларыг.

Φ фигурунун күтлэси онун сыхлыгы илэ саһэсиний һаси-лнэ бэрэбэрдир:

$$m = \mu \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx = \mu \cdot S(\Phi). \quad (5)$$

Механикадан мә'лумдур ки, Φ фигурунун ағырлыг маркэ-зиний координатлары (x_A, y_A) , күтлэси m вэ статик момент-лэри (M_x, M_y) арасында

$$x_A \cdot m = M_y, \quad y_A \cdot m = M_x$$

мүнасибэтлэри вардыр. Бурадан, (3), (4) вэ (5) бэрэбэрликлэ-ринэ әсасән, Φ фигурунун ағырлыг маркэзиний координатлары үчүн

$$x_A = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{S(\Phi)} \int_a^b x [f(x) - \varphi(x)] dx, \quad (6)$$

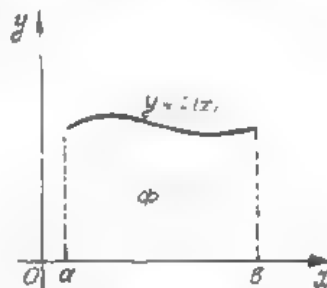
$$y_A = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{2S(\Phi)} \int_a^b [f^2(x) - \varphi^2(x)] dx \quad (7)$$

дүстурларыны аларыг.

Хүсуси һалда, Φ фигуру јухарыдан $y = f(x)$ ($a < x < b$) әјриси илэ, јанлардан исэ $x = a$, $x = b$ дүз хэтлэри илэ аһатэ олунмуш әјрихэтли трапесија оларса (шәкил 215), онда (6) вэ (7) дүстурлары ашағыдакы кими јазылар:

$$x_A = \frac{1}{S(\Phi)} \int_a^b x f(x) dx = \\ = \frac{1}{S(\Phi)} \int_a^b x y dx,$$

$$y_A = \frac{1}{2S(\Phi)} \int_a^b f^2(x) dx = \\ = \frac{1}{2S(\Phi)} \int_a^b y^2 dx.$$



Шәкил 215

§ 10. КҮЛДЕН ТЕОРЕМЛЭРИ

Мә'лумдур ки, тәнлији $y = f(x)$ ($a < x < b$) олан \overline{AB} әјри-синий Ox оху әтрафында фырланмасындан алынган сәтһиний саһэси

$$P(a) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

дүстуру илэ һесабланыр (§ 6). Бу бэрэбэрлији § 8-дә исбат стдијиниз (5) дүстурларынын икинчиси

$$y_A = \frac{1}{S} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

илэ мүгајисә етсәк,

$$S \cdot 2\pi y_A = P(a) \quad (1)$$

мүнасибәтиний аларыг. Бурада y_A илэ бирчинсиз \overline{AB} әјрисиний ағырлыг маркэзиний ординаты, S илэ исэ \overline{AB} әјрисиний узунлуғу ишарә олунмушдур.

(1) бэрэбэрлији ашағыдакы теоремин доғрулуғуну кестәрнр Күлденин¹ биринчи теоремин. Мүстәзи әјрисиний, ону и һасаләт ох әтрафында фырланмағындан алынган сәтһиний саһэси, һәмкә әјрисиний узунлуғу илэ онун ағыр-

¹ Пауль Күлден (1577, 163) Исвәчәријәттијатисилар.

лыг жоркөзүнүн чыадыгы чөвөнүн узунлугу жасилина барабардир.

Мисал 1. $x^2 + y^2 = R^2 (y > 0)$ жарымчөврасинин агырлыг мэркөзинин координатларыны тапмалы.

(1) дүстурундан истифадэ етсэк вэ $S = \pi R^2$, $P(a) = 4\pi R^2$ олдуғуну нэзэрэ алсаг

$$y_A = \frac{4\pi R^2}{2\pi \cdot \pi R} = \frac{2}{\pi} R$$

олар. $x_A = 0$ олмасы исе верилинш жарымчөврасинин Оу охуна нэзэрэн симметрик жерлөшмөсиндэн айдандыр.

Инди фырланма чисминин бөчмө үчүн § 5-дэ исбат етди-
жилэ (5) дүстуруну

$$V(\cdot) = \pi \int_0^b [f^2(x) - \varphi^2(x)] dx$$

вэ эввэлки параграфда чыхарилыш (7) дүстуруну

$$y_A = \frac{1}{2S(\Phi)} \int_0^b [f^2(x) - \varphi^2(x)] dx$$

мүгајисэ едэк. Бурадан

$$V(\cdot) = 2\pi y_A \cdot S(\Phi) \quad (2)$$

мүнәсибәти алыныр. Демәли, ашагыдакы теорем доғрудур:

Күддөниң икинчи теорем. *Мүстаеи фигурун, ону кәс-
жөтөн ох өтрафында фырланмасындан алынган чисмин
бөчмө, бөчмө фигурун сандеси илэ онун агырлыг жор-
көзүнүн чыадыгы чөвөнүн узунлугу жасилина бара-
бардир.*

Мисал 2. $x^2 + y^2 < R^2 (y > 0)$ жарымдаңрасинин агырлыг
мэркөзинин координатларыны тапмалы.

Жарымдаңра Оу охуна нэзэрэн симметрик жерлөшдидиндэн
онун (x_A, y_A) агырлыг кэркөзи һәмни ох үзәриндэ олар. Де-
мәли, $x_A = 0$, y_A эдәдини исе (2) барабарлијиндән тапаг $S(\Phi) =$

$$= \frac{1}{2} \pi R^2 \text{ вэ } V(\cdot) = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ олдуғундан}$$

$$y_A = \frac{V(\cdot)}{2\pi S(\Phi)} = \frac{4}{3\pi} R.$$

§ II. МҮЭЛҖЭН ИНТЕГРАЛ ВАСИТӘСИЛӘ ЧӨМЛӨРИН
НЕСАБЛАЙМАС

Тутаг ки, $y = f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында интеграл-
ланган функцијалар. $[a, b]$ парчасыны $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ($k = 0,$

$1, \dots, n$) нөгталәри васитәсилә n барабар һиссәјә бөләк вэ
 $f(x)$ функцијасы үчүн

$$J_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

кини интеграл чөми дүзәлдәк.

Мүәлјән интегралын тәрифинә эсасән

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_a^b f(x) dx$$

вэ ја

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

олар. Бурада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

олдуғуну нэзэрэ алсаг, (1) барабарлијини

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

кини јазмаг олар.

(1) вэ (2) барабарликләриндән истифадэ еләрәк бир сыра
чөмләрин лимитини һесабламаг олар.

Мисал 1. Ашагыдакы лимити һесабламалы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^T + 3^T + \dots + n^T}{n^{T+1}} \quad (T > 0).$$

(1) барабарлијиндә $a = 0$, $b = 1$ вэ $f(x) = x^T$ һесаб етсән.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})}{n} = \int_0^1 x^T dx = \frac{1}{T+1}$$

вэ ја

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^T + 3^T + \dots + n^T}{n^{T+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^T + \dots + (n-1)^T}{n^{T+1}} = \frac{1}{T+1}$$

алыныр. Хүсуси һалда,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} [1 + 2 + \dots + n] = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [1 + 2^2 + \dots + n^2] = \frac{1}{3}.$$

Мисал 2. Ашагыдакы лимити һесабламалы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$$

(1) дүстурунда $a = 0$, $b = \pi$ вэ $f(x) = \sin x$ һесаб етсәк.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}$$

вэ |а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right] = 0.$$

XXIV ФАСИ

ГЕЈРИ-МЭХСУСИ ИНТЕГРАЛЛАР

§ 1. МҮЭЛЖЭН ИНТЕГРАЛЫН ҮМУМИЛЭШМЭСИ

Верилмш $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында мүүжэн интегралы тэјин едилэркэл $[a, 1]$ парчасынын сон. у. вэ $f(x)$ функцијасынын мөндүд олмасы тэлөб олунур (XXII, § 1, § 3). Интеграллама парчасы гејри-мөндүд олдугда ону сонлу сәјда $\{x_k, \tau_{k+1}\}$ кими сонлу ниссаләрә бөләрәк,

$$J_n(\Gamma) = \sum_{k=0}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (1)$$

интеграл чәинин дүзәлтмәк мүмкүн дејилдир. Әкәр сонсуз парчаны сонлу сәјда ниссәјә бөлсәк, онда бу ниссәләрин һеч олмасы биринин узунлуғу сонсуз олар. Бу һалда (1) чәи сонсузлуға чевриләр вэ буна кәрә дә һәмин чәин лимити сонлу ола билмәз. $[a, b]$ парчасы сонлу олуб, $f(x)$ функцијасы һәмин парчада гејри-мөндүд олдугда да дүзәлдилән (1) интеграл чәи гејри-мөндүд олар. Бу һалда да, (1) интеграл чәинин лимити сонлу ола билмәз. Башға сөзлә, $f(x)$ функцијасынын сонлу $[a, b]$ парчасында мүүжэн интегралынын варлығы үчүн һәмин парчада мөндүд олмасы зәрури шәртдир (XXII, § 1).

Бунула белә, бир чох мәсәләләрдә мүүжэн интегралын сонсуз областлар вэ гејри-мөндүд функцијалар үчүн үмумиләшмәси тәләб олунур. Белә үмумиләшмә исә бир чох һалларда мүмкүндүр.

Мүүжэн интегралын сонсуз областлар вэ гејри-мөндүд функцијалар үчүн үмумиләшмәси олан интеграллара гејри-мәхсуси интеграллар дејилр. Гејри-мәхсуси интеграллар ики нөв олур: сонсуз сәрһәдли интеграллар вэ гејри-мөндүд функцијаларын интегралы.

§ 2. СОНСУЗ СӘРҺӘДЛИ ГЕЈРИ-МЭХСУСИ ИНТЕГРАЛЛАР

Тутаг ки, $y = f(x)$ функцијасы $[a, +\infty)$ областында тәјин олунмуш вэ истәнилән сонлу $[a, 1]$ ($N > a$) парчасында интегралланан функцијадыр. Онда истәнилән N үчүн

$$J(N) = \int_a^N f(x) dx \quad (1)$$

интегралы сонлудур вэ $N \rightarrow +\infty$ шәрткидә онун лимитиндән данышмағ олар.

Тә’риф. Әкәр сонлу

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N f(x) dx \quad (2)$$

лимити варса, онда һәмин лимитә $f(x)$ функцијасынын $[a, +\infty)$ областында гејри-мәхсуси интегралы дејилр вэ

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N f(x) dx \quad (3)$$

кими ишарә олунур. Бу һалда, јә’ни (2) лимити сонлу олдугда $f(x)$ функцијасына $[a, +\infty)$ областында гејри-мәхсуси мә’нада интегралланан (вэ |а интеграллана билән) функција дејилр.

(2) лимити варса, онда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ гејри-мәхсуси инте-

гралы јығылан, әкә һалда, јә’ни (2) лимити олмадыгда исә һәмин гејри-мәхсуси интеграл дағылан адланыр.

Мисал $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ ($a > 0$) гејри-мәхсуси интегралы $\lambda > 1$ ол-

дугда јығылан, $\lambda < 1$ олдугда исә дағыландыр. Доғрудан да, $\lambda > 1$ олдуғға

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \right]_a^N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{1}{N^{\lambda-1}} - \frac{1}{a^{\lambda-1}} \right) = \frac{1}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{a^{\lambda-1}}$$

вэ |а

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{a^{\lambda-1}}$$

олар. $\lambda < 1$ олдугда исә гејри-мәхсуси интегралын дағылан олмасы ашағыдакы мүнәсибәтләрдән ајдындыр:

$\lambda = 1$ олдугда

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N \frac{dx}{x} = \lim_{N \rightarrow +\infty} [\ln N - \ln a] = +\infty,$$

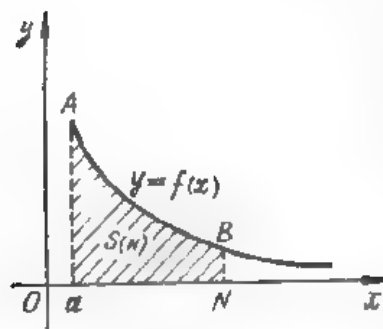
$\lambda < 1$ олдугда

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\lambda} (N^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}) = +\infty.$$

$y = f(x) > 0$ ($a < x < +\infty$) олдугда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ гејри-мәхсуси

интегралыны хэндэси оларат сонсуз узун эрхэтлн трапеси-
яанын $(x, y) | a < x < \infty, 0 < y < f(x) |$ сахэси хесаб етмэк
олар (шэкил 216). Догрудан да, $a PBN$ эрхэтлн трапеси-
яанын сахэси

$$S(N) = \int_a^N f(x) dx \quad (4)$$



Шэкил 216

олар. $N \rightarrow +\infty$ шэртиндэ (4)
интегралыны лимити олса,
ондэ хэмийн лимити сонсуз
узун эрхэтлн трапеси-
яанын сахэси хесаб етмэк олар ки,
бу да гејри-мэхсуси

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N f(x) dx$$

интегралы илэ ифадэ олукур.
 $N \rightarrow +\infty$ шэртиндэ (4) ифадэ-
скиин лимити ки олмассы
хэмийн сонсуз узун эрхэтлн
трапеси-яанын сахэсини сон-
суз олдуғууу, йэ'ни сонлу сахэ-

сини олмадыгыны кестэрир. Бу халда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ гејри-мэхсуси ин-
тегралы дағыландыр.

Гејд едэк ки,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (5)$$

вэ истэнилэн $b > a$ үчүн

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (6)$$

гејри-мэхсуси интеграллары ејни заманда йығылан вэ йа дағы-
лан олар. Догрудан да,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^N f(x) dx + \int_N^b f(x) dx$$

вэ $\int_a^b f(x) dx$ интегралы сонлу эдэд олдуғундан (5) вэ (6)
гејри-мэхсуси интеграллары ејни заманда йығылан вэ йа дағы-
лан олар.

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \text{ вэ } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

гејри-мэхсуси интеграллары да ејни гејдэ илэ тэјин олунур:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^a f(x) dx, \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx. \quad (8)$$

Ахырыныч $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ гејри-мэхсуси и тегралины

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{N_1 \rightarrow -\infty} \int_{-N_1}^b f(x) dx + \lim_{N_2 \rightarrow +\infty} \int_b^{N_2} f(x) dx = \\ &= \lim_{\substack{N_1 \rightarrow -\infty \\ N_2 \rightarrow +\infty}} \int_{-N_1}^{N_2} f(x) dx \end{aligned}$$

кини да тэјин етмэк олар.

Верилмиш $f(x)$ функциясини (5), (7) вэ (8) гејри-мэхсуси
интеграллары илэ бэрабэр онун мутлаг гијмэтинин

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx, \int_{-\infty}^a |f(x)| dx, \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

гејри-мэхсуси интегралларына да бахмэк олар.

(5) вэ $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ гејри-мэхсуси интеграллары ејни заман-

да йығыландырса, онда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралына мутлаг йығылан
гејри-мэхсуси интеграл дејилр. Бу халда, дејирлэр ки, $f(x)$
функциясы $[a, +\infty)$ областында мутлаг интегралланандыр.

(5) интегралы йығылан, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралы дағылан

оларса, онда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралына шэрти йығылан гејри-
мэхсуси интеграл дејилир.

$\int_{-\infty}^a f(x) dx$ вэ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ интеграл арынык да мутлаг вэ
шэрти йығылмасындак данышмаг олар.

§ 3. СОНСУЗ САРЬЭДЛИ ГЕЈРИ-МЭХСУСИ ИНТЕГРАЛЛАРЫН ХАССЭЛЭРИ

Бурада $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ гејри-мэхсуси интегралынын бир сыра хассэлэриндэн данышылыр. Нэмийн хассэлэр $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ вэ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграллары үчүн дэ ујғун шэкиллэ доғрудур.

Хассэ 1. $[a, +\infty)$ областында кэсильмэјэн $f(x)$ функциясинин ибтидаи функцијасы $F(x)$ оларса, онда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty} \quad (1)$$

бэрабэрлији (Н)утон—Лејбнис дүстүрү доғрудур. Бурааа $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty)$ (2)

гэбул олунур вэ (1) бэрабэрлији ашагыаақы кими баша дүшүлүр. бэрабэрлијин һэр ики тэрэфинин ејни заманда ја ма'насы вар (сонлудур) вэ бу һалда бэрабэрлик доғрудур, ја да һэр ики тэрэфин ма'насы жохдур.

Доғрудан да, тэ'рифэ керэ

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} [F(N) - F(a)] = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} F(N) - F(a) = F(+\infty) - F(a) \end{aligned}$$

олар. $F(+\infty)$ ифадэси сонлу эдэд оларса, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы јығылан олар вэ о у (1) дүстүрү илэ һесабламаг мүмкүндүр. (2) лимити жохдурса (вэ ја сонсузлуға бэрабэрдирсэ), $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы дағыландыр.

Хассэ 2. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ вэ $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ интеграллары јығыландырса, онда истэкилээн һэзиги'л вэ μ эдэдлэри үчүн $\int_a^{+\infty} [\lambda f(x) + \mu \varphi(x)] dx$ интегралы да јығыландыр.

Доғрудан да, тэ'рифэ керэ

$$\int_a^{+\infty} [\lambda f(x) + \mu \varphi(x)] dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N [\lambda f(x) + \mu \varphi(x)] dx =$$

$$\begin{aligned} &= \lambda \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N f(x) dx + \mu \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N \varphi(x) dx = \\ &= \lambda \int_a^{+\infty} f(x) dx + \mu \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Ашагыдақы хассэлэри дэ ејни гајда илэ исбат етмэк олар

Хассэ 3. $U=f(x)$ вэ $V=\varphi(x)$ функцијаларынын $[a, +\infty)$ областында кэсильмэз тэрэмэлэри варса вэ $\int_a^{+\infty} U dV, UV \Big|_a^{+\infty},$

$\int_a^{+\infty} V dU$ ифадэлэринин һэр һансы иикиси сонлудурса, онда

$$\int_a^{+\infty} U dV = UV \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} V dU \quad (3)$$

дүстүрү доғрудур.

Хассэ 4. Тунаг ки $f(x)$ функцијасы $[a, +\infty)$ областында кэсильмэјэндир, $x = \varphi(t)$ функцијасынын исэ $[a, \beta), a < \beta < +\infty$ јарыминтервалында кэсильмэз тэрэмэси вардыр вэ $a = \varphi(a) < \varphi(t) < \lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = +\infty$ мунасибэти вэденилир. Бу һалда, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы јығыландырса, онда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (4)$$

дүстүрү доғрудыр.

Бу хассэлэрдэн истифадэ етмэклэ бир чох гејри-мэхсуси интеграллары һесабламаг олур.

Мисал. $J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1,$

$$J_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1,$$

$$J_2 = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 2 = 2!,$$

$$J_3 = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + 3 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 6 = 3!$$

вэ үмумијэтлэ,

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n!$$

§ 4. СОНСУЗ САРҲАДЛИ ГЕЈРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЛАРЫН ЈЫҒЫЛМА ӘЛАМӘТЛӘРИ

Бә'зи масәләләрнн тәдгигиндә чох заман гејри-мәхсуси интегралларын гнјмәтннн дејил, он арын јығылан вә ја дағы-л н олмасынн билмәк ләзым олур. $f(x)$ функцијасынын ибти-дан функцијасы мә'лум оларса, онда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ геј-и-мәхсуси

интегралыннн јығылан олмасынн әввәлки параграфла кәстәрилән такинфләр вәситәсиклә јохламаг олар. Интегралалты функција-нын ибтидаи функцијасы мә'лум олмадыгда исә гејри-мәхсуси интегралларын јығылма масәләси чох зам н ашагыда кәстә-рилән әләмәтләри тәтбиг етмәклә өјрәннлир.

Фәрз едәк ки, $f(x)$ функцијасы $[a, +\infty)$ областында кәсил-мәјән вә кәфи гнјмәтләр алмајән функцијадыр. Онда

$$J(N) = \int_a^N f(x) dx$$

функцијасы $[a, +\infty)$ јарыминтервалында моно'он азалмајән олар. Буна көрә дә $N \rightarrow +\infty$ шәртиндә $J(N)$ функцијасы мо-нотон артараг ја сонлу лимитә, ја да сонсузлуға јакынлашыр. Мә'лумдур ки, монотон артан $J(N)$ функцијасынын $N \rightarrow +\infty$ шәртиндә сонлу л митинн олмасы үчү онун мәһдуд, јә'нә

$$|J(N)| \leq M, \quad a \leq N < +\infty \quad (1)$$

олмасы зәрури вә кәфи шәртдир (XII, § 11).

Бурадан г јри-мәхсуси интегралларын јығылмасы үчүн ашагыдакы теорем алыныр:

Теорем 1. $f(x)$ функцијасы $[a, +\infty)$ јарыминтер-валында кәсилмәјән вә кәфи гнјмәтләр алмајән функ-сија олдугда (1) мунасибәтиннн өдәнилмәси $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

интегралыннн јығылан олмасы үчүн зәрури вә кәфи шәртдир.

Гејд едәк ки, (1) шәрти өдәнилмәдикдә

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N f(x) dx = +\infty$$

о'ар.

Теорем 2. $[a, +\infty)$ јарыминтервалында кәсилмә-јән $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функцијалары үчүн

$$0 < f(x) < C \varphi(x) \quad (2)$$

($C > 0$ сабит әдәддир) бәрабәрсизлији өдәтилирсә,

онда $J_1 = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ интегралы јығылан олдугда

$J_2 = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы да јығылыр, J_2 интегралы да-гылан олдугда J_1 интегралы да дагылыр.

Исбаты. Фәрз едәк ки, J_1 интегралы јығылыр. Онда $\varphi(x) > 0$ ($0 < x < +\infty$) олдуғундан

$$J_1(N) = \int_a^N \varphi(x) dx$$

интегралы артараг $N \rightarrow +\infty$ шәртиндә сонлу лимитә јакынлашыр:

$$\int_a^N \varphi(x) dx < \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx = J_1. \quad (3)$$

Бурадан вә (2) бәрабәрсизлијиндән

$$J_2(N) = \int_a^N f(x) dx < C \int_a^N \varphi(x) dx < CJ_1 \quad (4)$$

аларыг. $J_2(N)$ интегралы јухарыдан мәһдуд олдуғундан 1-чи теоремә көрә J_2 интегралы јығылыр.

J_2 интегралы дагылан олдугда (4) бәрабәрсизлијинә көрә J_1 интегралы да дагылыр.

Теорем 3. $[a, +\infty)$ јарыминтервалында кәсилмәјән $\varphi(x)$ вә $f(x) > 0$ функцијалары үчүн

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \gamma \quad (5)$$

лимити вәрсә, онда $0 < \gamma < +\infty$ олдугда $J_1 = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$

вә $J_2 = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграллары өјнн заманда ја јыгы-лыр, ја да дагылыр.

Исбаты. Лимитин тә'рифинә көрә истәнилән $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ әдәди үчүн елә $N_0 > 0$ вар ки, x -ин бүтүн $x > N_0$ гнјмәтләриндә

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - \gamma \right| < \varepsilon$$

вә ја

$$(\gamma - \varepsilon) \varphi(x) < f(x) < (\gamma + \varepsilon) \varphi(x) \quad (N_0 < x < +\infty) \quad (6)$$

бәрабәрсизлији өдәтилир.

J_1 интегралы јығылан олдугда $\int_{N_0}^{+\infty} \varphi(x) dx$ интегралы да јы-

гылыр. Онда (6) бәрабәрсизлијинә көрә $\int_{N_0}^{+\infty} f(x) dx$ интегралы

йыгылыр, бугалан да, J_2 интегралынын йыгалан олмасы а]дын-дыр.

Исбаты: эрды ејни мўнакимэ илэ тамамланыр.

Нәтижә. Тутаг ки, $[a, +\infty)$ яриминтервалында мәнфи гүмәтләр алмајан $f(x)$ функцијасы үчүн

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\lambda f(x) = \tau$$

мүнәсибәти өдәнилир. Онда 1) $0 < \tau < \infty$ вә $\lambda < 1$ олдугда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (7)$$

интегралы дағылыр, 2) $0 \leq \tau < \infty$ вә $\lambda > 1$ олдугда исә (7) интегралы йыгылыр.

Нәтижәни доғрулуғуна инанмаг үчүн $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ интегралынын

$\lambda > 1$ олдугда йыгылан, $\lambda < 1$ олдугда исә дағылан олдуғуну (§ 2, мисәл 1) нәзәрә, аймаг ләзимдыр

Хүсуси һалда,

$$f(x) \approx \frac{1}{x^\lambda}$$

оларса, онда $\lambda > 1$ олдугда (7) интегралы йыгылыр, $\lambda < 1$ олдугда исә дағылыр.

§ 3. КОШИ КРИТЕРИСИ ВӘ АБЕЛ ӘЛАМӘТИ

Тутаг ки, $J = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы йыгылыр. Бу, о демәк-дир ки,

$$F(N) = \int_a^N f(x) dx$$

функцијасынын $N \rightarrow +\infty$ шәртиндә сонлу J лимити вар Коши критерисинә (XII, § 11) көрә бу, ашағыдакы шәртин өдәнил-мәсинә эквивалентдир:

истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә N_0 , $N_0(\varepsilon)$ пар ки, истә-нилән $N_1 > N_0$ вә $N_2 > N_0$ үчүн

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx \right| = \left| \int_{N_1}^{N_0} f(x) dx - \int_{N_2}^{N_0} f(x) dx \right| =$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Бурадан $f(x)$ функцијасынын $[a, +\infty)$ яриминтервалында интегралланан олмасы үчүн ашағыдакы зәрури вә кәфи шәрт алыныр.

Теорем 1 (Коши критериси). $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралынын

йыгылан олмасы үчүн зәрури вә кәфи шәрт беләдир: истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә N_0 пар ки, истәнилән $N_1 > N_0$ вә $N_2 > N_0$ үчүн

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad (1)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Индик фәрз еләк ки, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралы йыгылыр. Онда

Коши критерисинә көрә истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә N_0 пар ки, истәнилән $N_1 > N_0$ вә $N_2 > N_0$ әдәлләри үчүн

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан,

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx \right| < \left| \int_{N_1}^{N_2} |f(x)| dx \right|$$

бәрабәрсизлијинә әсәсән,

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad (N_1 > N_0, N_2 > N_0)$$

алыныр ки, бу да $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралынын йыгылан олдуғуну көстәрир.

Беләликлә, ашағыдакы теореми исбат етмиш олуруг:

Теорем 2. Гейри-мәхсуси $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интегралы йы-гылырса, онда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы да йыгылыр.

Теорем 3. (Абел әламәти). Тутаг ки, $\varphi(x)$ функцијасы $[a, +\infty)$ яриминтервалында дифференциалланандыр, монотон алыр, $x \rightarrow +\infty$ шәртиндә исә сыфра жәхынла-шыр вә истәнилән $N > a$ үчүн

$$\left| \int_a^N f(x) dx \right| < M_\varepsilon < +\infty \quad (2)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда гейри-мәхсуси

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (3)$$

интегралы йыгылыр.

Исбати. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ олдугда истәнилән N_1 вә N_2 әдәлләри үчүн

$$\int_{N_1}^{N_2} f(x) \varphi(x) dx = [F(x) \varphi(x)]_{N_1}^{N_2} - \int_{N_1}^{N_2} F(x) \varphi'(x) dx \quad (4)$$

дүстуруну аларыг. $\varphi(x)$ функцијасы монотон азалан олдуғундан $\varphi'(x) \leq 0$ олар.

Инди $\int_{N_1}^{N_2} F(x) \varphi'(x) dx$ интегралына орта гијмәт теоремини (XXII, § 6) тәтбиғ едәк:

$$\int_{N_1}^{N_2} F(x) \varphi'(x) dx = F(\xi) \int_{N_1}^{N_2} \varphi'(x) dx = F(\xi) [\varphi(N_2) - \varphi(N_1)], \quad [\xi \in (N_1, N_2)].$$

Бурадан (2) бәрәбәрсизлијинә вә (4) бәрәбәрлијинә әсасән

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq 2 M_0 [|\varphi(N_1)| + |\varphi(N_2)|]$$

мүнәсибәти алыныр. Шәртә көрә $\varphi(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$) олдуғундан

$$\lim_{\substack{N_2 \rightarrow +\infty \\ N_1 \rightarrow +\infty}} \int_{N_1}^{N_2} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

олар. Демәли, (3) интегралы јығылыр (Коши критерисинә көрә).

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралынын јығылмасы һағында сәләдијимиз бу тәклифләр ујғун шәкилдә

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \text{ вә } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

интеграллары үчүн дә доғрудур.

Мисал 1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^\lambda} dx$ вә $\int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^\lambda} dx$ интеграллары $\lambda > 1$ олдугда мүтләғ јығылыр.

Доғрудан да,

$$\left| \frac{\sin ax}{x^\lambda} \right| \leq \frac{1}{x^\lambda} \text{ вә } \left| \frac{\cos ax}{x^\lambda} \right| \leq \frac{1}{x^\lambda} \quad (1 \leq x < +\infty)$$

бәрәбәрсизликләри едәниллијидән вә $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ ($\lambda > 1$) интегралы јығылан олдуғундан (§ 2, мисал 1) 2-чи теоремә (§ 4) көрә

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin ax|}{x^\lambda} dx \text{ вә } \int_1^{+\infty} \frac{|\cos ax|}{x^\lambda} dx$$

интеграллары јығыландыр. Онда јухарыда исбат етдијимиз 2-чи теоремә көрә

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^\lambda} dx \text{ вә } \int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^\lambda} dx \quad (5)$$

интеграллары мүтләғ јығылан олур.

Мисал 2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ интегралы шәрти јығыландыр.

Бу интеграла һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну (§ 3, хәсә 3) тәтбиғ етсәк, аларыг:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(\cos x) = - \frac{\cos x}{x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \cos x d\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Сағ тәрафдаки һадларин икиги дә сәилудур (интегралын јығылан олмасы 1-чи мисалдан ајдындыр), буна көрә дә сол тәрафдаки интеграл јығыландыр.

Инди көстәрәк ки, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ интегралы дағыландыр.

Бу мәсәдлә

$$|\sin nx| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

бәрәбәрсизлијидән истифада едәк. Онда истәнилән $\lambda > 0$ үчүн

$$\int_1^N \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_1^N \frac{1}{2x} dx - \int_1^N \frac{\cos 2x}{2x} dx \quad (6)$$

бәрәбәрсизлијини јазмағ олур. Сағ тәрафдаки биринчи интеграл $N \rightarrow +\infty$ шәртиндә сонсузлуға јакынашыр, јә'ни $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$

интегралы дағыландыр: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx = +\infty$. Икинчи интеграл исе

јығыландыр. Демәли, $N \rightarrow +\infty$ шәртиндә (6) бәрәбәрсизлијиндә лимитә кечсәк, сағ тәраф вә буна көрә дә сол

тәраф сонсузлуға јакынашыр. Бу исе $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ интегралынын дағылағ олдуғуну көстәрир:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty.$$

§ 6. ГЕЈРИ-МЭҲДУД ФУНКЦИЈАЛАРЫН ГЕЈРИ-МЭХСУСИ ИНТЕГРАЛЫ

Тутаг ки, $[a, b]$ парчасы соғлудур, $f(x)$ функцијасы исә истәнилән $[a, b-\delta]$, $0 < \delta < b-a$ парчасында интеграллан-дыр вә $[a, b]$ парчасында гејри-мәһдуддур (демәли, $x=b$ нөгтәсинин истәнилән атрафында $f(x)$ функцијасы гејри-мәһдуддур). Онда истәнилән кичик $\delta > 0$ әдәди үчүн $\int_a^{b-\delta} f(x) dx$ интегралы сонлу олар. Әкәр сонлу

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx \quad (1)$$

лимити варса, онда һәммин лимитә $f(x)$ функцијасынын $[a, b]$ парчасында гејри-мәхсуси интегралы дејилир вә

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx \quad (2)$$

ким ишарә олунур.

Гејд едәк ки, (2) барабәрлијини

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} f(x) dx, \quad a < b' < b$$

ким ишарә олар.

Демәли, (1) лимити сонлу әдәд олдуғда, һәммин лимит $\int_a^b f(x) dx$ гејри-мәхсуси интегралынын гијмати олараг көтүрү-

лүр. Бу һалда, $\int_a^b f(x) dx$ интегралына јығылан, әкс һалда, \int_a^b ин (1) лимити олмадығда вә $\pm \infty$ -а барабәр олдуғда һәммин гејри-мәхсуси интеграла дағылан дејилир.

Әкәр $f(x)$ функцијасы $x=a$ нөгтәсинин атрафында гејри-мәһдуд вә истәнилән $[a+\delta, b]$ ($0 < \delta < b-a$) парчасында интегралланан олса, онда онун $[a, b]$ парчасында гејри-мәхсуси интегралы

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

ким тәјин олунур. $f(x)$ функцијасы истәнилән $[a, c-\delta_1]$ ($0 < \delta_1 < c-a$) вә $[c+\delta_2, b]$ ($0 < \delta_2 < b-c$) парчаларында интегралланан вә $[a, b]$ парчасынын даһили $x=c$ нөгтәсинин атрафында гејри-мәһдуд олдуғда, онун $[a, b]$ парчасында гејри-мәхсуси интегралы $\int_a^c f(x) dx$ вә $\int_c^b f(x) dx$ гејри-мәхсуси

интегралларынын чәми кими

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (4)$$

вә ја

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow +0} \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx$$

ким тәјин олунур.

$f(x)$ функцијасы a вә b нөгтәләринин икисиндә дә ејни заманда гејри-мәһдуд оларса, онла онун (a, b) интервалында гејри-мәхсуси интегралы да (4) барабәрлији илә тәјин олунур. Бу һалда c нөгтәси олараг (a, b) интервалынын истәнилән нөгтәси көтүрүлә биләр.

Наһајәт, $f(x)$ функцијасы сонлу едәдә

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

нөгтәләрини гејри-мәһдуддурса вә

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

гејри-мәхсуси интегралларынын һамысы јығыландырса, онда

$\int_a^b f(x) dx$ гејри-мәхсуси интегралы

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \quad (5)$$

барабәрлији илә тәјин олунур.

$f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуддурса вә һәммин парчада әди мјәјјән интегралы варса, онда онун (2)–(5) барабәрликләри илә тәјин олунан „гејри-мәхсуси интеграллары“ әди мјәјјән интегралы илә үст-үстә дүшүр. Буна көрә дә гејри мәһдуд функцијанын (1) гејри-мәхсуси интегралыны $\int_a^b f(x) dx$ илә (мјәјјән интеграл кими) ишарә етмәк ғарышығлыға сәбәб олмур.

Гејри-мәхсуси интегралын әди мјәјјән интегралын (мәхсуси интегралын) үмумиләшмәси олмасы да бурадан ајдындыр.

Буна көрә дә „ $\int_a^b f(x) dx$ гејри-мәхсуси интегралы“ әвәзигә

„ $\int_a^b f(x) dx$ интегралы“ демәк һеч бир долашығлыға сәбәб олмур.

Гейри-мәндүд функцияларын гейри-мәхсуси интегралынын да мүтлэг вә шәрти жығылмасыннан даңышмаг олар.

$$\int_a^b |f(x)| dx \quad (6)$$

интегралы жығылан олдугда $\int_a^b f(x) dx$ интегралына мүтлэг

жыгы ви интеграл деилир. (6) интегралы дагылан, $\int_a^b f(x) dx$ ин-

тегралы жығылан олдугда исә $\int_a^b f(x) dx$ шәрти жығылан интеграл адланыр.

Мисал. Гейри-мәхсуси $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu}$ вә $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\mu}$ интегралларынын жығылмасыны тәдгиг етмәли.

$\mu \neq 1$ олдугда

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left. \frac{(x-a)^{-\mu+1}}{-\mu+1} \right|_{a+\epsilon}^b = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\frac{(b-a)^{-\mu+1}}{-\mu+1} - \frac{\epsilon^{-\mu+1}}{-\mu+1} \right] = \begin{cases} \frac{(b-a)^{-\mu+1}}{-\mu+1}, & \mu < 1 \\ \infty, & \mu > 1 \end{cases}$$

сә $\mu > 1$ олдугда

олур. $\mu = 1$ олдугда исә

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \ln(x-a) \Big|_{a+\epsilon}^b = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [\ln(b-a) - \ln \epsilon] = \infty.$$

Демәли, $\mu < 1$ олдугда $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu}$ интегралы жығылан, $\mu > 1$ олдугда исә дагыландыр. Жығылан интегралын гим-ти ашагыдакы кими табылыр:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \frac{1}{1-\mu} (b-a)^{1-\mu}, \quad (\mu < 1).$$

Икинчи интеграл да $\mu < 1$ олдугда жығылыр, $\mu > 1$ олдугда исә дагылыр.

§ 7. ГЕЙРИ-МӘНДҮД ФУНКЦИАЛАРЫН ГЕЙРИ-МӘХСУСИ ИНТЕГРАЛЫНЫН ХАССӘЛӘРИ ВӘ ЖЫҒЫЛМА ӘЛАМӘТЛӘРИ

Тутаг ки, $f(x)$ функциясы $[a, b]$ яриминтервалында тәјин олунмуш вә $x = b$ нөгтәси әтрафында гейри-мәндүд олан функ-

сиядыр. Онда онун $\int_a^b f(x) dx$ гейри-мәхсуси интегралындан даңышмаг олар.

Гейри-мәхсуси интегралларын, мүнәјән интегралын мәлум хассәләринә (хәттилик, дәјишәни әвәзетмә вә с.) окшар хассәләри вардыр. Бурада онларын аңчаг бир вәчәси верилир.

Хәссә 1. $[a, b]$ яриминтервалында кәсилмәјән $f(x)$ функциясынын ибтидаи функциясы $F(x)$ олдугда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a) \quad (1)$$

$$(F(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x))$$

бәрабәрлији (Нјутон—Лейбнис дүстуру) доғрудур.

Бу һалда (1) бәрабәрлији ашагыдакы кими баша дүшүлүр. Ја бәрабәрлији һәр ики тәрәфи сонлудур вә (1) доғрудур, ја да бәрабәрлији һәр ики тәрәфини мәнасы јокдур.

(1) бәрабәрлијини исбат етмәк үчүн $[a, b-\delta]$ парчасы үчүн

$$\int_a^{b-\delta} f(x) dx = F(b-\delta) - F(a)$$

Нјутон—Лейбнис дүстуруну (XXII, § 8) јазмаг, сонра да ахырынчы бәрабәрликдә $\delta \rightarrow +0$ шәртиндә лимитә кечмәк ләзимдыр.

Хәссә 2. $U = f(x)$ вә $V = \varphi(x)$ функцияларынын $[a, b]$ яриминтервалында кәсилмәз төрәмәләри варса вә $\int_a^b U dV$,

$UV \Big|_a^b$, $\int_a^b V dU$ ифадәләрини һәр һансы яхиси сонлудурса, онда

$$\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU \quad (2)$$

дүстуру доғрудур.

(2) бәрабәрлији мүнәјән интегралын һиссә-һиссә интеграллаш дүстуруна (XXII, § 9) әсасән исбат олунур.

Мисал. $J_n = \int_a^1 (\ln x)^n dx$ интегралынын һесапламәли.

$\lim_{x \rightarrow +0} x (\ln x)^n = 0$ олдуғундан (2) дүстуруна әсасән аларыг:

$$J_n = \int_a^1 (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n \Big|_a^1 - n \int_a^1 (\ln x)^{n-1} dx = -n J_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Бурадан, $J_0 = \int_0^1 dx = 1$ олдугуна көрө

$$J_n = -nJ_{n-1} = -n[-(n-1)J_{n-2}] = (-1)^2 n(n-1)J_{n-2} = \dots = (-1)^n n!$$

$$J_n = (-1)^n n!$$

алынып.

Гейри-мәхсуси интегралын башга хәссәләрини дә еҗни гајда илә исбат етмәк олар:

Инди интегралын бир сыра јығылма әләмәтләрини гејд едәк.

Тутаг ки, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ јарыминтервалында тәҗин олунчуш, мәнфи гијмәтләр алмајан вә истәнилән $[a, b-\delta]$ ($0 < \delta < b-a$) парчасында интегралланан функцијадыр. Онда

$$F(\delta) = \int_a^{b-\delta} f(x) dx \quad (3)$$

функцијасы $\delta \rightarrow +0$ шәртияда монотон арт н олар. Буна көрә дә сонлу вә ја сонсуз $\lim_{\delta \rightarrow +0} F(\delta)$ лимити һәмишә вар. Бу лимити

сонлу олмасы үчүн (3) интегралынын бүтүн $0 < \delta < b-a$ әдәдләри үчүн мәһдуд олмасы зәрури вә кафи шәртдир:

$$|F(\delta)| < M \quad (0 < \delta < b-a). \quad (4)$$

Бурадан әшағыдакы тәклифи аларып:

Теорем 1. $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ јарыминтервалында тәҗин олунчуш вә мәнфи гијмәтләр алмајан функција олдугда (4) мунасибәтинин өдәнилмәси $\int_a^b f(x) dx$

интегралынын јығылан олмасы үчүн зәрури вә кафи шәртдир

Демәли, (4) шәрти өдәнилмәдикдә

$$\int_a^{b-\delta} f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx = \infty$$

олар.

Бу теоремдән истифадә едәрәк гејри-мәхсуси интегралларын јығылмасы үчүн мүгајисә әләмәтини исбат етмәк олар.

Теорем 2. $[a, b]$ јарыминтервалында тәҗин олунчуш вә истәнилән $[a, b-\delta]$ ($0 < \delta < b-a$) парчасында интегралланан $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функцијалары үчүн

$$0 < f(x) < \varphi(x) \quad (5)$$

бәрабәрсизлији өдәнилисә, онда $J_1 = \int_a^b \varphi(x) dx$ интег-

ралы јығылан олдугда $J_2 = \int_a^b f(x) dx$ интегралы да

јығылыр. J_2 интегралы дағылан олдугда J_1 интегралы да дағылыр,

Исбаты. Тутаг ки, J_1 интегралы јығылыр. Онда 1-чи теоремә көрә

$$\int_a^{b-\delta} \varphi(x) dx < M \quad (0 < \delta < b-a) \quad (6)$$

олар. Бурадан, (5) бәрабәрсизлијинә әсасән,

$$\int_a^{b-\delta} f(x) dx < \int_a^{b-\delta} \varphi(x) dx < M \quad (0 < \delta < b-a)$$

алыныр ки, бу да J_2 интегралынын јығылан олдуғуну көстәрир.

J_2 интегралы дағылан олдугда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx = +\infty$$

олар. Бу һалда (5) бәрабәрсизлијинә көрә

$$\int_a^{b-\delta} f(x) dx < \int_a^{b-\delta} \varphi(x) dx$$

олдуғундан

$$+\infty = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx < \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx = +\infty.$$

Теорем 3. $[a, b]$ јарыминтервалында тәҗин олунчуш, мәнфи гијмәтләр алмајан вә истәнилән $[a, b-\delta]$ парчасында интегралланан $f(x)$ вә $\varphi(x) > 0$ функцијалары үчүн

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \gamma \quad (0 < \gamma < \infty) \quad (7)$$

лимити варса, онда J_1 вә J_2 интеграллары еҗни ва-манда ја јығылыр, ја да дағылыр.

Исбаты. Лимитин тәрифинә көрә истәнилән $0 < \epsilon < \gamma$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, x -ни $b-\delta < x < b$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$\gamma - \epsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \gamma + \epsilon$$

вә ја

$$(\gamma - \epsilon)\varphi(x) < f(x) < (\gamma + \epsilon)\varphi(x) \quad (b - \delta < x < b) \quad (8)$$

бәрабәрсизликләри өдәнилийр.

$J_1 = \int_a^b \varphi(x) dx$ интегралы јығылан олдугда $\int_a^b \varphi(x) dx$ интегралы да јығылар. Онда 2-чи теоремә вә (8) бәрабәрсизлијини

ринин саг тарафине керэ $\int_{b-\varepsilon}^b f(x)dx$ интегралы ыгылар. Бурадан J_2 интегралынын ыгылмасы адындыр.

$J_2 = \int_a^b f(x)dx$ интегралы ыгылан олдугда $\int_{b-\varepsilon}^b f(x)dx$ интегралы ва (8) барабарсылыжине керэ $\int_{b-\varepsilon}^b (\tau - \varepsilon) \varphi(x) dx = (\tau - \varepsilon) \int_{b-\varepsilon}^b \varphi(x) dx$ интегралы ыгылан олар. Бурадан J_1 интегралынын ыгылан отмасы адындыр.

Нәтижә. Тутаг ки, $[a, b]$ тарыминтервалында тә'јин олунмуш ва мәнфи гижәтләр алмајик $f(x)$ функцијасы үчүн

$$\lim_{x \rightarrow b-0} (b-x)^p f(x) = \tau \quad (9)$$

өдәнилик. Онда 1) $0 < \tau < +\infty$ ва $p < 1$ олдугда

$$\int_a^b f(x)dx \quad (10)$$

интегралы ыгылыр, 2) $0 < \tau < +\infty$ ва $p > 1$ олдугда исә (10) интегралы дагылыр.

Нәтиженин доғрулуғуна инанмаг үчүн

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \quad (11)$$

интегралынын $p < 1$ олдугда ыгылан, $p > 1$ олдугда исә дагылан олдуғуку нәзәрә алмаг лазымдыр.

Хүсуси һалда, $x \rightarrow b-0$ шәртиндә

$$f(x) \approx \frac{1}{(b-x)^p}$$

оларса, онда $p < 1$ олдугда (10) интегралы ыгылар, $p > 1$ олдугда исә дагылар.

Бурада исбат олунан тәклифләр ујғун шәкилдә башга гејри-мәхсуси интеграллар (интегралалты функция а нөгт. си ва $[a$ башга дахили $c (a < c < b)$ нөгтәси әтрафында гејри-мәһдуд олдугда) үчүн дә доғрудур.

Мисал 1. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1-x^2}$ интегралы дагылыр.

Доғрудан да,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2}$$

олдуғундан 3-чү теоремин нәтижәсинә керә интеграл дагылыр.

Мисал 2. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ интегралы ыгылыр.

Доғрудан да,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$$

олдуғундан нәтижә керә интеграл ыгылыр.

§ 8. КОШИ КРИТЕРИСИ ВӘ ИНТЕГРАЛЫН МУТЛАГ ЫҒЫЛМА АЛАМӘТИ

Фәрз едәк ки, $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ тарыминтервалында тә'јин олунмуш ва истәнилән $[a, c]$, $a < c < b$ парчасында ин егралланан функцијадур. Онда истәнилән $a < x < b$ үчүн

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

интегралы сонлу олар. Адындыр ки, $x \rightarrow b-0$ шәртиндә $f(x)$ функцијасынын сонлу лимитикин варлығы

$$\int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

гејри-мәхсуси интегралынын ыгылмасына эквивалентдыр.

Коши критерисинә (XII, § 11) керә исә $F(x)$ функцијасынын $x \rightarrow b-0$ шәртиндә сонлу лимитикин варлығы үчүн зәрури ва кафи шәрт беләдир: истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ вар ки, x -ин $b-\delta < x' < b$, $b-\delta < x'' < b$ барабарсылыкларыин өдәјән ихтијари x' ва x'' гижәтләриндә

$$|F(x'') - F(x')| < \varepsilon \quad (3)$$

мүнәсибәти өдәнилик. Бурада

$$F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x''} f(t) dt = \int_a^{x''} f(t) dt - \int_a^{x'} f(t) dt = \int_{x'}^{x''} f(t) dt$$

олдуғуну нәзәрә алсаг, (3) барабарсылыжени

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(t) dt \right| < \varepsilon \quad (4)$$

кимнә језа биләрик.

Бурдан (2) интегралынын варлығы үчүн ашағыдакы теорем алыныр:

Теорем 1 (Коши критериси). (2) интегралынын ыгылма олжасы үчүн зәрури ва кафи шәрт беләдир: истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta = \delta(\varepsilon)$ вар ки, x -ин $b-\delta < x' < b$ ва $b-\delta < x'' < b$ барабарсылыкларыин өдәјән

ихтијари x' ва x'' ғијмәтләриндә

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(t) dt \right| < \epsilon$$

мүнәсибәти өдәнилик.

Инди (2) интегралынын мүнәгә жығылмасы һаггында теорема исбат едәк.

Теорем 2. Гејри-мәхсуси $\int |f(x)| dx$ интегралы жығылса, онда (2) интегралы да жығылса.

Догрудан да, $\int |f(x)| dx$ интегралы жығылган олдуғундан

Коши критерисинә кәрә истәнилән $\epsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta = \delta(\epsilon)$ вар ки, $b - \delta < b' < b$ ва $b - \delta < b'' < b$ бәрәбәрсизликләрини өдәјән истәнилән b' ва b'' әдәдләри үчүн

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \epsilon$$

өдәнилик. Онда

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \left| \int_{b'}^{b''} |f(x)| dx \right|$$

олдуғундан кәстәрилән ихтијари b' ва b'' әдәдләри үчүн

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \epsilon$$

бәрәбәрсизлији өдәнилик. Бурадан, Коши критерисинә кәрә, (2) интегралынын жығылмасы әјдындыр.

Гејд едәк ки, (2) интегралы жығылдыгда $\int |f(x)| dx$ интегралы дагылан да ола биләр. Бу һалда (2) интегралына шәрти жығылган интеграл дејилир.

Мисал. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx$ интегралы жығылса.

Догрудан да, $0 < x < 1$ олдугда

$$0 < \left| \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} \right| < \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

бәрәбәрсизлији өдәнилик. Сағ тәрәфдәки функцијанын $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ интегралы жығылган олдуғундан (§ 6, мисал). 2-чи теоремә

(§ 7) кәрә $\int \left| \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} \right| dx$ интегралы да жығыландыр. Онда, ни-

ди исбат етдијимиз 2-чи теоремә кәрә $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx$ интегралы жығылса.

§ 9. ИНТЕГРАЛЫН БАШ ҒИЈМӘТИ

1. Тутар ки, $f(x)$ функцијасы $(-\infty, +\infty)$ интервалында тәјин олунмуш ва истәнилән сонлу $[-N_1, N_2]$ парчасында интегралланан функцијадыр. Бу һалда $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ гејри-мәхсуси интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{N_1 \rightarrow -\infty \\ N_2 \rightarrow \infty}} \int_{N_1}^{N_2} f(x) dx \quad (1)$$

кимә тәјин олунур. Бурада N_1 ва N_2 кәмијәтләри бир-бириндә асылы олмәјарәг сонсузлуға јахынашыр. Ола биләр ки, (1) лимити јохдур, ләкин $N_1 = N_2 = N \rightarrow \infty$ шәртиндә һәмми лимит вар. Онда бу лимитә, јәни

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx \quad (2)$$

ифадәсинә $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ интегралынын Коши мәһнада баш ғијмәти дејилир ва ашағыдағы шәкилдә јазылса:

$$V. P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx \quad (3)$$

(V. P. һәрфләри „valeur principale“ (франсызча—баш ғијмәт) сөзләринин баш һәрфләридир).

Тутар ки, $\int_0^{\infty} [f(x) + f(-x)] dx$ гејри-мәхсуси интегралы жығыландыр ва (3) баш ғијмәти сонлудур. Онда $f(x)$ функцијасыны тәк тә чүт функцијанын чәми шәкилиндә

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

кимә кәстәрсәк,

$$\begin{aligned} V. P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_{-N}^N \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx + \right. \\ &+ \left. \int_{-N}^N \frac{f(x) - f(-x)}{2} dx \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx = \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx = \int_0^{\infty} [f(x) + f(-x)] dx \end{aligned}$$

вэ ја

$$V. P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} [f(x) + f(-x)] dx \quad (4)$$

олар. Хүсуси ҳалда, $f(x)$ функцијасы чүт функция оларса, онда (4) дүстуруну

$$V. P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

киму жазмаг олар.

Мисал 1.

$$V. P. \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \sin x dx = \lim_{N \rightarrow \infty} [-\cos N + \cos(-N)] = 0.$$

Гејд едәк ки, $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ гејри-мәхсуси интегралы дағылыр.

Мисал 2.

$$V. P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

II. $f(x)$ функцијасы истәкиләи $[a, c - \delta_1]$ ($0 < \delta_1 < c - a$) вә $[c + \delta_2, b]$ ($0 < \delta_2 < b - c$) парчаларында интегралланан вә $[a, b]$ парчасынын дахили $x = c$ нөггәсннин әтрафында гејри-мәһдуд олдуғда, онун $[a, b]$ парчасында гејри-мәхсуси интегралы ашағыдакы кими тәјин олунур.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\delta_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow +0} \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx = \\ &= \lim_{\delta_1 \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\delta_1} f(x) dx + \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Бурада δ_1 вә δ_2 кәмијәтләри бир-бириндән асылы олмајараг сыфра јажыглашыр. Бу ҳалда (5) лимити олмаја да би-ләр. Лакин $\delta_1 = \delta_2 = \delta \rightarrow 0$ шәртиндә бәзән һәмми лимит сон-лу олур. Онда бу лимитә, јәни

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right]$$

ифаләсинә $\int_a^b f(x) dx$ интегралынын Коши мәнада баш гијмәти дејилир вә

$$V. P. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right] \quad (6)$$

кими ишарә олунур.

Мисал 3. $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ ($a < c < b$) гејри-мәхсуси интегралы дағы-

лыр. Доғрудан да,

$$\int_a^{c-\delta_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\delta_2}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (7)$$

бәрабәрлијини сәт тәрәфиндәки ифадәнин δ_1 вә δ_2 кәмијәт-ләри бир-бириндән асылы олмајараг сыфра јажыглашдығда ли-мити јохдур.

Инди (7) б. рабәрлијиндә $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ һесаб едәк. Онда

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\delta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\delta}^b \frac{dx}{x-c} \right] = \ln \frac{b-c}{c-a} = V. P. \int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

олар. Демәли, верилмиш гејри-мәхсуси интеграл дағыландыр, лакин онун Коши мәнада баш гијмәти вәр.

Гејд едәк ки, верилмиш гејри-мәхсуси интеграл јығылан олдуғда, онун Коши мәнада баш гијмәти дә вәр вә һәмми ин-тегралы гијмәти илә үст-үстә дүшүр.

ХОХДӨЛИШЭНЛИ ФУНКЦИЈАЛАРЫН ДИФЕРЕНЦИАЛ ЁСАБЫ

XXV ФЭСИЛ

ХОХӨЛЧҮЛҮ ФЭЗАДА НӨГТӨЛӨР ХОХЛУГУ

§ 1. МЕТРИК ФЭЗАЛАР

Риџи анализин эсас анлаџышлары лимит өөснөснлэ тэ'јин олунур. Лимит анлаџышын тэ'рџи исэ адэдлэр фэргини мэтлэг гнмэтинэ, јэ'ни "нэгнги адэдлэр арасындакы мөсөфө анлаџышына эөсөслөнүр.

Нэгнги адэдлэр арасындакы мөсөфө анлаџышын истэнилэн тэбнэтлн элементлэр хохлугу үчүн үмүмлөшднрнэк олар.

Тутаг кн, K нлэ истэнилэн тэбнэтлн X, Y, Z, U, \dots элементлэр хохлугу ншэрэ ол нмушдур.

Тэ'рџи 1. Тутаг кн, R хохлугунун истэнилэн икн X өэ Y элементнэ, нэкин элементлэр арасындакы мөсөфө адлэкан өэ ашагыдакы шэртлэри (метрик фэзанын аксиомларыны) өдэјэн бнр нэгнги $\rho(X, Y)$ адэди ујгун гојулур

1. $\rho(X, Y) = 0$ мөдөснбэти ($X \in R, Y \in R$) јалныз өэ јалныз $X = Y$ оллугда өдэнилнр.

2. Истэнилэн $X \in R$ өэ $Y \in R$ үчүн

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$$

бэрэбэрлнји (снмметрнја аксиому) өдэнилнр.

3. Истэнилэн $X \in R, Y \in K$ өэ $Z \in K$ үчүн

$$\rho(X, Y) \leq \rho(X, Z) + \rho(Z, Y)$$

мүнэснбэти (үчбучаг бэрэбэрснзлнји) өдэнилнр.

R хохлугу нлэ $\rho(X, Y)$ мөсөфө функснјасынын (R, ρ) чүтүнэ метрик фэза дејнлнр. $\rho(X, Y)$ мөсөфө функснјасы метрика адланнр өэ метрик фэзанын гурулушуну тэ'јн еднр.

Метрик фэзаны, адэтэн, бнр нэрфлэ $E = (K, \rho)$ өэ ја метрик фэзаны тэшкнл едэн R нөгтөлэр хохлугунун ншэрэ еднлднји " R нэрфн" нлэ ншэрэ еднрлэр. R хохлугунун элементлэри метрик фэзанын нөгтөлэри адланнр.

Тэ'рџи 3-чү аксиомда $X = Y$ нөтүрдүклэ $2\rho(X, Y) \geq 0 \rightarrow \rho(X, Z) \geq 0$ алыннр кн, бу да мөсөфө функснјасынын нэнишэ мэнфн олмэјэн гнмэтлэр алдыгыны кестэрир.

Нэр бнр хэтти нормалашмыш фэзада (IV, § 9) метрика тэ'јин етмэк олар. Бу мөгсэдлэ истэчилэн $X \in R$ өэ $Y \in R$ нөгтөлэри арасындакы мөсөфөнн

$$\rho(X, Y) = \|X - Y\| = \|Y - X\| \quad (1)$$

кнмн тэ'јин етмэк лэзымдыр. Белэ тэ'јин олунмуш мөсөфө функснјасы үчүн метрик фэза аксиомлары өдэнилнр. Догрудан да, бнрннчн нкн аксиомун өдэнилмэсн ашкардыр, үчүнчү аксиомун өдэнилмэсн ясэ ашагыдакы мүнэснбэтлэн ајдындыр:

$$\rho(X, Y) = \|X - Y\| = \|(X - Z) + (Z - Y)\| \leq \|X - Z\| + \|Z - Y\| = \rho(X, Z) + \rho(Z, Y).$$

Демэли, (1) шэклнндэ тэ'јин олунмуш мөсөфө функснјасы нлэ нэр бнр хэтти нормалашмыш R фэзасы метрик фэзаја чөврнлнр, јэ'ни (R, ρ) чүтү метрик фэза олур.

Мисал 1. Бүтүн нэгнги адэдлэр хохлугу, нхтијари X өэ Y нэгнги адэдлэри арасындакы мөсөфө $\rho(X, Y) = |X - Y|$ кнмн тэ'јин еднлднкдэ метрик фэзаја чөврнлнр. Бу фэзаны E , нлэ ншэрэ едэк.

Бу налда метрик фэза аксиомларынын өдэнилмэсн мэтлэг гнмэтин ујгун хэссэлэриндэн ајдындыр.

Мисал 2. Тутаг кн, $[a, b]$ парчэсында кэснлмэјэн $x = x(t)$ функснјалары хохлугу R нлэ ншэрэ олунмушдур. Бу хохлугда метриканы (мөсөфө функснјасыны)

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

кнмн тэ'јин етднкдэ метрик (R, ρ) фэзасы алыннр. Бу фэзаны $C[a, b] = (R, \rho)$ нлэ ншэрэ еднрлэр.

Мисал 3. n -өлчүлү R_n нөсөбн фэзасында (IV, § 2) истэнилэн $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ өэ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ нөгтөлэри арасындакы мөсөфөнн

$$\rho(X, Y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}$$

кнмн тэ'јин етднкдэ метрик (R_n, ρ) фэзасы алыннр. Бу фэзаны $E_n = (R_n, \rho)^{1/2}$ нлэ ншэрэ еднрлэр.

Гејд едэк кн, ејнн бнр хохлугда мұхтэлнф метрика тэ'јин етмэк олар. Мөсөлэн, n -өлчүлү R , нөсөбн фэзасында (IV, § 2) истэнилэн $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ өэ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ нөгтөлэри арасындакы мөсөфөнн

$$\rho_1(X, Y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$$

$$\rho_2(X, Y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$$

$$\rho_3(X, Y) = \begin{cases} 1, & X = Y \text{ оллугда,} \\ 0, & X \neq Y \text{ оллугда} \end{cases}$$

¹ n -өлчүлү Евклнд фэзасы да E_n нлэ ншэрэ олуннр (IV, § 6). Бу долашыгыга сөбөб олнур.

вә с. кими тә'јин етмәк олар. Бунларын һәр бири үчүн метри́к фәза аксиомлары вәдәнилир (буни јохламагы охучулара һавалә едирик!). Беләликлә, ејни бир R_n нөгтәләр чохлауу вәситәсилә (R_n, ρ_1) , (R_n, ρ_2) , (R_n, ρ_3) вә с. кими мүхтәлиф метри́к фәзалар тә'јин олунур.

E_n вә (R_n, ρ) метри́к фәзалары R_n чохлауунын нөгтәләри арасындакы мәсәфәни

$$\rho_p(X, Y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

кими тә'јин етдикдә алынан (R_n, ρ_p) метри́к фәзасынын хүсуси һалларыдыр.

Тә'риф 2. Метри́к R фәзасынын $\rho(X, X_0) \leq \epsilon$ бәрәбәрсизлијини өдәјән бүтүн $X \in R$ нөгтәләри чохлаууна һәмин фәзанын $X_0 \in R$ нөгтәсинин ϵ -трафы (вә ја ϵ -трафы) дејилир. X_0 нөгтәси ϵ -трафын мәркәзи, ϵ әдәди исә ϵ -трафын радиусу адланыр.

X_0 нөгтәсинин ϵ -трафыны $O_\epsilon(X_0)$ илә ишарә едәјәјик.

Тә'риф 3. X_0 нөгтәсинин истәвилән $O_\epsilon(X_0)$ ϵ -трафында Q чохлауунын һәмин нөгтәдән фәргли һеч олмаса бир нөгтәси барса, онда X_0 нөгтәсинә Q чохлауунын лимит нөгтәси дејилир. Q чохлауунын лимит нөгтәси олмајан $X_0 \in Q$ нөгтәсинә һәмин чохлаууны изолә едилмиш нөгтәси дејилир.

Тә'риф 4. Берилмиш $X_0 \in Q$ нөгтәсинин Q чохлаууна дахил олан ϵ -трафы олдугда, она Q чохлауунын дахили нөгтәси дејилир.

Бүтүн нөгтәләри дахили нөгтәләр олан чохлауа ачыг чохлау дејилир.

Тә'риф 5. Бүтүн лимит нөгтәләри өзүнә дахил олан чохлауа гапалы чохлау дејилир.

Метри́к R фәзасынын өзү вә бош чохлау ејни заманда һәм гапалы вә һәм дә ачыг чохлаулардыр.

Метри́к R фәзасынын һәр бир Q алтчохлауу һәмин фәзанын өзүнүн метрикасына нәзәрән метри́к фәзadır. Бу һәлдә, $Q \subseteq R$ чохлауу гапалы олдугда она метри́к R фәзасынын *алт-фәзасы* дејилир.

Тутаг ки, K вә R_1 ики метри́к фәзadır вә онларын арасында елә гаршылыгы биргиләтли ујуунлук јарадылмышдыр ки, бу фәзаларын ујуун чүг элементләри арасындакы мәсәфәләр бәрәбәрди:

$$X' \in R \leftrightarrow Y' \in R \text{ вә } X'' \in R \leftrightarrow Y'' \in R' \text{ оларса,} \\ \rho(X', X'') = \rho(Y', Y'').$$

Онда һәмин фәзалара *изометри́к фәзалар* дејилир.

Бурадан ајындыр ки, изометри́к R вә K_1 фәзалары мүхтәлиф табиләтли үнсүрләрдән ибарәт олса да, онлар метрика (мәсәфә) илә ифадә олунан хәссәләр бахымындан ејни фәза-

лардыр. Буна көрә дә изометри́к фәзалары чох заман ејниләшдириләр.

Метри́к фәзанын элементләри ардычыллыгынын лимитиндән дә данышмаг олар. Тутаг ки,

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}, \dots \quad (2)$$

вә ја $\{X^{(n)}\}$ метри́к R фәзасынын элементләри ардычыллыгыдыр.

Тә'риф 6. Тутаг ки, метри́к R фәзасынын $X \in R$ элементи вә (2) ардычыллыгы үчүн $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X^{(n)}, X) = 0$ бәрәбәрлији өдәнилир. Онда, дејирләр ки, (2) ардычыллыгы X нөгтәсинә јыгылыр вә буны

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)} = X \text{ вә } \text{ја } X^{(n)} \rightarrow X \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

кими јазырлар.

Мәсәлән, метри́к $C[a, b]$ фәзасында $\{x_n(t)\}$ элементләри ардычыллыгы $x(t) \in C[a, b]$ нөгтәсинә јыгылырса, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \right] = 0$$

бәр бәрлији өдәниләр. Бу исә $\{x_n(t)\}$ функцијалар ардычыллыгынын $[a, b]$ парчасында $x(t)$ функцијасына мүнтәзәм јығылмасы демәкдир (XXXVI, § 1).

Тә'риф 7. Метри́к R фәзасынын $\{X^{(n)}\}$ элементләри ардычыллыгы үчүн $\rho(X^{(n)}, X^{(m)}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$) мүнәсибәти өдәнилдикдә она *фундаментал ардычыллыг* дејилир.

Һәр бир јығылан ардычыллыг фундаментал ардычыллыгдыр. Доғрудан да, (2) ардычыллыгы X элементинә јыгылырса, онда $\rho(X^{(n)}, X) \rightarrow 0$ олар. Бурадан вә истәвилән n вә m үчүн доғру олан

$$\rho(X^{(n)}, X^{(m)}) \leq \rho(X^{(n)}, X) + \rho(X, X^{(m)})$$

бәрәбәрсизлијиндән

$$\rho(X^{(n)}, X^{(m)}) \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty \text{)}.$$

Бу тәклифия тәрғи доғру дејилдир. Фундаментал ардычыллыг јығылан олмаја да биләр. Мәсәлән, бүтүн расионал әдәләр чохлауу 1-чи мисалда көстәрилән мәсәфә илә метри́к фәзadır. Бу фәзанын

$$r_1 = 2, r_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \dots, r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

элементләри ардычыллыгы фундаменталдыр; ләкин һәмин фәзанын һеч бир элементинә јығылмыр (сун лимити иррасионал е әдәдидир!).

Тә'риф 8. Метри́к фәзанын һәр бир фундаментал ардычыллыгы һәмин фәзанын бир элементинә јығылырса, она *там фәза* дејилир.

Мисал 4. Бүтүн һәгйғи әдәләр чохлауундан ибарәт олан (мисал 1) метри́к фәза тамдыр.

Бу, бирдәишәнли функцияның лимитиниң варлыгы һаггында олан Коши критерисиндан (XII, § 11) аңдындыр.

Бүтүн расионал әдәлләр чохлугу исә там олмаған метрик фәзалыр

Там олмаған метрик фәзага „җени элементлар“ әлава етмәклә ону тамамламаг, җәни там фәза һагына кәтирмәк олар. Мәсәлән, расионал әдәлләр чохлугуна бүтүн иррасионал әдәлләри әлава етмәклә бүтүн һәгиги әдәлләрдән ибарәт олан там метрик фәза алыныр.

Бу үсул үмуми һалда бәјүк һәммили дәрсликләрдә шәрһ олуныр.

§ 2. n-ӨЛЧҮЛҮ ЕВКЛИД ФӘЗАСЫНДА МӘСАФӘ ВӘ ӘТРАФ АНЛАҖЫШЫ

Бурада n-өлчүлү E_n һәгиги Евклид фәзасы һаггында бир сыра мәлуи фактлары җадә салаг (IV, § 6.7).

E_n фәзасы бүтүн $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ элементлариндән вә җа n-өлчүлү нөггәләрән ибарәтдир. Бу фәзада истәнилән $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вә $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ элементлариниң скалар һасили ашагыдакы бәрәбәрликлә тәҗин олуныр:

$$(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (1)$$

E_n фәзасы хәтти нормалашмыш фәзадыр вә онун истәнилән $X \in E_n$ элементиниң нормасы

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

ким и тәҗин олуныр. Истәнилән $X \in E_n$ вә $Y \in E_n$ элементлары үчүн

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

бәрәбәрсизлиҗ доғрудур. Бундан башга, E_n Евклид фәзасында истәнилән X вә Y нөггәлләри арасындакы мәсафә

$$\rho(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} \quad (2)$$

бәрәбәрлиҗ илә тәҗин олуныр. Бу мәсафә үчүн метрик фәза аксиомлары өдәнилир (§ 1), җәни n-өлчүлү E_n Евклид фәзасы метрик фәзадыр. Бу фәзаның истәнилән X вә Y элементлары үчүн

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \quad (3)$$

Коши—Буняковский бәрәбәрсизлиҗи дә доғрудур.

Җәйд едәк ки, $n=2$ олдугда (2) ифадәси мүстәви үзәриндә җерләшән (x_1, x_2) вә (y_1, y_2) нөггәлләри арасындакы мәсафә, $n=3$ олдугда исә фәзада җерләшән (x_1, x_2, x_3) вә (y_1, y_2, y_3) нөггәлләри арасындакы мәсафә дүстурудур. Бу исә E_2 вә E_3

Евклид фәзаларыны „ади мүстәви“ вә „реал фәза“ кими тәсәввүр етмәҗә имкан верир. $n > 3$ олдугда исә n-өлчүлү E_n Евклид фәзасыны әҗани-һәндәси тәсәввүр етмәк мүмкүн деҗилдир. Белә фәзалар анчаг риәзи үмумиләшмәдир (абстраксиадыр) вә олардан чохдәишәнли функцияларын үмуми нәзәријәсини гурһаг үчүн истифадә олуныр.

Евклид фәзасында истилаһлар вә аңлаҗышлар ади һәндәсәдәки истилаһ вә аңлаҗышларга охшар олараг кәтүрүлүр.

Тәриф 1. n-өлчүлү E_n Евклид фәзасынын

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_{n+1} = \dots = x_n = 0$$

мүнәсибәтини өдәҗән бүтүн $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөггәлләри чохлугуна һәммин фәзаның k-чы координат оху ($k = 1, 2, \dots, n$) деҗилир. $O = (0, 0, \dots, 0)$ нөггәси координат башлангычы адылыр.

Евклид фәзасы метрик фәза олдугундан һәммин фәзада әтраф, лимит нөггәси, дахили нөггә, ачыг чохлуг, гапалы чохлуг вә с. аңлаҗышлары тәҗин олуныр.

Тәриф 2. E_n фәзасынын

$$\rho(X, X^{(0)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^{(0)})^2} < \epsilon \quad (4)$$

бәрәбәрсизлиҗини өдәҗән бүтүн $X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ нөггәлләри чохлугуна мәркәзи $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in E_n$ нөггәсиндә олан ϵ радиуслу n-өлчүлү (ачыг) күрә деҗилир вә $O_\epsilon(X^{(0)})$ илә ишарә олуныр.

Мәркәзи $X^{(0)}$ нөггәсиндә олан ϵ радиуслу n-өлчүлү гапалы күрә $\rho(X, X^{(0)}) < \epsilon$ мүнәсибәтини өдәҗән бүтүн $X \in E_n$ нөггәлләри чохлугуна деҗилир.

E_n фәзасынын

$$|x_1 - x_1^{(0)}| < \delta_1, |x_2 - x_2^{(0)}| < \delta_2, \dots, |x_n - x_n^{(0)}| < \delta_n \quad (5)$$

бәрәбәрсизлиҗини өдәҗән бүтүн $X \in E_n$ нөггәлләри чохлугуна мәркәзи $X^{(0)}$ нөггәсиндә олан n-өлчүлү параллелепипед деҗилир вә $\Pi(X^{(0)}; \delta_1, \dots, \delta_n)$ илә ишарә олуныр.

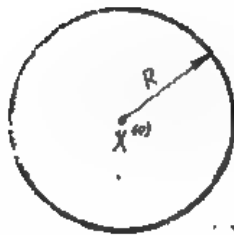
(5) бәрәбәрсиликләрини

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

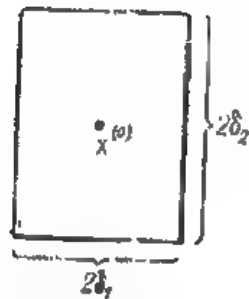
ким и кәтүрдүкдә мәркәзи $X^{(0)}$ нөггәсиндә олан n-өлчүлү гапалы параллелепипед аларыг.

Хүсуси һалда, $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \delta$ оларса, онда $\Pi(X^{(0)}; \delta_1, \dots, \delta_n)$ чохлугу мәркәзи $X^{(0)}$ нөггәсиндә олан n-өлчүлү куб адылыр вә $\Pi(X^{(0)}; \delta)$ илә ишарә олуныр. $\Pi(X^{(0)}; \delta)$ кубы пун тилләриниң узунлугу 2 δ -җа бәрәбәрдир.

Мисал. $n=2$ олдугда $O_n(X^{(0)})$ күрәси мүстәви үзәриндә мәркәзи $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ нөггәсиндә вә радиусу R олан



Шәкил 217



Шәкил 218

дира олар (шәкил 217). $P(X^{(0)}; \delta_1, \delta_2)$ параллелепипеди исә мустәви үзәриндә мәркәзи $X^{(0)}$ нөгтәсиндә вә тәрәфләринин узунлуғу уйғун оларға $2\delta_1$ вә $2\delta_2$ олар дүзбучаглыдыр (шәкил 218).

Тәриф 3. $O_1(X^{(0)})$ күрәсинә $X^{(0)}$ нөгтәсинин ϵ -әтрафы (бәзән күрәви әтрафы). $P(X^{(0)}; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ параллелепипеди исә $X^{(0)}$ нөгтәсинин дүзбучаглы әтрафы дейлир.

Теорем 1. Верилмиш $X^{(0)}$ нөгтәсинин һәр бир ϵ -әтрафы дахилиндә оңун муәййән дүзбучаглы әтрафы вә тәрәпинә, һәр бир дүзбучаглы әтрафы дахилиндә муәййән ϵ -әтрафы йерләшир.

Исбат. Тутар ки: $X^{(0)}$ нөгтәсинин $O_1(X^{(0)})$ ϵ -әтрафы верилмишди. $\delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ көтүрәрәк, мәркәзи $X^{(0)}$ нөгтәсиндә олар $P(X^{(0)}; \delta)$ кубуна баһар. Ајдындыр ки, $P(X^{(0)}; \delta)$ кубуна дахил олар һәр бир X нөгтәси $X^{(0)}$ нөгтәсинин $O_1(X^{(0)})$ ϵ -әтрафына да дахил олар. Догрудан да, $|x_k - x_k^{(0)}| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) бәрәбарсәмиләләринә әс: сәк

$$\rho(X, X^{(0)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^{(0)})^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\epsilon^2}{n}} = \epsilon$$

олар. Демәли, $X^{(0)}$ нөгтәсинин $P(X^{(0)}; \delta)$ дүзбучаглы әтрафы оңун $O_1(X^{(0)})$ ϵ -әтрафынын тамамилә дахилиндә йерләшир.

Инди фәра едәк ки, $X^{(0)}$ нөгтәсинин $P(X^{(0)}; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ дүзбучаглы әтрафы верилмишди. Онда мәркәзи $X^{(0)}$ нөгтәсиндә вә радиусу $r = \min_{1 \leq k \leq n} \delta_k$ олар $O_1(X^{(0)})$ күрәсинин һәмийн дүз-

бучаглынын дахилиндә йерләшәр. Догрудан да, истәнилән $X \in O_1(X^{(0)})$ ($\rho(X, X^{(0)}) < \epsilon$) нөгтәсә үчүн

$$|x_k - x_k^{(0)}| < \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)})^2} = \rho(X, X^{(0)}) < \epsilon < \delta_k$$

олар, йәни $X \in P(X^{(0)}; \delta_1, \dots, \delta_n)$. Башға сөзлә, $X^{(0)}$ нөгтәсинин $O_1(X^{(0)})$ ϵ -әтрафы оңун $P(X^{(0)}; \delta_1, \dots, \delta_n)$ дүзбучаглы әтрафынын дахилиндә йерләшир.

Теорем кәстәрир ки, кәләчәк муһакимәләрдә нөгтәләрин ақчаг ϵ -әтрафына баһар кифајәтди. Буна көрә дә китабын сонјақы бәндләриндә, верилмиш нөгтәсини әтрафы дедиңдә, чох эзмаң оңун ϵ -әтрафы тәһәрдә тутулур.

Тәриф 4. $X^{(0)} \in E_n$ нөгтәсинин истәнилән әтрафында $E \subset E_n$ чохлуғунун һәмийн нөгтәдән фәргли йәһ олмасә бир нөгтәси варса, онда $X^{(0)}$ нөгтәси E чохлуғунун лимит нөгтәси адланыр.

E чохлуғунун лимит нөгтәси олмајан $X^{(0)} \in E$ нөгтәсинә оңун изола едилимиш нөгтәси дейлир.

Лимит нөгтәсинин тәрифиндән ајдындыр ки, $X^{(0)}$ нөгтәси E чохлуғунун лимит нөгтәсиндирсә, онда оңун истәнилән әтрафында һәмийн чохлуғун сонсув сајда нөгтәси йерләшәр.

Верилмиш чохлуғун лимит нөгтәси ола да биләр, олмаја да биләр.

Тәриф 5. E чохлуғу илә оңун бүтүн лимит нөгтәләри чохлуғунун бирләшмәсинә һәмийн чохлуғун гапарычиси дейлир вә \bar{E} илә ишарә олунур.

$\bar{E} = E_n$ олдугда, дейирләр ки, E чохлуғу E_n фәзасында һәр йердә сыхдыр.

Мисал 1. E_n фәзасынын расионал координатлы бүтүн нөгтәләри чохлуғу һәмийн фәзада һәр йердә сыхдыр.

Хүсуси һалда ($n=1$), бүтүн расионал әдәдләр чохлуғу әдәд охунда һәр йердә сыхдыр.

Тәриф 6. $X^{(0)} \in E$ нөгтәсинин E чохлуғуна дахил олар әтрафы олдугда, она һәмийн чохлуғун дахили нөгтәси дейлир.

Тәриф 7. Бүтүн нөгтәләри дахили нөгтәләр олар чохлуға ачыг чохлуғ дейлир.

Бүтүн лимит нөгтәләри өзүнә дахил олар чохлуғ гапарычиси чохлуғ адланыр.

Гапары E чохлуғу үчүн $E = \bar{E}$ олар.

Верилмиш чохлуғ сонлу (йәни сонлу сәјдә нөгтәдән ибарәт) олдугда, оңун йәһ бир лимит нөгтәси олмас. Белә чохлуғ исә гапары чохлуғдыр.

Мисал 2. Мәртәзи $O(0, 0, \dots, 0)$ нөгтәсиндә вә радиусу R олар n -өлчүлү $O_n(0)$ ачыг күрәсинин, йәни

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < R^2 \quad (6)$$

шартини өдәјән бүтүн $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$ нөгтәләри чохлуғунун һәр бир нөгтәси дахили нөгтәдир.

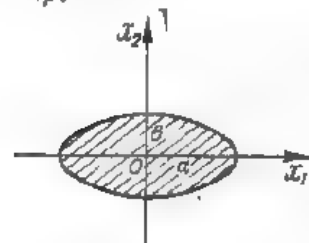
Белә чохлуғ исә ачығ чохлуғдур. Буна көрә дә, чох заман $O_R(0)$ күрәсинә n -өлчүлү ачығ күрә дејилр.

Мисал 3. Мәркәзи $O(0, 0, \dots, 0)$ нөгтәсиндә, радиусу R вә

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2 \quad (7)$$

шартини өдәјән бүтүн $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәләриндән ибарәт олан n -өлчүлү гапәлы күрә гапәлы чохлуғдур.

Тә’риф 8. $X^{(0)} \in E_n$ нөгтәсинин истәнилән әтрафында E чохлуғуна һәм дахил олан вә һәм дә дахил олмајан нөгтәләр јерләшдикдә, она E чохлуғунун сәрһәд нөгтәси дејилр.



Шәкил 219

E чохлуғунун бүтүн сәрһәд нөгтәләри чохлуғуна онун сәрһәди дејилр.

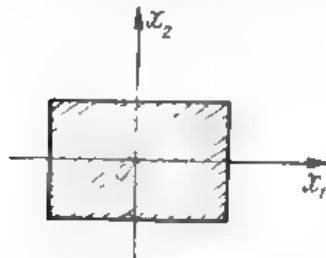
Мисал 4. n -өлчүлү E_n фәзасынын $(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2 + \dots + (x_n - x_n^{(0)})^2 = R^2$

шартини өдәјән бүтүн $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$ нөгтәләри чохлуғунун мәркәзи $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нөгтәсиндә вә радиусу R олан $(n-1)$ -өлчүлү сфера дејилр. Бу

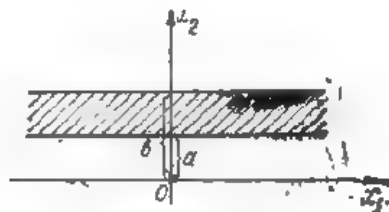
сфераны $S^{(n-1)}$ рлә ишарә едәк.

$S^{(n-1)}$ сферасынын һәр бир нөгтәси ачығ $O_R(X^{(0)})$ вә гапәлы $O_R(X^{(0)})$ күрәсинин сәрһәд нөгтәсиндир. Бу сфера $O_R(X^{(0)})$ ачығ күрәсинин вә $O_R(X^{(0)})$ гапәлы күрәсинин сәрһәдиндир. $S^{(n-1)}$ сферасынын һеч бир дахили нөгтәси јохдур.

Хүсуси һалда, $n=2$ олдугда $S^{(1)}$ сферасы чеврә, $n=1$ олдугда исә $S^{(0)}$ сферасы бир чүт көгтә олар.



Шәкил 220



Шәкил 221

Тә’риф 9. Бүтүн нөгтәләрини, мәркәзи координат башланғымында вә радиусу соңлу эдәд олан һәр һансы күрә дахилиндә јерләшдирмәк мүмкүн олан чохлуға мәнһуд чохлуғ дејилр.

Әкс һалда, чохлуғ гејри-мәнһуд чохлуғ адланыр.

Мисал 5. Мүстәви үзәриндә ($n=2$) јарымохлары a вә b эдәлләри олан еллипсин дахили (шәкил 219) вә тәрәфләринин узунлуғу соңлу олан дүзбучағлы (шәкил 220) мәнһуд чохлуғ.

$$D = \{(x_1, x_2) | -\infty < x_1 < \infty, a \leq x_2 \leq b\}$$

золағы исә гејри-мәнһуд чохлуғдур (шәкил 221).

§ 3. ЕВКЛИД ФӘЗАСЫНЫН НӨГТӘЛӘРИ АРДЫЧЫЛЛЫҒЫ

Һәр бир n турал k эдәдинә n -өлчүлү E_n Евклид фәзасынын бир $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ нөгтәси ујғун гојулдугда E_n фәзасынын

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}, \dots \quad (1)$$

вә ја

$$\{X^{(k)}\} \quad (2)$$

нөгтәләри ардычыллығы алынын. (Ардычыллығын һәлләри мұхтәлиф олмаја да бәләр).

Тә’риф 1. Тупаг ки, истәнилән мүсбәт ϵ эдәди верилдикдә елә натурал N эдәди көстәрмәк олуր ки, k -нын N -дән кичик олмајан бүтүн гијмәтләриндә

$$\rho(X^{(k)}, X) < \epsilon \quad (k \geq N) \quad (3)$$

бәрабәрсизлији өдәнилик. Онда $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәсинә $k \rightarrow \infty$ шәрһиндә $\{X^{(k)}\}$ ардычыллығынын лимити дејилр вә

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X \quad (4)$$

вә ја

$$X^{(k)} \rightarrow X \quad (k \rightarrow \infty) \quad (5)$$

кили јазылыр.

(1) ардычыллығы лимитинин X нөгтәси олмасы $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(X^{(k)}, X) = 0$ бәрабәрлијинин өдәниләси демәкдир.

Лимити олан ардычыллығы јығылан, лимити олмајан ардычыллығы исә дағылан ардычыллығы дејилр.

Ардычыллығын лимити X олдугда, дејирләр ки, һәмни ардычыллығы X нөгтәсинә јығылыр.

Тә’рифдән ајдындыр ки, $\{X^{(k)}\}$ ардычыллығы X нөгтәсинә јығылырса, онда һәмни ардычыллығын мәнһуд нөмрәдән сонра кәлән бүтүн һәлләри X нөгтәсинин ϵ -әтрафында јерләшир. Бу

налда ардычыллыгын анчаг сонлу сайда һәдди һәмкин ϵ -этраф-
да јерләшмә,ә биләр.

Инди фәзә едәк ки, $\{X^{(k)}\}$ ардычыллыгы X нөгтәсинә јы-
ғылыр. Онда тәрифә керә истәнилән $\epsilon > 0$ үчүн (3) мүнәси-
бәти, јә'ки

$$\rho(X^{(k)}, X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i)^2} < \epsilon \quad (k \geq N)$$

бәрабәрсизлији өдәнилик. Бурадан истәнилән l ($1 \leq l \leq n$)
үчүн

$$|x_l^{(k)} - x_l| < \epsilon \quad (k \geq N)$$

бәрабәрсизлији алынар ки, бу да

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_l^{(k)} = x_l \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

олдугуну көстәрир.

Бу тәклифин тәрсин дә доғрудур. l (6) мүнәсибәтләрини и
доғрулуғундан (4) бәрабәрлији алынар. Доғрудан да, (6) бә-
рабәрлијинин доғрулуғу 0 дәмәкдир ки, истәнилән $\epsilon > 0$ үчүн
елә $N_l = N_l(\epsilon)$ вар ки, k -нын $k \geq N_l$ бәрабәрсизлијини өдәјән
бүтүн гијмәтләриндә

$$|x_l^{(k)} - x_l| < \epsilon$$

мүнәсибәти өдәнилик. ϵ фәзинә $\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ әдәдини көтүрсәк, онда

k -нын $N = \max_{1 \leq l \leq n} N_l \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \right)$ әдәдиндән кичик олмајән бүтүн гиј-
мәтләриндә

$$|x_i^{(k)} - x_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

бәрабәрсизликләри вә буна керә дә

$$\rho(X^{(k)}, X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i)^2} < \sqrt{\frac{n \cdot \epsilon^2}{n}} = \epsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилик. Демәли, $\{X^{(k)}\}$ ардычыллыгы $X =$
 (x_1, x_2, \dots, x_n) нөгтәсинә јығылыр.

Беләликлә ашагыдакы теорем исбат олунур:

Теорем 1. $\{X^{(k)}\}$ ($X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in E_n$) ар-
дычыллыгынын $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$ нөгтәсинә јы-
ғылан олмасы үчүн

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

бәрабәрликләринин өдәникләси зарури вә кафи
шәртдир.

Бу теорем көстәрир ки, n -өлчүлү фәза нөгтәләринин $\{X^{(k)}\}$
ардычыллыгынын X нөгтәсинә јығылма мәсәләси, оиларын

ујғун координатлары олан $\{x_i^{(k)}\}$ әдәди ардычыллыгынын уј-
ғун x_i әдәдинә јығылмасына кәтирилир. Бурадан ашагыдакы
тәклифләрин доғрулуғу ајдындыр:

1. Јығылан $\{X^{(k)}\}$ ардычыллыгы мөһдуддур.

2. Јығылан ардычыллыгын анчаг бир лимити вар.

3. $\{X^{(k)}\}$ ардычыллыгы X нөгтәсинә јығылырса, онда онун
истәнилән $\{X^{(k)}\}$ алтардычыллыгы да һәмкин нөгтәјә јығылыр.
Чохөлчүлү фәзанын нөгтәләри ардычыллыгы үчүн Коши
критериси вә Болсано—Вејерштрасс теоремин дә доғрудур.

Теорем 2. (Болсано—Вејерштрасс). *Истәнилән мөһ-
дуд $\{X^{(k)}\}$ ардычыллыгындан јығылан алтардычыллыгы
ајырмаг олар.*

Исбаты. $\{X^{(k)}\}$ ардычыллыгынын мөһдуд олмасындан чы-
хыр ки, $\{x_i^{(k)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) әдәди ардычыллыгыларын һә-
мысы мөһдуддур. Буна керә дә әдәди ардычыллыглар һагында
олаң Болсано—Вејерштрасс теореминә (XII, § 4) керә мөһ-
дуд $\{X^{(k)}\}$ ардычыллыгында јығылан алтардычыллыг ајырмаг
олар: $x_1^{(k_1)} \rightarrow x_1$ ($k_1 \rightarrow \infty$), $X^{(k_1)}$ нөгтәләринин икинчи коорди-
натларындан ибарәт олан $\{x_2^{(k_1)}\}$ әдәди ардычыллыгы да мөһ-
дуд олдугундан ондан јығылан алтардычыллыг ајырмаг олар:
 $x_2^{(k_2)} \rightarrow x_2$ ($k_2 \rightarrow \infty$).

Гәјд едәк ки, $\{x_1^{(k_1)}\}$ әдәди ардычыллыгы $\{x_1^{(k_1)}\}$ әдәди ар-
дычыллыгынын алтардычыллыгы олдугундан $x_1^{(k_1)} \rightarrow x_1$ ($k_1 \rightarrow \infty$)
олар x_1 әдәдинә јығылан ардычыллыгынын истәнилән алтарды-
чыллыгы да һәмкин әдәдә јығылыр, XII, § 2).

Беләликлә, $x_1^{(k_1)} \rightarrow x_1$ ($k_1 \rightarrow \infty$) вә $x_2^{(k_2)} \rightarrow x_2$ ($k_2 \rightarrow \infty$).

Бу мүнәкимәни n дәфә давам етдирмәклә

$$x_i^{(k_i)} \rightarrow x_i \quad (k_i \rightarrow \infty), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

шәртини өдәјән $\{x_i^{(k_i)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) алтардычыллыглары-
ны аларыг. Бурадан, 1-чи теоремә керә ајдындыр ки, ајрылан
 $\{X^{(k_i)}\}$ алтардычыллыгы $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәсинә јығы-
лыр.

Ејни гәјдә илә исбат етмәк олар ки, $X^{(k)}$ нөгтәси $E \subset E$,
чохлуғунун лимит нөгтәсидирсә, онда E чохлуғундан һәмкин
нөгтәјә јығылан ардычыллыг ајырмаг олар.

Тутаг ки, n -өлчүлү E_n Евклид фәзасынын нөгтәләри арды
чыллыгы $\{X^{(k)}\}$ мүнәјән X нөгтәсинә јығылыр, јә'ни $\rho(X^{(k)}, X) \rightarrow$
 0 ($k \rightarrow \infty$). Онда метрик фәза аксиомларынын үчүнчүсүнә
(үчбучаг бәрабәрсизлијинә) керә истәнилән m вә k үчүн

$$\rho(X^{(m)}, X^{(k)}) \leq \rho(X^{(m)}, X) + \rho(X, X^{(k)})$$

олдугундан

$$\rho(X^{(m)}, X^{(k)}) \rightarrow 0 \quad (m, k \rightarrow \infty) \quad (7)$$

олар. Бу, о демәкдир ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ нөмрәси вар ки, m вә k -нын N_ε -дан сонра кәлән бүтүн гиҗмәтләриндә

$$\rho(X^{(m)}, X^{(k)}) < \varepsilon (m, k \geq N_\varepsilon)$$

бәрабәрсивзлији өдәкилир.

(7) мүнәсибәти өдәниликдә $\{X^{(k)}\}$ ардычыллыгына фунда-ментал (вә ја өзүнә йығылан) ардычыллыг дејилир.

Беләликлә, биз көстәрдики ки, һәр бир йығылан ардычыл-лыг фундаменталдыр. Бунун тәрси дә доғрудур.

Нәтижәдә ашағыдакы теоремни алырыз.

Теорем 3 (Коши критериси). $\{X^{(k)}\}$ ардычыллыгынын йығылан олмасы үчүн онун фундаментал олмасы ва-рири вә кафи шәртдир.

§ 4. ЕВКЛИД ФЭЗАСЫНДА ДҮЗ ХЭТТ. КӘСИЛМӘЗ ӘЈРИ ВӘ ОБЛАСТ АНЛАЈЫШЫ

n -өлчүлү E_n Евклид фәзасынын иктијари $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нөгтәсини вә гејд олуимуш $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәдләрини көтүрәк.

Тә’риф 1. E_n фәзасынын, координатлары

$$x_i = x_i^{(0)} + \lambda_i t, \quad -\infty < t < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

бәрабәрликләрини, өдәјән бүтүн $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтә-ләри чохлауна E_n Евклид фәзасында $\{X^{(0)}\}$ нөгтәсидән $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ вектору истигамәтиндә кечән дүз хәтт дејилир. $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ вектору (1) дүз хәттин истигамәтләндириши вектору адланыр t параметри (1) бәрабәр-лијиндә бүтүн һәгиги гиҗмәтләри алыр.

(1) дүз хәттинин, t параметринин $a < t < b$ гиҗмәтләринә ујғун һиссәсинә $A = (x_1^{(0)} + \lambda_1 a, x_2^{(0)} + \lambda_2 a, \dots, x_n^{(0)} + \lambda_n a)$ вә $B = (x_1^{(0)} + \lambda_1 b, x_2^{(0)} + \lambda_2 b, \dots, x_n^{(0)} + \lambda_n b)$ нөгтәләрини бирләш-дирән дүз хәтт парчасы (AB парчасы) дејилир.

t параметри a -дан b -ја гәдәр ертараг дәјишдикдә алынған M нөгтәси A -дан B -ја кими дәјишәрәк бүтүн AB парчасыны тәшкил едирсә, онда дејирләр ки, AB парчасы t параметри-нин артмасы үзрә истигамәтләнмишдир. Бу һалда, A нөгтәси парчаынын башланғычы, B исә сон нөгтәси адланыр.

(1) бәрабәрлијиндә t параметри $a < t < \infty$ областында дә-јишдикдә шүә, јә’ни һәммин дүз хәттин сонсуз һиссәси алы-ныр.

Инди E_n фәзасында X_0, X_1, \dots, X_m нөгтәләрини көтүрәк, $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{m-1}, X_m$ парчаларынын бирләшмәсинә $с$ -ныг хәтт дејилир вә X_0, X_1, \dots, X_m илә ишарә олуыр. X_0 вә X_m нөгтәләри сыныг хәттин ушлары, X_k нөгтәләри исә сыныг хәттин тәләләри адланыр.

Тутаг ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ функцијалары верилимишдир. Онда t -нин һәр бир $t \in [a, b]$ гиҗмәтинә n -өлчүлү E_n фәзасынын бир $X = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ нөгтәси ујғун олар.

Тә’риф 2. Координатлары һәр кансы $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функцијалар олан $X = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ нөгтәләри чохлауна E_n фәзасында кәсилмәз әјри дејилир. t әјринин параметри, $A = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_n(a))$ нөг-тәси әјринин башланғычы, $B = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_n(b))$ нөгтәси исә сому адланыр.

Параметрин $[a, b]$ парчасындан көтүрүлүшү мұхтәлиф ги-мәтләринә әјрини мұхтәлиф нөгтәләрини ујғун олмасы һә-мин әјрини өз-өзү илә кәсишмәдијини көстәрир

Тә’риф 3. E чохлауғунун иктијари ики нөгтәсини, бү-түн нөгтәләри һәммин чохлауға дахил олан бир кәсилмәз хәтлә (вә ја сыныг хәтлә) бирләшдирмәк мүмкүн олдугда, она рабитәли чохлау дејилир.

Ачыг вә рабитәли чохлау област адланыр. Областын сәрһәдини өзүнә бирләшдирдиңдә гапалы област алыныр.

Гапалы област гапалы чохлауғдур.

Мисал 1. 2-чи параграфын

5-чи мисалында көстәрилән чо-хлуғларын һәр бири әјрылығда (шәкил 219, 220, 221) рабитәли чохлауғдур. Лакии ики мұхтәлиф консентрик һалгадаи ибарәт олан чохлау рабитәли чохлау дејил-дир. Чүнки ики мұхтәлиф кон-сентрик һалганын нөгтәләрини тамамилә һәммин һалгаларда јер-ләшән кәсилмәз хәтлә бирләш-дирмәк мүмкүн дејилдир (шә-кил 222)

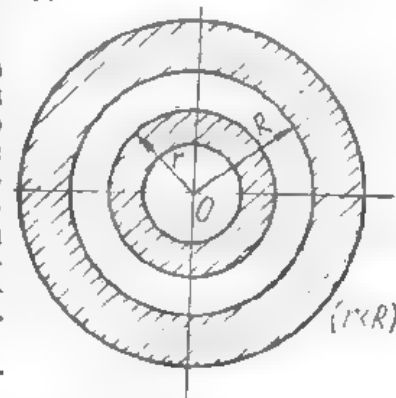
Тутаг ки, G ачыг вә ја гапа-лы областдыр.

Тә’риф 4. G областынын нөгтәләри арасынданкы мәса-фәләрин дөгиг јухары сәрһәдигә һәммин областын диаметри дејилир. G областынын диаметрини $d(G)$ илә ишарә етсәк, тә’рифә кәрә

$$d(G) = \sup_{X_1, X_2 \in G} \rho(X_1, X_2).$$

Мисал 2. Мүстәви үзәриндә ($n=2$) эллипси диаметри бә-јүк охуна, дүзбучагынын диаметри диагональна, дүзбучагыг үчбучагыг диаметри гипотенузуна бәрабәрдир. Бундан башга,

$$d[O_R(X^{(0)})] = d[\overline{O_R(X^{(0)})}] = 2R.$$



Шәкил 222

ЧОХДЭЈИШЭНЛИ ФУНКСИЈА, ОНУН ЛИМИТИ ВЭ КЭСИЛМЭЗЛИЈИ

§ 1. ЧОХДЭЈИШЭНЛИ ФУНКСИЈАНЫН ТЭ'РИФИ

Тутар ки, n -өлчүлү Евклид фэзасынын $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтэлэринин $E \subseteq E_n$ чохлуғу вэ һәгиги W әдәдләринин $F \subseteq E_1$ чохлуғу верилиншидир.

Тә'риф 1. E чохлуғунук һәр бир $X \in E$ нөгтәсинә F чохлуғундан мүәјјән $W = f(X) \in F$ әдәдини гаршы гојан f ујғунлуғуна E чохлуғунда тә'јин олунмуш вэ шүчәтләри f чохлуғуна дахил олан функција (вә ја E -нин F -ә ин'икасы) дејилир.

E чохлуғу функцијаанын тә'јин областы, f чохлуғу исә функцијаанын гијмәтләри чохлуғу адланыр.

Бу һалда, f функцијасына n (һәгиги) дәјишәнли функција да дејилир вә

$$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

вә ја

$$W = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

кимн ишарә олунур. Бурада X нөгтәсинин x_1, x_2, \dots, x_n координатлары функцијаанын аргументләри, W исә онун X нөгтәсиндә гијмәти (вә ја функцијаанын асылы дәјишәни) адланыр.

Бир мәһәти хүсуси гәјд етмәк ләзымдыр. f функцијасы илә онун X нөгтәсиндәки $f(X)$ гијмәти мүхтәлиф олдуғуна бахмәјарак онлары биз чоҳ заман „әјирмырыґ“ вә f функцијасы әвәзинә $W = f(X)$ вә ја $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцијасы дејирик (әлбәттә, бу, гарышыґлыға сәбәб олмур).

Бундан башға, $n = 2$ олдуғда $f(x_1, x_2)$ әвәзинә чоҳ вахт $f(x, y)$ (икидәјишәнли функција), $n = 3$ олдуғда исә $f(x_1, x_2, x_3)$ әвәзинә $f(x, y, z)$ јазылыр.

Бирдәјишәнли функцијалар кимн чоҳдәјишәнли функцијалар да аналитик үсулла, чәдвәл шәклиндә, графики үсулла, програм вәситәсилә вә с. шәклиндә верилә биләр. Функција аналитик үсулла, ја'ни дүстур шәклиндә верилдикдә онун тә'јин областы бә'зән көстәрилмир. Буву функцијаанын аналитик ифадәсинә әсасән тапмағ олур.

Верилмиш функцијаанын аналитик ифадәсинин мә'насы олдуғу вә функцијааның сонлу һәгиги гијмәтләр адыгы нөгтәләр чохлуғуна һәмнн функцијаанын варлығ (вә ја тәби и варлығ) областы дејилир.

Мисал 1. Икидәјишәнли $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функцијасынын варлығ областы мәркәзи координат башланғычында вә радиусу ваһид олан һаһалы диярә, ја'ни $x^2 + y^2 \leq 1$ шәртинн өдәјән бүтүн (x, y) нөгтәләри чохлуғудур (шәкил 223)

Мисал 2. n -дәјишәнли $W = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ функцијасынын варлығ областы бүтүн $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәләри чохлуғудур (ја'ни бүтүн n -өлчүлү Евклид фэзасыдыр).

Мисал 3. n -дәјишәнли

$$W = \ln(r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)$$

функцијасынын варлығ областы

$$r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 > 0$$

шәртиндән тә'јин олунур. Бу исә мәркәзи $O(0, 0, \dots, 0)$ нөгтәсиндә вә радиусу r олан ачығ күрәдир.

Бирдәјишәнли функцијаларда олдуғу кимн, чоҳдәјишәнли функцијаларын да „графикиндән“ данышымағ олар.

Тә'риф 2. $E \subseteq E_n$ чохлуғунда тә'јин олунмуш $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцијасынын графики $(n+1)$ -өлчүлү фэза нөгтәләринин

$$Q = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, W) \in E_{n+1} \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E, W = f(X)\} \quad (2)$$

чохлуғуна дејилир.

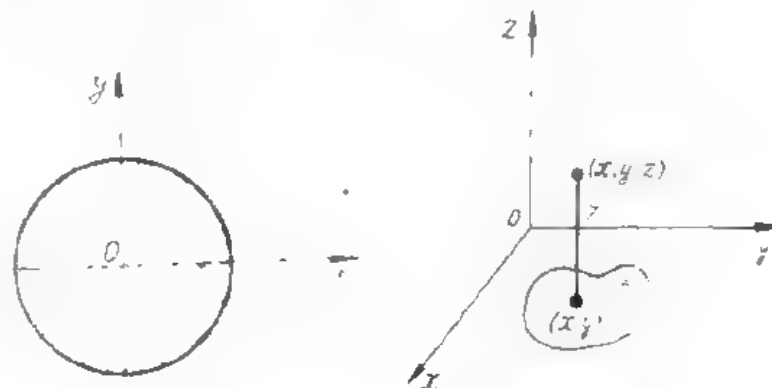
$n \geq 3$ олдуғда бу графики һәндәси тәсвир етмәк чоҳ „чәтниндир“.

Икидәјишәнли $z = f(x, y)$ функцијасынын графикини исә һәндәси оларак көстәрмәк олар. Бу мәғсәллә һәмнн функцијаанын тә'јин областыны σ илә ишарә едәк. Онда онун графики үчөлчүлү фэзада јерләшән

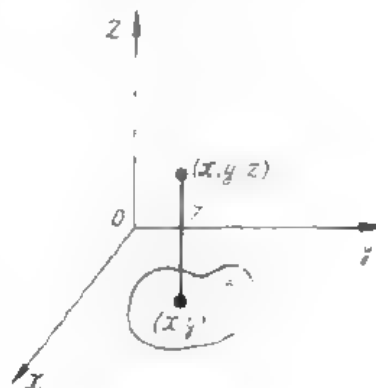
$$Q = \{(x, y, z) \in E_3 \mid (x, y) \in \sigma, z = f(x, y)\} \quad (3)$$

чохлуғу олар. Бу чохлуғун һәр бир (x, y, z) нөгтәсинин z аппликаты f функцијасынын $(x, y) \in \sigma$ нөгтәсиндә гијмәтиндир (шәкил 224).

Q чохлуғуну тә'јин етмәк үчүн σ областынын һәр бир (x, y) нөгтәсиндә Oxy мүстәвкисинә галдырылмыш перпендикулар



Шәкил 223

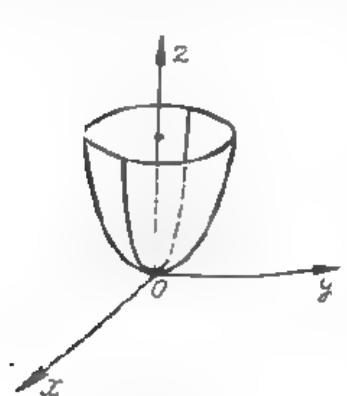


Шәкил 224

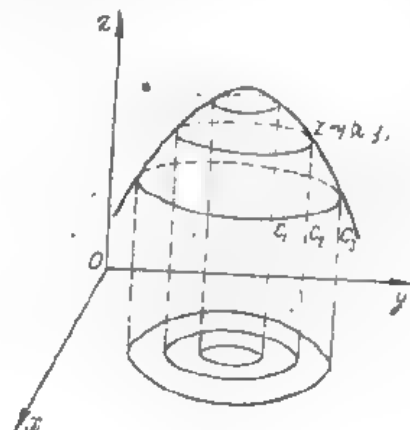
үзәриндә $z = f(x, y)$ әдәдинә барабар нарча айырмаг لازимдыр (шәкил 224). Алынган (x, y, z) нөггәләри O чохлуғуну тәшкил едир вә онларын һәндәси Јери чөх заман үчөлчүлү фәзада сәтһ олур. Бу сәтһин тәнлији $z = f(x, y)$ олар.

Демәли, икидәјишәнли $z = f(x, y)$ функцијасынын графиги сәтһдир вә бу сәтһин (Oxy) мүстәвиси, үзәринә проексиясы һәмин функцијанын тәји областыдыр.

Мисал 4. $z = x^2 + y^2$ функцијасынын графиги еллиптик параболоид (VII, § 10) олар (шәкил 225).



Шәкил 225



Шәкил 226

Икидәјишәнли функцијанын графиги олан сәтһ онун дәјишмә характери һагғында мүәјән тәсәвүр јарадыр.

Икидәјишәнли функцијаны һәндәси көстәрмәк үчүн сәвијә хәтләриндән дә истифадә олунур. $z = f(x, y)$ функцијасынын сјни сабит „С“ гијмәти алдығы (x, y) нә тәләри чохлуғуна һәмин функцијанын сәвијә хәтти дејилир. Бурадин алдындыр ки, сәвијә хәттинин тәнлији $f(x, y) = C$ олар.

С әвәзинә c_1, c_2, c_3, \dots көтүрмәклә $f(x, y)$ функцијасы үчүн мүхтәлиф сәвијә хәтләри аларыг. Бу сәвијә хәтләринин, $z = f(x, y)$ сәтһини (Oxy) мүстәвисинә паралел олан $z = c_1, z = c_2, z = c_3, \dots$ мүстәвиләри илә кәсәрәк, кәсәлимә хәтләрини, (Oxy) мүстәвиси үзәринә проексияламаглә дә алмаг олар (шәкил 226).

Сәвијә хәтләринин сыхлашдығы Јердә $z = f(x, y)$ функцијасы сүр'әглә артыр вә ја азалыр. Сәвијә хәтләри сејрәк Јерләшлији Јердә исә функција Јавап дәјишир. Функцијанын максимум вә минимум гијмәтләр глдығы нөггәләрдә сәвијә хәтләри нөггәјә чеврилир, һәмин нөггәнин Јақын атрафында исә сәвијә хәтләри гапалы вә концентрик шәкилдә Јерләшир.

Үчдәјишәнли функцијаларын дәјишмә характериһи тәји етмәк үчүн сәвијә сәтһләри гурулу.

Бирдәјишәнли функцијалар һагғында олан бир сыра аңгәјишәр чөхдәјишәнли функцијалар үчүн дә вардыр.

Чөхдәјишәнли функцијаларын лимитини, кәсәлимәзлиһини, дифференциалланмасынын, екстремумуну вә с. сонракы параграфларда атрафлы өјрәнәчәјик.

§ 2. ФУНКЦИЈАНЫН ЛИМИТИ

Тутаг ки, f функцијасы $E \subset E_n$ чохлуғунда тәји олунмуш-лур вә $X^{(0)} \in E_n$ нөггәси бу чохлуғун лимит нөггәсидир ($X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$) нөггәси E чохлуғуна дахил ола да биләр, олмаја да биләр). Онда E чохлуғундан $X^{(0)}$ нөггәсинә Јығылан $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}, \dots$ (1)

ардычыллыгы айырмаг олар.

Алдындыр ги, E чохлуғундан $X^{(0)}$ нөггәсинә Јығылач чох ардычыллыг айырмаг мүмкүндүр.

f функцијасынын (1) нөггәләриндә алдығы гијмәтләр

$$f(X^{(1)}), f(X^{(2)}), \dots, f(X^{(k)}), \dots \quad (2)$$

ардычыллыгыны әмәлә кәтирир.

Тәриғ 1. E чохлуғунун $X^{(0)}$ нөггәсинә Јығылан исә-ниләп $\{X^{(k)}\} (X^{(k)} \neq X^{(0)})$ нөггәләри ардычыллыгына f функ-сијасынын уғун олин (2) гијмәтләри ардычыллыгынын һәмиси ејни бир A әдәдинә Јығылдыгда, һәмин A әдәдинә E чохлуғу үзәр $X \rightarrow X^{(0)}$ шәртиндә вә ја $X = X^{(0)}$ нөггәсиндә f функцијасынын лимити дејилир.

Тәриғ 2. Тутаг ки, сонку A әдәди, $X^{(0)}$ нөггәси вә исәниләп $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, E чохлу-гунун

$$0 < \rho(X, X^{(0)}) < \delta \quad (3)$$

барбарсиәзлиһини өдәјән бүтүн $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ нөг-гәләриндә

$$|f(X) - A| < \varepsilon \quad (4)$$

мүнәсибәтти өтәнилир. Онда A әдәдинә $X \rightarrow X^{(0)}$ шәртиндә E чохлуғу үзәр f функцијасынын лимити дејилир.

A әдәдинин E чохлуғу үзәр $X \rightarrow X^{(0)}$ шәртиндә f функција-сынын лимити олмасынын

$$\lim_{X \rightarrow X^{(0)}} f(X) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^{(0)} \\ x_2 \rightarrow x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n \rightarrow x_n^{(0)}}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \quad (5)$$

ва ја

$$f(X) \rightarrow A \quad (X \rightarrow X^{(0)}, X \in E) \quad (6)$$

кими јазырлар.

Гејд едэк ки, A эдэди $X \rightarrow X^{(0)}$ шэртиндэ f функцијасынын лимити олдугда (4) бэрэбэрсизлијинин $X = X^{(0)}$ нөгтэсиндэ едэкилмаси тэлэб олунамур. f функцијасы $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ тэ'јин олунадугда исэ онун һэмин нөгтэдэ лимити $f(X^{(0)})$ гијмэтинэ бэрэбэр олг да билэр, олмэја да билэр.

Бирдэјишэли функцијаларда олдугу кими (XII, § 6) чохдэ-јишэли функцијаларын да лимитинин 1-чи вэ 2-чи тэ'рифлэ-ринин еквивалент олдугуну көсгэрмэк олар. Була көрэ дэ, верилимш функцијанын лимитини һесапламаг үчүн бу тэ'риф-лэрин һансы мүнәсибдирсэ, ондан да истифадэ етмэк лазымдыр.

Јухарыдакы тэ'рифлэрдэ E чохлуғу олараг $X^{(0)}$ нөгтэсиндэн кечэн мүнәјјэн дүз хэтти вэ ја әјринин нөгтэлэри чохлуғуну да көтүрмэк олар.

Тэ'риф 3. E чохлуғу $X^{(0)}$ нөгтэсиндэн кечэн мүнәјјэн әјри-нин нөгтэлэри чохлуғу олдугда, f функцијасынын E чохлуғу үзрә $X \rightarrow X^{(0)}$ шэртиндэ лимитинэ функцијанын һэмин әјри үзрә $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ лимити дејилир.

Хүсуси һалда, E чохлуғу $X^{(0)}$ нөгтэсиндэн мүнәјјэн истига-мэтдэ кечэн дүз хэттин нөгтэлэри чохлуғу олдугда, f функ-сијасынын E чохлуғу үзрә $X \rightarrow X^{(0)}$ шэртиндэ лимитинэ, функ-сијанын һэмин истигамэт үзрә $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ лимити дејилир.

Тэ'риф 4. E чохлуғу, $X^{(0)}$ нөгтэсинин өз дахилинэ алам һэр һансы ачыг чохлағ вэ ја $X^{(0)}$ нөгтэсинин ε -этрафы $O_\varepsilon(X^{(0)})$ олдугда ($X^{(0)}$ нөгтэси һэмин чохлаға дахил олмэја да билэр), f функцијасынын E чохлуғу үзрә $X \rightarrow X^{(0)}$ шэртиндэ лимитинэ һэмин функцијанын $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ лимити деји-лир („ E чохлағу үзрә“ ифадэси атылыр).

Бу һалда, (5) вэ (6) бэрэбэрликлэри ујғун олараг

$$\lim_{X \rightarrow X^{(0)}} f(X) = A$$

вэ

$$f(X) \rightarrow A \quad (X \rightarrow X^{(0)})$$

кими јазылыр.

Ајдындыр ки, f функцијасынын $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ соялу лимити варса, онда онун һэмин нөгтэдэ истэнилан әјри вэ истэнилан истигамэт үзрә дэ лимити вар вэ бу лимитлэрин һамысы функ-сијанын $X^{(0)}$ нөгтэсиндэки лимити илэ үст-үстэ дүшүр. Демэли, верилимш функцијанын һеч олмаса ики истигамэт вэ ја әјри үзрә $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ лимити мүхтэлифдирсэ, онда һэмин функ-сијанын $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ лимити јохдур.

Мисал 1. Ашағыдакы кими тэ'јин олунамш икидэјишэли f функцијасынын $(0, 0)$ нөгтэсиндэ лимити јохдур

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ олдугда,} \\ 0, & x = y = 0 \text{ олдугда.} \end{cases} \quad (7)$$

Догрудан да, $y = kx$ олдугда

$$f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2}$$

вэ функцијанын $y = kx$ дүз хэтти истигамэтиндэ $(0, 0)$ нөгтэ-синдэ лимити $\frac{k}{1+k^2}$ эдэдинэ бэр бэр олур. Бурадан ајдындыр ки, (7) функцијасынын $y = x$ ($k = 1$) вэ $y = 2x$ ($k = 2$) истига-мэтлэриндэ лимити ујғун олараг $\frac{1}{2}$ вэ $\frac{2}{5}$ эдэдлэридир. Демэ-ли, f функцијасынын $(0, 0)$ нөгтэсиндэ лимити јохдур.

Мисал 2. $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ бэрэбэрлијилэ тэ'јин олунамш φ функцијасынын $(0, 0)$ нөгтэсиндэ лимити вар вэ сифра бэра-бэрдир.

Догрудан да, $(0, 0)$ нөгтэсинэ јығылан истэнилан (x_k, y_k) нөгтэлэр ардычыллыгы үчүн

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \varphi(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^2 + y_k^2) = 0.$$

Бирдэјишэли функцијаларын лимити һаггында олан тэк-лифлэр (XII, § 11, ...) ујғун шәкилдэ чохдэјишэли функција-лар үчүн дэ догрудур. Бу теоремлэрин анчаг бирини бурада исбат едэк. Јердэ галай тәклифлэрин дејилши вэ исбаты охучуларг һавалэ олунамур.

Теорем 1. $X^{(0)}$ нөгтэсинин мүнәјјэн әтрафында тә-јин олунамш f функцијасынын һэмин нөгтэдэ соялу

$$\lim_{X \rightarrow X^{(0)}} f(X) = A \neq 0$$

лимити варса, онда $X^{(0)}$ нөгтэсинин елэ $O_\varepsilon(X^{(0)})$ әтра-фы вар ки, бу әтрафда $f(X)$ илэ A -нын ишарэси ејни-оир.

Исбаты. Функција лимитинин тэ'рифинэ көрә $\varepsilon = |A|$ дэди үчүн $X^{(0)}$ нөгтэсинин елэ $O_\varepsilon(X^{(0)})$ әтрафы вар ки, бүтүн $X \in O_\varepsilon(X^{(0)})$ ($X \neq X^{(0)}$) нөгтэлэриндэ $|f(X) - A| < |A|$ вэ ја

$$A - |A| < f(X) < A + |A|$$

бэрэбэрсизлији едэнилир. Бурадан ајдындыр ки, $A > 0$ олдугда $f(X) > A - A = 0$, $A < 0$ олдугда исэ $f(X) < A + |A| = 0$ олар.

Гејд едэк ки, верилимш $X^{(0)}$ нөгтэсинин мүнәјјэн әтрафында $(X^{(0)})$ нөгтэси мүстәсна олмэгла тэ'јин олунамш f вэ φ функ-

сиялгы үчүн угуя шартлар дахилинде

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} [f(x) \pm \varphi(x)] &= \lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x^{(0)}} \varphi(x), \\ \lim_{x \rightarrow x^{(0)}} [f(x) \cdot \varphi(x)] &= \lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x^{(0)}} \varphi(x), \\ \lim_{x \rightarrow x^{(0)}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} \varphi(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} \varphi(x) \neq 0)\end{aligned}$$

вә б. мүнәсибәтләр доғрудур.

Чохдәјишәнли функцијаларын лимитиниң сонсузлуг $\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) = \infty$ олмасынын вә $X \rightarrow \infty$ шәртиндә ($X^{(0)} = \infty$) лимитиниң тәрифини бирдәјишәнли функцијаларын үгүн тәрифләринә (X.I, § 7, § 8) аңлаштырып сәләмәт ол. р. Мәсәлән, $X^{(0)}$ нөгтәсинин мүәјјән $O_\delta(X^{(0)})$ әтрафында ($X^{(0)}$ нөгтәси мүстәснадыр) тәјин олунмуш f функцијасы үчүн $\lim_{x \rightarrow X^{(0)}} f(x)$

олмасы о демәкдир ки, истәдилән $N > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, $0 < \rho(X, X^{(0)}) < \delta$ бәрәбәрсизлигини едәјән бүтүн $X \in O_\delta(X^{(0)})$ нөгтәләрндә $|f(X)| > N$ мүнәсибәти едәзиләр.

Тәриф. $X = X^{(0)}$ нөгтәсиндә лимити сыфра бәрәбәр олан f функцијасына $X \rightarrow X^{(0)}$ шәртиндә сонсуз кичилән функција дејиләр.

Чохдәјишәнли функцијалар үчүн

$$f(x) = O[\varphi(x)] \quad (x \rightarrow X^{(0)}),$$

$$f(x) = o[\varphi(x)] \quad (x \rightarrow X^{(0)})$$

вә

$$f(x) \sim \varphi(x) \quad (x \rightarrow X^{(0)})$$

мүнәсибәтләрн бирдәјишәнли функцијаларда олдуғу кими (XII, § 15) тәјин олунур.

§ 3. ТӘХРАР ЛИМИТ

Әввәлки параграфда функција лимитинә $X \rightarrow X^{(0)}$ шәртиндә, јәни $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәсинин бүтүн x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) координатлары $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нөгтәсинин угуя $x_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) координатларына ејни заманда јакынлашдыгда ($x_i \rightarrow x_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)) тәриф верилмишдир. Буна көрә дә һәмни лимитә бәзән n -гәт лимит ($n = 2$ олдугда икигәт, $n = 3$ олдугда үчгәт вә с.) дејиләр.

Чохдәјишәнли функцијаларын, x_i аргументләрн нөвбә илә угуя $x_i^{(0)}$ әдәлләринә јакынлашдыгда да лимитиндән данышмағ оләр. Белә алыһаң

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^{(0)}} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^{(0)}} \dots \lim_{x_n \rightarrow x_n^{(0)}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

лимитинә f функцијасынын **тәкрат лимити** дејиләр. (1) ифадәсиндә лимитләрн јерини дәјишмәклә мүхтәлиф тәкрат лимитләр алмағ оләр.

Икидәјишәнли функцијаларын ики дәнә тәкрат лимити вардыр:

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y). \quad (2)$$

Икидәјишәнли функцијанын икигәт вә тәкрат лимитләрнин варлығы вә бәрәбәрлији һағғында мүхтәлиф вәзијәтләр ола биләр.

Мисал 1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ олдугда,} \\ 0, & x = y = 0 \text{ олдугда} \end{cases} \quad (3)$$

функцијасынын $(0, 0)$ нөгтәсиндә лимити (икигәт лимити) јохдур (§ 2), ләкин нөгтәдә тәкрат лимитләрн вар:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

Мисал 2.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} y + x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \text{ олдугда,} \\ 0, & y = 0 \text{ олдугда} \end{cases} \quad (4)$$

функцијасынын $(0, 0)$ нөгтәсиндә

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0$$

тәкрат лимити вә икигәт лимити

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \varphi(x, y) = 0$$

вар, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \varphi(x, y)$ тәкрат лимити исә јохдур.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x + y \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ олдугда,} \\ 0, & x = 0 \text{ олдугда} \end{cases} \quad (5)$$

функцијасынын исә $(0, 0)$ нөгтәсиндә $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x, y)$ тәкрат лимити јохдур, јердә галаң ики лимити исә вар:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \varphi(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \varphi(x, y) = 0.$$

Бурадан ајдындыр ки, икидәјишәнли функцијанын икигәт вә тәкрат лимитләрнин бириниң варлығындан, о бири икисиниң варлығы чыхыр. Бунајла белә, һәмни лимитләрн варлығы вә бәрәбәр олмасы һағғында ашвағыдакы теоремн исбат етмәк оләр.

Теорем. (a, b) нөгтәсинин $\Pi((a, b); \delta_1, \delta_2)$ дүзбүчәк әтрафында тәјин олунмуш f функцијасынын һәмни

нөгүндө иккигөт

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A \quad (6)$$

лимити өз у-ин $0 < |y - b| < \delta_2$ гүжмөтлөрүндө өдү $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ лимити варса, онда онун тәкрар $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ лимити дә вар өө иккигөт лимитинә барабардир:

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \varphi(y). \quad (7)$$

Исбаты. (6) лимитини варлығы жөстөрир ки, истәниләп $\epsilon > 0$ әдәди үчүн (a, b) нөгтәсинин елә дүзбучагы $I((a, b); \eta_1, \eta_2)$ ($0 < \eta_1 < \delta_1$, $0 < \eta_2 < \delta_2$) әтрафы вар ки, һәм ки әтрафы бүтүн $(x, y) \in I((a, b); \eta_1, \eta_2)$, $(x, y) \neq (a, b)$ нөгтәләриндә $|f(x, y) - A| < \epsilon$ (8)

барабарсизлији өдәнилик. Бу барабарсизликдә, у-ин $|y - b| < \eta_2$ барабарсизлијин өдәјән һәр бир гүжмөтини тәјд едәрәк $x \rightarrow a$ шәртиндә лимитә жөтсәк,

$$|\varphi(y) - A| < \epsilon$$

мүнәсибәтини аларыг. Бурадан $A = \lim_{y \rightarrow b} \varphi(y)$ барабарлији өә (6) барабарлијинә әсас-и (7) мүнәсибәти алыныр.

Һәтижә. (a, b) нөгтәсинин мугәјән әтрафында тәјин олунмуш f функцијасынын һәчин нөгтәдә иккигөт лимити өә һәр ики тәкрар лимити варса, онда онларын үчү дә бир биринә барабар олар:

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y). \quad (9)$$

Ләддә сахламаг ләзымдыр ки, иккәдәишәнли f функцијасынын тәкрар лимитләринин варлығындан онларын барабарлији чыхыр

Догрудан да

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ олдугда,} \\ 0, & x = y = 0 \text{ олдугда} \end{cases}$$

барабарлији өлә тәјин олунмуш f функцијасынын $(0, 0)$ нөгтәсиндә тәкрар лимитләринин икиси дә вар:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{y^2}{y^2} \right) = -1,$$

таким онлар бир-биринә барабар дејилдир.

Бурадан ајдындыр ки, тәкрар лимитдә лимитләрин јерини һәмшә дәјилмәк олмас. Буну нәзәрә алмадан

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

барабарлијиндән истифадә етмәк кобуд сәһаләрә сәбәб о.ә биләр.

§ 4. ЧОХДӘИШӘНЛИ ФУНКЦИЈАНЫН КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Тәјриф 1. $E \subseteq E_n$ чохлуғунда тәјин олунмуш f функцијасы үчүн чохлуғун $X^{(0)} \in E$ лимит нөгтәсиндә

$$\lim_{x \rightarrow X^{(0)}, x \in E} f(x) = f(X^{(0)}) \quad (1)$$

барабарлији өдәниликсә, онда она һәм ки $X^{(0)}$ нөгтәсиндә кәсилмәјән функција дејилдир.

Бундан бәшгә, $E \subseteq E_n$ чохлуғунда тәјин олунмуш f функцијасы һәм ки чохлуғун һәр бир изолә едилмиш $X^{(0)} \in E$ нөгтәсиндә кәсилмәз һесаб олунур.

Верилмиш $X^{(0)} \in E$ нөгтәсиндә (1) барабарлији өдәниликдә, дејирләр ки, f функцијасы һәм ки нөгтәдә кәсилдир өә $X^{(0)}$ нөгтәси f -ин кәсилмә нөгтәси адланыр.

Функција лимитини тәјрифинә әсасән функцијанын нөгтәдә кәсилмәзлијинә „а-д дилдә“ ашағыдакы киими дә тәјриф ермәк олар.

Тәјриф 2. Тумаг ки, f функцијасы $E \subseteq E_n$ чохлуғунда тәјин олунмушдур өә истәниләп $\epsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta(\epsilon) > 0$ вар ки E чохлуғунун $\rho(X, X^{(0)}) < \delta$ барабарсизлијини өдәјән бүтүн $X \in E$ нөгтәләриндә

$$|f(X) - f(X^{(0)})| < \epsilon$$

барабарсизлији өдәнилик. Онда f функцијасына $X^{(0)} \in E$ нөгтәсиндә кәсилмәјән функција дејилдир.

E чохлуғунун бүтүн нөгтәләриндә кәсилмәјән f функцијасына һәм ки чохлуғадә кәсилмәјән функција дејилдир. Буну белә јазырлар. $f \in C(E)$.

f функцијасынын $X \in E$ өә $X^{(0)} \in E$ нөгтәләриндәки гүжмөтләринин $f(X) - f(X^{(0)})$ фәргини Δf (өә ја ΔW) илә ишәрә етдәндә

$$\Delta f = f(X) - f(X^{(0)}). \quad (2)$$

(1) барабарлији ашағыдакы киими јазырлар

$$\lim_{x \rightarrow X^{(0)}} \Delta f = 0. \quad (3)$$

Онда функцијанын нөгтәдә кәсилмәзлијинин тәјрифини белә дә сөјләмәк олар

Тә'риф 3. (3) барабарлији өдәнилдикдә f функцијасына $X^{(0)}$ нөгтәсиндә кәсилмәјән функция дејилир.

$$\rho(X, X^{(0)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^{(0)})^2} \text{ вә } \Delta x_k = x_k - x_k^{(0)} (k=1, 2, \dots, n)$$

олдугундан $X \rightarrow X^{(0)}$ шәртини $\rho(X, X^{(0)}) \rightarrow 0$ вә $\Delta x_k \rightarrow 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) илә дә әвәз етмәк олар. Онда (3) барабарлији

$$\lim_{\substack{\rho(X, X^{(0)}) \rightarrow 0 \\ \Delta x_k \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0}} \Delta f = 0 \text{ вә } \lim_{\substack{\Delta x_k \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0}} \Delta f = 0$$

кимй јазылар.

(2) ифадәсинә f функцијасынын $X^{(0)}$ нөгтәсиндә *там артымы* дејилир. Чохдәјишәнли функцијанын һәр бир аргументинә нәзәрән хүсуси артымына да бахылар. Мәсәлән,

$$\Delta_x f = f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

Фәргинә f функцијасынын x_1 аргументинә нәзәрән $X^{(0)}$ $= (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нөгтәсиндә *хүсуси артымы* дејилир

Чохдәјишәнли функцијаларын истәкилән сәјдә кәсилмә нөгтәси ола биләр. Верилмиш әјриниң бүтүн нөгтәләри f функцијасынын кәсилмә нөгтәләри олдуғда, она функцијанын кәсилмә әјрисин дејилир. Чохдәјишәнли функцијанын кәсилмә нөгтәләри чохлугу сәтһ дә тәшкил едә биләр.

Мисал 1. Мәркәзи $(0, 0)$ нөгтәсиндә вә радиусу вәһидә 6 рабәр олан $x^2 + y^2 = 1$ чеврәсиниң бүтүн нөгтәләри

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}, & x^2 + y^2 \neq 1 \text{ олдуғда,} \\ 0, & x^2 + y^2 = 1 \text{ олдуғда} \end{cases}$$

шәкилдә тә'јин олуңмуш f функцијасынын кәсилмә нөгтәләри биләр.

Мисал 2. Әввәлки параграфда тә'јин олуңмуш (3) функцијасы (мисал 1) $(0, 0)$ нөгтәсиндә кәсилир.

Тә'риф 4. $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нөгтәсиниң мурәјјән әтрафында тә'јин олуңмуш f функцијасын үчүн

$$\lim_{\substack{\rho(X, X^{(0)}) \rightarrow 0 \\ \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0}} f(x_1^{(0)}, \dots, x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = f(X^{(0)})$$

барабарлији өдәнилдикдә, она x ($i=1, 2, \dots, n$) аргументинә нәзәрән $X^{(0)}$ нөгтәсиндә кәсилмәјән функция дејилир.

Ајдындыр ки, верилмиш нөгтәдә кәсилмәјән чохдәјишәнли функция өз аргументләриниң һәр бириңә нәзәрән дә кәсилмәјәндир. Бунун тәрси доғру дејилдир.

Һәр бир аргументинә нәзәрән кәсилмәјән чохдәјишәнли

функција $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ аргументинә (јә'ни аргументләр күллүсүнә) нәзәрән кәсилән дә ола биләр.

Мәсәлән,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2 + y^2}{x - y}, & x \neq y \text{ олдуғда,} \\ 0, & x = y \text{ олдуғда} \end{cases}$$

барабарлији васитәсилә тә'јин олуңан f функцијасы $(0, 0)$ нөгтәсиндә һәр бир аргументә нәзәрән кәсилмәјәндир:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 5x = 0 = f(0, 0) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} (-y) = 0 = f(0, 0).$$

Ләкин һәмийн нөгтәдә $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ лимити олмадығындан

$X = (x, y)$ нөгтәсинә (вә јә аргументләр күллүсүнә) нәзәрән кәсиләндир.

Бирдәјишәнли кәсилмәјән функцијалар һаггында олан тәклифләр (XII, § 3) ујғун шәкилдә чохдәјишәнли кәсилмәјән функцијалар үчүн дә доғрудур. Мәсәлән, верилмиш нөгтәдә кәсилмәјән ики функцијанын тәми, фәрги, һасили вә нисбатин (мәкрәч сыфырдан фәргли олдуғда) һәмийн нөгтәдә кәсилмәјәндир.

Һәмийн тәклифләрин бири дә кәсилмәјән функцијанын өз ишарәсини сахламасы һаггындадыр.

Теорем 1. $X^{(0)} \in E$ нөгтәсиниң мурәјјән әтрафында тә'јин олуңмуш, һәмийн нөгтәдә кәсилмәјән вә $f(X^{(0)}) \neq 0$ шәртиниң өдәјән f функцијасы $X^{(0)}$ нөгтәсиниң јазын әтрафында өз ишарәсини сахлајыр.

Бу теоремниң доғрулуғу § 2-дә исбат едилмиш 1-чи теоремдән вә функцијанын нөгтәдә кәсилмәзлијиниң тә'рифиндән ајдындыр.

Чохдәјишәнли кәсилмәјән функцијалар һаггында башга тәклифләри сәјләмәк вә исбат етмәк охучуларә һавалә олуңур.

§5. МҮРӘККӘБ ФУНКЦИЈА ВӘ ОНУН КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Фәрә едәк ки,

$$x_1 = \varphi_1(T), x_2 = \varphi_2(T), \dots, x_n = \varphi_n(T) \quad (1) \\ (T = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \Theta)$$

функцијалары $\Theta \in E_m$ областында тә'јин олуңмушдур вә һәр бир $T \in \Theta$ нөгтәсинә ујғун олан $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\varphi_1(T), \varphi_2(T), \dots, \varphi_n(T))$ нөгтәси E_n областына дахилдир. Онда E областында тә'јин олуңмуш

$$W = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$$

функцијасы васитәсилә σ областынын һәр бир $T \in \sigma$ нөгтәсинә бир

$$W = f[\varphi_1(T), \varphi_2(T), \dots, \varphi_n(T)] = \phi(T) \quad (2)$$

әдәди ујғун гојмағ олар.

Белә тәјин олунан ϕ функцијасына σ областында еерилмиш. *жүрәккәб функција* дейлир. $\psi = f[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$ функцијасы f вә $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ функцијаларынын суперпозициясы да адала-ныр

Теорем. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ функцијалары $T^{(0)} = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_m^{(0)}) \in \sigma$ нөгтәсиндә вә f функцијасы $X^{(0)} = (\varphi_1(T^{(0)}), \varphi_2(T^{(0)}), \dots, \varphi_n(T^{(0)})) \in E$ нөгтәсиндә кәсилмәјән икән, онда $f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ жүрәккәб функцијасы $T^{(0)}$ нөгтәсиндә кәсилмәјән олар.

Исбаты. f функцијасы $X^{(0)} \in E$ нөгтәсиндә кәсилмәјән олдуғундан, истәнилән $\delta > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, $\rho(X, X^{(0)}) < \delta$ бәрәбәрсизлијини өдәјән бүтүн $X \in E$ нөгтәләриндә

$$|f(X) - f(X^{(0)})| < \epsilon$$

мүнәсибәти өдәвилир. $\varphi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ функцијалары $T^{(0)}$ нөгтәсиндә кәсилмәјән олдуғуна, кәрә исе $\delta_1 = \frac{\epsilon}{V_n}$ әдәди үчүн елә $\eta > 0$ тапмағ олар ки, $\rho(T, T^{(0)}) < \eta$ бәрәбәрсизлијини өдәјән бүтүн $T \in \sigma$ нөгтәләриндә

$$|x_i - x_i^{(0)}| = |\varphi_i(T) - \varphi_i(T^{(0)})| < \frac{\delta}{V_n} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

бәрәбәрсизликләри өдәниләр. Онда бүтүн белә T нөгтәләриндә

$$\rho(X, X^{(0)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\varphi_i(T) - \varphi_i(T^{(0)}))^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\delta^2}{n}} = \delta$$

бәрәбәрсизлији вә буна кәрә дә

$$|\phi(T) - \phi(T^{(0)})| = |f(X) - f(X^{(0)})| < \epsilon$$

мүнәсибәти доғру олар. Бу исе $\phi = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ функцијасынын $T^{(0)} \in \sigma$ нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну кәстәрил.

Бирдәјишәнли элементар функцијалар (XI, § 19) вә онларын кәсилмәзлији һағгында олан тәклифләр (XIII, § 5), ујғун шәкилдә чохдәјишәнли элементар функцијалар үчүн дә доғрудур.

x_1, x_2, \dots, x_n дәјишәнләри вә сабитләр үзәриндә сонлу сәјлә топлама, чыхма, курма, бөлмә әмәлләри вә суперпозициялар вә һәм дә бирдәјишәнли элементар функцијалар әмәлләри тәтбиғ етмәклә алынған функцијалара *чохдәјишәнли элементар функцијалар* дейлир.

Мәсәлән,

$$f_1 = x^2 + y^2 e^{xy}, f_2 = \ln \frac{x^2 + y^2}{x-y} + \sin y,$$

$$f_3 = \sin^2 x + \cos^2(x+y), f_4 = x^n + y^n + z^n$$

элементар функцијалардыр.

Элементар функцијалар скифи чох кенишдир вә онлар ријәзи анализ курсунда өјрәнлир.

Јухарыда исбат етдијимиз теоремә әсәсэн кәстәрмәк олар ки, бүтүн чохдәјишәнли элементар функцијалар тәјини областларынын һәр бир нөгтәсиндә кәсилмәјәндир.

§ 6. ГАПАЛЫ ЧОХЛУГДА КӘСИЛМӘЈӘН ФУНКЦИЈАЛЫН ХАССӘЛӘРИ

Гапалы вә мәнһуд чохлугда кәсилијән чохдәјишәнли функцијаларын бир сыра марәғлы хассәләри вардыр. Бу хассәләр парчада кәсилмәјән бирдәјишәнли функцијаларын ујғун хассәләринин (XIII, § 8) аналогудур.

Теорем 1. *Мәнһуд вә гапалы $E \subseteq E_n$ чохлугунда кәсилмәјән f функцијасы һәмми чохлугда мәнһуддур.*

Исбаты. Әксини фәрз едәк ки, f функцијасы E чохлугунда мәнһуд дейлир. Онда һәр бир n әдәди үчүн елә $X^{(n)} \in E$ нөгтәси вар ки,

$$|f(X^{(n)})| > n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Бу $\{X^{(n)}\}$ ардычыллыгы мәнһуддур ($X^{(n)} \in E$). Буна кәрә дә ондан һәр һансы $X^{(n)} \in E$ нөгтәсинә јығылған $\{X^{(n)}\}$ ајтардычыллыгы ајырмағ олар (XXV, § 3). f функцијасы $X^{(n)} \in E$ нөгтәсиндә кәсилмәјән олдуғундан $\lim_{n \rightarrow \infty} f(X^{(n)}) = f(X^{(0)})$ бәрәбәрлији өдәнилмәлидир. Бу исе (1) бәрәбәрсизлијинә эндиір.

Демәти, f функцијасы E чохлугунда мәнһуддур.

Теорем 2. *Мәнһуд вә гапалы $E \subseteq E_n$ чохлугунда кәсилмәјән f функцијасы бу чохлуг, һеч олмаса бир $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E$ нөгтәсиндә озунүн һәмми чохлугда һәмми ашғы сәһнәдини, һеч олмаса бир $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in E$ нөгтәсиндә исе дағи јухары сәһнәдини алыр:*

$$f(\alpha) = \inf_{x \in E} f(X) = m_0, f(\beta) = \sup_{x \in E} f(X) = M_0. \quad (2)$$

Исбаты. Әксини фәрз едәк ки, f функцијасы E чохлугунун һеч бир нөгтәсиндә M_0 гијәтини алмыр. Онда E чохлугунун бүтүн $X \in E$ нөгтәләриндә $f(X) < M_0$ олар. Бу һалда мәнһуд вә гапалы E чохлугунда кәсилмәјән

$$\varphi(X) = \frac{1}{M_0 - f(X)}$$

Функцијасы әвалки теоремә көрә мәһдуд олар:

$$\varphi(X) < M \quad (M_1 > 0).$$

Бурадан

$$f(X) < M_0 - \frac{1}{M_1} \quad (X \in E)$$

алыныр ки, бу да M_0 әдәди f -ни E чохлауғунда дәгиг јухары сәрһәднә олмадығыны көстәрир.

Алынган зиддијәт көстәрир ки, фараңјамиз доғру дејилдир. Јәни һеч олмаса бир $\beta \in E$ нөгтәсиндә $f(\beta) = M_0$ олар.

Функцияның һеч олмаса бир $\alpha \in E$ нөгтәсиндә дәгиг ашағы сәрһәднәни ялмасы да ејни јолла исбат олуғур.

Теорем 3. Рабитәли $\alpha \in E_n$ областының кәсилмәјән f функцијасы бу областың ики нөгтәсиндә бәрәбар олмәјән $A = f(\alpha) \neq f(\beta) = B$ гијәмләрнәни алырса, онда һәмнә A вә B әдәдләри арасында јерләшән һәр бир C әдәдинә дә областың һеч олмаса бир нөгтәсиндә алыр.

Исбаты. α областы рабитәли олдуғундан онун α вә β нөгтәләрини кәсилмәз I әриси илә бирләшдирмәк олар (XXV, § 4). Бу әрси $X = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ($a \leq t \leq b$) нөгтәләриниң һәндәси јеридир вә $\alpha = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_n(a))$, $\beta = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_n(b))$ нөгтәләри онун учларыдыр.

Бу һалда, $f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = f(t)$ мүрәккәб функцијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән (§ 5) бирдәјишәнли функција олар вә $F(a) = A \neq B = F(b)$. Онда верилмиш парчада кәсилмәјән бирдәјишәнли функцияның ујғун хәссәсинә (XIII, § 8) көрә елә t^* нөгтәси вар ки, $F(t^*) = C$ олар. Бу t^* нөгтәси $[a, b]$ парчасында јерләшир ($a \leq t^* \leq b$) вә тәмамилә α областында јерләшән I әрисиның $E = (x_1(t^*), x_2(t^*), \dots, x_n(t^*)) \in \alpha$ нөгтәсини тәјин едир. Ајдындыр ки,

$$F(t^*) = f(x_1(t^*), \dots, x_n(t^*)) = f(E) = C.$$

§ 7. Чохләјишәнли функцияның мунтәзәм кәсилмәзлиги

Верилмиш f функцијасының $E \subseteq E_n$ чохлауғунда кәсилмәзлиги ону чохлауғун ајры-ајры нөгтәләриндә характеризә едир. Бүтүн E чохлауғунда функцияның характеризә етмәк үчүн верилән ајлајышлардан бири дә мунтәзәм кәсилмәзлики аялајышыдыр.

Тәриф 1. Тутар ки, f функцијасы E чохлауғунда тәјин олунмуштур вә истәнилән $\epsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ вар ки, E чохлауғунун $\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta$ бәрәбарсизлијини өдәјән истәнилән $X^{(1)}$ вә $X^{(2)}$ нөгтәләриндә

$$|f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| < \epsilon \quad (1)$$

мунәсибәти өдәнидир. Онда f функцијасына E чохлауғунда мунтәзәм кәсилмәјән функција дејилир.

Теорем 1. Мәһдуд вә тәмам E чохлауғунда кәсилмәјән f функцијасы һәмнә чохлауғунда мунтәзәм кәсилмәјәндир.

Исбаты. Әксини фәрз едәк ки, f функцијасы E чохлауғунда мунтәзәм кәсилмәјән дејилдир. Онда елә $\epsilon_0 > 0$ әдәди вә E чохлауғунун $\rho(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}) < \frac{1}{k}$ бәрәбарсизлијини өдәјән $X_k^{(1)}$ вә $X_k^{(2)}$ нөгтәләри вар ки,

$$|f(X_k^{(1)}) - f(X_k^{(2)})| > \epsilon_0 > 0 \quad (2)$$

мунәсибәти өдәнидир.

$X_k^{(1)}$ нөгтәләри мәһдуд тапалы E чохлауғунда дахия олдуғундан $\{X_k^{(1)}\}$ ардычыллыгы мәһдудлур вә ондан һәр һаксы $X^{(1)} \in E$ нөгтәсинә шығылан алтардычыллыг ајырмағ олар:

$$X_m^{(1)} \rightarrow X^{(1)} \quad (m \rightarrow \infty).$$

$\rho(X_m^{(1)}, X_k^{(2)}) < \frac{1}{k_m}$ бәрәбарсизлијинә әсасән $X_m^{(2)} \rightarrow X^{(2)}$ ($m \rightarrow \infty$) олар. f функцијасы E чохлауғунда кәсилмәјән олдуғундан $X^{(2)}$ нөгтәсиндә дә кәсилмәјәндир. Онда кәсилмәзлијини тәрифинә көрә

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f(X_m^{(1)}) - f(X_m^{(2)})| = |f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| = 0$$

олар ки, бу да (2) бәрәбарсизлијинә зиддир.

Алынган зиддијәт теоремин доғру олдуғуну көстәрир.

Гәјд едәк ки, E чохлауғунда мунтәзәм кәсилмәјән f функцијасы һәмнә чохлауғун һәр бир нөгтәсиндә дә (јәни, E чохлауғунда да) кәсилмәјәндир. Бу тәклифин тәрсин доғру дејилдир. E чохлауғунда кәсилмәјән f функцијасы һәмнә чохлауғунда мунтәзәм кәсилмәјән олмәјә да биләр.

Функцияның терилмиш нөгтәдә вә чохлауғунда характеристикаларында бири дә онун рәгсидир.

Тутар ки, f функцијасы E чохлауғунда тәјин олунмуш мәһдуд функцијадыр. Онун E чохлауғунда дәгиг ашағы сәрһәднәни $m(E)$ вә дәгиг јухары сәрһәднәни $M(E)$ илә ишәрә едәк.

Тәриф 2.

$$\omega(E) = M(E) - m(E) \quad (3)$$

бу рәгсә f функцијасының E чохлауғунда рәгси дејилир.

$m(E) < M(E)$ олдуғундан $\omega(E) > 0$ олар.

Верилмиш $X^{(1)} \in E$ нөгтәсинин $O_\delta(X^{(1)})$ әтрафы илә E чохлауғунун кәшилмәслии $E(\delta)$ илә ишәрә едәк: $E(\delta) = O_\delta(X^{(1)}) \cap E$. Оң ла сыфра шығылан

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots; \delta_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

монотон ардычыллыгына ујғун

$$E(\delta_1), E(\delta_2), \dots, E(\delta_n), \dots$$

чохлаулары ардынчылыгы алыныр. Бу халда, монотон

$$M[E(\delta_1)] > M[E(\delta_2)] > \dots > M[E(\delta_n)] > \dots$$

$$m[E(\delta_1)] < m[E(\delta_2)] < \dots < m[E(\delta_n)] < \dots$$

ва

$$\omega[E(\delta_1)] > \omega[E(\delta_2)] > \dots > \omega[E(\delta_n)] > \dots$$

ардынчылыгыларынын сонлу лимитлери вар. Нэмин лимитлери

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[E(\delta_n)] = M(X^{(0)}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m[E(\delta_n)] = m(X^{(0)})$$

ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega[E(\delta_n)] = \omega(X^{(0)})$$

кими ишара едэк.

Тэ'риф 3. $M(X^{(0)})$, $m(X^{(0)})$ ва $\omega(X^{(0)})$ эдэдлэринэ f функциясинин утгун оларак $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ жулары сэрхэди, ашагы сэрхэди ва рэгиси дежилир.

Айдындыр ки,

$$m(X^{(0)}) < f(X^{(0)}) < M(X^{(0)})$$

барабарсизлигн өдэнилиз.

Хүсуси халда, $X^{(0)}$ нөгтэси E чохлауунун нэола еднлиин нөгтэси олдугда

$$m(X^{(0)}) = f(X^{(0)}) = M(X^{(0)})$$

ва

$$\omega(X^{(0)}) = 0 \quad (4)$$

барабарликлари догрудур.

Бундан башга, ашагыдаки теоремин да догрудугуну исбат етмэк олар.

Теорем 2. E чохлауунда тэ'йин олунмуш f функциясинин $X^{(0)} \in E$ нөгтэсиндэ кэсилмэзлик олмасы үчүн онун нэмин нөгтэдэ рэгисинин сыфра барабар олмасы (я'ни, $\omega(X^{(0)}) = 0$ олмасы) зарури ва кафи шэртидир.

Бу теоремэ эсасэн f функциясинин $X^{(0)} \in E$ нөгтэсиндэ кэсилмэзлик олмасына ашагыдаки кими да тэ'риф пермэк олар.

Тэ'риф 4. Верилмиш $X^{(0)} \in E$ нөгтэсиндэ рэгиси сыфра барабар олам f функциясина нэмин нөгтэдэ кэсилмэзлик олмасы дежилир.

Бу функциясинин нөгтэдэ кэсилмэзликнин БЕР тэ'рифи адланыр.

§ 8. Кэсилмэзлик модулу

Тутар ки, f функцияси E чохлауунда тэ'йин олунмуш модулу функциядир. Бу халда,

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; f) = \sup_{\substack{X^{(1)}, X^{(2)} \in E \\ \rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta}} |f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| \quad (1)$$

кэми]этнэ f функциясинин E чохлауунда кэсилмэзлик модулу дежилир.

Тэ'рифдэн айдындыр ки, $\omega(\delta) > 0$ олар.

Бундан башга, истэнилэн $0 < \delta_1 < \delta_2$ эдэдлэри үчүн

$$\omega(\delta_1) < \omega(\delta_2) \quad (2)$$

барабарсизлиги өдэнилиз, я'ни кэсилмэзлик модулу монотон азилмаган функциядир. Догрудан да,

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{X^{(1)}, X^{(2)} \in E \\ \rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta}} |f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| < \dots$$

$$< \sup_{\substack{X^{(1)}, X^{(2)} \in E \\ \rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta_2}} |f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| = \omega(\delta_2).$$

Демэли, нэминшэ

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = \omega(0+) = r > 0 \quad (3)$$

лимити вар. Функция E чохлауунда мүнтэзэм кэсилмэзлик олдугда (3) лимити сыфра барабар олур.

Теорем. E чохлауунда тэ'йин олунмуш f функциясинин нэмин чохлауунда мүнтэзэм кэсилмэзлик олмасы үчүн

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta; f) = 0 \quad (4)$$

хүнасибэтиники өдэнилмэси зарури ва кафи шэртидир.

Шэртии кафилиги. (4) шэртиини өдэнилмэси 0 демэкдир ки, истэнилэн $\epsilon > 0$ эдэди үчүн ела $\delta_0 = \delta_0(\epsilon)$ вар ки, $0 < \delta < \delta_0$ барабарсизлигини өдэди истэнилэн δ үчүн

$$\omega(\delta; f) < \epsilon$$

хүнасибэти өдэнилиз. Онда E чохлауунун $\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta$ шэртини өдэди хэтиэри $X^{(1)}$ ва $X^{(2)}$ нөгтэлэри үчүн

$$|f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| < \epsilon \quad (5)$$

олар. Бу нэа f функциясинин E чохлауунда мүнтэзэм кэсилмэз олмасы демэкдир.

Шэртии зарурилиги. f функцияси E чохлауунда мүнтэзэм кэсилмэзлик олдугда истэнилэн $\epsilon > 0$ эдэди үчүн ϵ э $\delta > 0$ тапмэк олар ки, E чохлауунун $\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta$ барабарсизлигини өдэди ихтиэри $X^{(1)}$ ва $X^{(2)}$ нөгтэлэриндэ (5) барабарсизлиги өдэнилиз. Онда

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{X^{(1)}, X^{(2)} \in E \\ \rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta}} |f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| < \epsilon$$

олар ки, бурадан да $\omega(\delta)$ -нын азилмаган олдугуна эсасэн (4) барабарлиги алыныр.

Касилмээлик модулуудын бэлэ бир мараглы хэсэгтэй дэ эвр-
дыр. E чохлуугу габарыг олдугда истэнидэн $\delta_1 > 0$ вэ $\delta_2 > 0$
эдэдлэри үчүн

$$\omega(\delta_1 + \delta_2; f) \leq \omega(\delta_1; f) + \omega(\delta_2; f) \quad (6)$$

барабэрсизлији догрудур.

Догрудан да, E чохлуугуудын $\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta_1 + \delta_2$ шэртини
өдөжэн ихтижари ики $X^{(1)}$ вэ $X^{(2)}$ нөгтөскини көтүрөк. Бу нөг-
тэлэри бирлэшдирэн парча үзэрийдэ јерлэшэн вэ $\rho(X^{(1)}, X) < \delta_1$
вэ $\rho(X, X^{(2)}) < \delta_2$ шэртлэрини өдөжэн ихтижари нөгтөни X нлэ
ишарэ етсэк, онда

$$\begin{aligned} \omega(\delta_1 + \delta_2; f) &= \sup_{\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) < \delta_1 + \delta_2} |f(X^{(1)}) - f(X^{(2)})| < \\ &< \sup_{\rho(X^{(1)}, X) < \delta_1} |f(X^{(1)}) - f(X)| + \sup_{\rho(X, X^{(2)}) < \delta_2} |f(X) - f(X^{(2)})| = \\ &= \omega(\delta_1; f) + \omega(\delta_2; f) \end{aligned}$$

мүнасибэтини аларыг

$\delta_1 = \delta_2 = \delta$ олдугда (6) барабэрсизлижиндэн

$$\omega(2\delta; f) \leq 2\omega(\delta; f)$$

мүнасибэти елынур. Бурадан, там ријазии индуксији методу
васитэсидэ истэнидэн натурэл n эдэди үчүн

$$\omega(n\delta; f) \leq n\omega(\delta; f) \quad (7)$$

барабэрсизлијини алмаг олар.

XXII ФӘСИЯ

ЧОХДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАНЫН ТӨРӘМӘСИ ВӘ ДИФЕРЕНСИАЛЫ

§ 1. ХҮСУСИ ТӨРӘМӘ

Фәрз едәк ки, n -дәјишәнли f функцијасы $\sigma \in E_n$ облас-
тында тәјин олунмушдур вэ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ бу обласдын
һәр һансы нөгтәсиндир. Функцијанын X нөгтәсиндә x_i аргу-
ментинә нәзәрән хүсуси артымы ашағыдакы кими тәјин олун-
нур:

$$\Delta_{x_i} W = \Delta_{x_i} f(X) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - \\ - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Тәриф 1. $\Delta x_i \rightarrow 0$ шэртиндә

$$\frac{\Delta_{x_i} f(X)}{\Delta x_i} \quad (2)$$

һисбәтийини сонлу лимити вәрса, һәмим лимити f функци-
јасынни X нөгтәсиндә x_i аргументинә нәзәрән хүсуси тө-
рәмәви дөјиллир вэ ашағыдакы кими ишарэ олунур:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(X) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} f(X)}{\Delta x_i} \quad (3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Чохдәјишәнли функцијанын һәр бир аргументинә нәзәрән
хүсуси төрәмәсиндән даанышмаг олар. Хүсуси һалда, икидә-
јишәнли $z = f(x, y)$ функцијасынни x вэ y аргументләринә
нәзәрән хүсуси төрәмәлэри $\frac{\partial f}{\partial x}$ вэ $\frac{\partial f}{\partial y}$ олур.

Гәјд f функцијасынни x_i аргументинә нәзәрән хүсуси төрәмәсини көс-
тәрән $\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}$ ишарәси "бүтә" баша дүшүлүр, онун сурәт вэ нәзәрәнини
ајрылыгыда мәһнасы јохдур.

Тәрифдән ајдындыр ки, чохдәјишәнли функцијанын бир
аргументинә нәзәрән хүсуси төрәмәсини һесабладыгда, онун
јердә галан аргументләрини сабит һесап етмәк я зымдыр. Бу-
на көрә дә чохдәјишәнли функцијаларын хүсуси төрәмәләрини
һесабладыгда бирдәјишәнли функција төрәмәсини һесабланма
гајдаларындап, вэ дүстурларындап биләваситә истифадә олунур.

Мисал. $W = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ функцијасынни
хүсуси төрәмәлэри ашағыдакы кими һесабланур:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 \cdot \dots \cdot x_n,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = 4x_2^2 - x_1 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_n} = 2nx_n^{n-1} - x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}.$$

Верилмиш X нөгтәсиндә x_i аргументинә нәзәрән сонлу
 $\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}$ хүсуси төрәмәси олан f функцијасы һәмим нөгтәдә x
аргументинә нәзәрән касилмәјәндир. Хүсуси төрәмәсини вар-
лыгы үчүн бу әәрури шарт ки дөјилдир. Верилмиш нөгтә-
дә x_i дөјишәнинә нәзәрән касилмәјән функцијанын һәмим дө-
јишәнә нәзәрән хүсуси төрәмәси олмаја да биләр.

Гәјд едәк ки, верилмиш нөгтәдә сонлу төрәмәси олан бир-
дәјишәнли функција һәмим нөгтәдә касилмәјәндир. Чохдәји-
шәнли функцијанын исә верилмиш нөгтәдә бүтүн аргументләрә
нәзәрән хүсуси төрәмәләрини варлыгыдан һәмим нөгтәдә
касилмәзлији чыкыр.

Мәсәдән, йикдәјишәнли

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x + y \neq 0 \text{ олдугда,} \\ 0, & x + y = 0 \text{ олдугда} \end{cases}$$

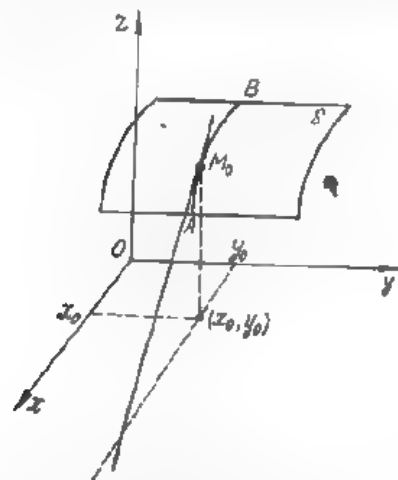
функциясынын $(0, 0)$ нөктөсінде һәр икн аргументә нәзәрән сомлу хүсуси төрәмәси вар:

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0,$$

лакин һәмнн нөгтәдә кәсиләндир (XXVI, § 4).

Икн дәјишәнли функцияны хүсуси төрәмәләриннн садә һәндәси мә'насы вардыр.

Тутыг ки, $z = f(x, y)$ функциясынын (x_0, y_0) нөгтәсінде сомлу хүсуси төрәмәләри $f'_x(x_0, y_0)$ вә $f'_y(x_0, y_0)$ вар. Һәмнн функциянын графнки фәзада бир S сәтһи олар. Бу сәтһ үзәриндә (x_0, y_0) нөгтәсінә ујғун олан нөгтәни $M_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ илә ишарә едәк. $y = y_0$ мүстәвис S сәтһини бир AM_0B әјрис



Шәкил 227

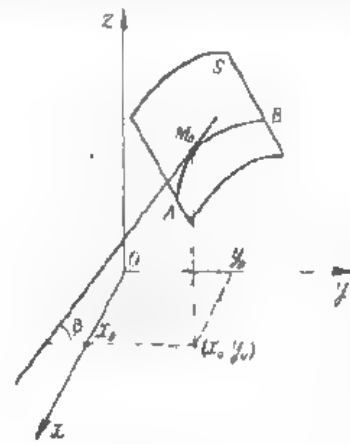
үзәрә кәсір (шәкил 227). Бу әјриннн тәзлији исә x дәјишәннәдән асылы олан $z = f(x, y_0)$ функциясы (икннчи дәјишән гәјд олуымушдур) о'ар. Бирдәјишәнли $z = f(x, y_0)$ функциясынын x_0 нөгтәсінде төрәмәси, AM_0B әјрисинә $M_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ нөгтәсінде чәкилмиш тохунаын абсис охунун мүсбәт истигамәти илә әмәлә кәтирдји α букағынын тангенсинә бәрәбәрдыр (XIV, § 2). Бурадан $f'_x(x_0, y_0)$ хүсуси төрәмәсиннн һәндәси мә'насы алыныр:

$$f'_x|_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

$f'_y(x_0, y_0)$ хүсуси төрәмәсиннн һәндәси мә'насыны да ејни усулла изәһ етмәк олар (шәкил 228):

$$f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta.$$

Бирдәјишәнли функциянын дифференциалына аналогји олар (XV, § 2), чохдәјишәнли функциянын да һәр бир аргументинә нәзәрән хүсуси дифференциалыны тәјни етмәк олар.



Шәкил 228

Тә'риф 2. f функциясынын x_i аргументинә нәзәрән $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ хүсуси төрәмәси илә аргументин dx_i дифференциалы һәсалинә һәмнн функциянын x_i аргументинә нәзәрән хүсуси дифференциалы дејилдир вә

$$d_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

икнн ишарә олуыру.

(5) ифадәси x_i аргументиннн dx_i дифференциалына нәзәрән хәтти функциядыр.

Хүсуси һалда, $n=1$ олдугда функциянын хүсуси төрәмәсиннн тә хүсуси дифференциалынын тә'рифн бирдәјишәнли функциянын төрәмәсиннн (XIV, § 1) вә дифференциалынын (XV, § 2) ујғун тә'рифн илә үст-үстә дүшүр.

§ 2. ФУНКЦИЯНЫН НӨГТӘДӘ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНАН ОЛМАСЫ

Верилүиш $\sigma \in E_2$ областыда тәјин олуымуш икн дәјишәнли f функциясына баһаг.

Фәрз едәк ки, (x, y) бу областын һәр һнсы нөгтәсидир вә x, y дәјишәнләри ујғун олараг елә Δx вә Δy артымлары алыр ки, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нөгтәси јенә дә һәмнн областа дахил олуыр. Онда $W = f(x, y)$ функциясы

$$\Delta W = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1)$$

артымнын алыр.

(1) ифадәсинә f функциясынын (x, y) нөгтәсінде артым (вә ја там артым) дејилир.

Тә'риф 1. f функциясынын (x, y) нөгтәсінде артымнын

$$\Delta W = A\Delta x + B\Delta y + o(\Delta x + \Delta y) \quad (2)$$

шәкилдә көсп.рмәк күмжүн олдугда, она һәмнн нөгтәдә дифференциалланан (вә ја дифференциаллана билән) функция дејилир. Бурада $A = A(x, y)$ вә $B = B(x, y)$ аргументләран Δx вә Δy артымларындан асылы олмајан кәміјјәтләр, $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ вә $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ исә $(\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0)$ шәртиндә сонсуз кичилән функцияјалардыр:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0. \quad (3)$$

(2) бәрәбәрлијини (ашға эквивалент шәкилдә дә јазмаг олар. Бу мәсәдлә (x, y) вә $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нөгтәләри арасындакы мәсәфни ρ илә ишарә едәк: $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Ајдындыр ки, $(\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0)$ вә $\rho \rightarrow 0$ ш.р.т. әри эквивалентдыр. Онда (3) бәрәбәрлики јини едәјән α вә β үчүн

$$\alpha = \frac{A\Delta x + B\Delta y}{\rho}, \quad \rho \neq 0 \quad (4)$$

кәми]јәти $\rho \rightarrow 0$ (вә ја $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$) шәртиндә сонсуз кичилән олар. Догрудан да, $\left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| < 1$ вә $\left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| < 1$ олдугундан

$$|\alpha| = \left| \alpha \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \frac{\Delta y}{\rho} \right| \leq |\alpha| \left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| + |\beta| \left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| \leq |\alpha| + |\beta|$$

мүнасибәти вә (3) барабарликләринә әсәсән тәләб олунав

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha = 0 \quad (5)$$

барабарлији алыныр. (4) барабарлијини ашағыдакы кими јазат:

$$\alpha \Delta x + \beta \Delta y = \epsilon \rho. \quad (6)$$

Буну нәзәрә алсаг, (2) барабарлијини

$$\Delta W = \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \epsilon \rho \quad (7)$$

кими јазмаг олар.

Демәли, (2) \rightarrow (7). Бунун тәгси дә, јә'ни (7) \rightarrow (2) тәклифи дә догрудур.

Буну исбат етмәк үчүн (7) барабарлијиндәки ϵ кәми]јәтини ашағыдакы шәкилдә көстәрәк:

$$\epsilon \rho = \frac{\epsilon \rho^2}{\rho} = \frac{\epsilon[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]}{\rho} = \frac{\epsilon \cdot \Delta x}{\rho} \cdot \Delta x + \frac{\epsilon \cdot \Delta y}{\rho} \cdot \Delta y.$$

Бурада $\alpha = \frac{\epsilon \cdot \Delta x}{\rho}$ вә $\beta = \frac{\epsilon \cdot \Delta y}{\rho}$ һесап етсәк, онда

$$\epsilon \rho = \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

барабарлијини аларыг. α вә β кәми]јәтләри үчүн (3) барабарликләри өдәнилир.

Догрудан да,

$$|\alpha| = |\epsilon| \cdot \left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| < |\epsilon|, \quad |\beta| = |\epsilon| \cdot \left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| < |\epsilon|$$

барабарликләринә вә (5) барабарлијинә көрә

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha = \lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta = \lim_{\rho \rightarrow 0} \beta = 0$$

олар.

Демәли, верилмиш дифференциалланан f функцијасы үчүн (2) вә (7) шәртләри эквивалентдир.

Бурадан, функцијанын верилмиш нөгтәдә дифференциалланан олмасынын јени тә'рифи алыныр:

Тә'риф 1'. f функцијасынын (x, y) нөгтәсиндә артымыны (7) шәкилдә көстәрмәк мүмкүн олдугда, она һәмчә нөгтәдә дифференциалланан функција дејилир.

(7) барабарлијиндә иштирак едән ϵ кәми]јәти үчүн (5) шәрти өдәнилир.

Ајдылдыр ки, 1 вә 1' тә'рифләри эквивалентдир (2) (вә һәм дә (7)) барабарлији f функцијасынын (x, y) нөгтәсиндә дифференциалланма шәрти адланыр. Функцијанын нөгтәдә дифференциалланан олмасынын (7) шәртини

$$\Delta W = \alpha \Delta x + \beta \Delta y + o'(\rho) \quad (8)$$

кими дә јазмаг олар.

Мисал. $W = x^2 + 2x + y^2$ функцијасы истәнилән (x, y) нөгтәсиндә дифференциалланандыр.

Догрудан да, онун истәнилән (x, y) нөгтәсиндә артымы

$$\begin{aligned} \Delta W &= (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + (y + \Delta y)^2 - x^2 - 2x - y^2 = \\ &= (3x^2 + 2) \Delta x + 2y \cdot \Delta y + [3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] \cdot \Delta x + \Delta y \cdot \Delta y \end{aligned}$$

вә ја

$$\Delta W = (3x^2 + 2) \Delta x + 2y \cdot \Delta y + [3x \Delta x + (\Delta x)^2] \Delta x + \Delta y \cdot \Delta y \quad (9)$$

шәкилдә көстәрилир. Бу исә

$$A = 3x^2 + 2, \quad B = 2y, \quad \alpha = 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2, \quad \beta = \Delta y$$

кәми]јәтләри үчүн (2) барабарлијини өдәнилмәси демәкдир.

Тә'риф 2. σ областынын истәнилән нөгтәсиндә дифференциалланан функцијаја һәмчә областа дифференциалланан функција дејилир.

Икидәјишәнли функцијанын дифференциалланан олмасы һағында јухәрыда вердијимиз тә'рифләр ујгун шәкилдә n -дәјишәнли ($n > 2$) функцијалар үчүн дә догрудур. n -дәјишәнли f функцијасынын $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәсиндә дифференциалланма шәрти

$$\Delta W = A_1(X) \Delta x_1 + A_2(X) \Delta x_2 + \dots + A_n(X) \Delta x_n + \epsilon \rho \quad (10)$$

кими јазылыр; бурада $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}$ вә $\lim_{\rho \rightarrow 0} \epsilon = 0$.

§ 3. ФУНКЦИЈАНЫН ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНАН ОЛМАСЫ ÜЧÜN ЗӘРУРИ ШӘРТЛӘР

Теорем 1. (x, y) нөгтәсиндә дифференциалланан f функцијасы һәмчә нөгтәдә кәсилмәјәндир.

Исбаты. $W = f(x, y)$ функцијасы (x, y) нөгтәсиндә дифференциалланан олдугундан һәмчә нөгтәдә онун артымы

$$\Delta W = \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow 0 \quad (1)$$

шәкилдә көстәрилә билир (§ 2, (2)). Бурадан

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta W = 0,$$

алыныр ки, бу да функцијанын (x, y) нөгтәсиндә кәсилмәз олдугуну көстәрир.

Нәтижә 1. Функција кәсилдији нөгтәдә дифференциалланан ола билмәз.

Теорем 2. Верилмиш $(x, y) \in \sigma$ нөгтәсиндә дифференциалланан f функцијасынын һәмчә нөгтәдә сонсуз $f_1(x, y)$ вә $f_2(x, y)$ хәсуси тәрәлмәләри бар.

Исбаты. $W = f(x, y)$ функцијасы (x, y) нөгтәсиндә дифференциалланан олдугундан бу нөгтәдә онун артымы үчүн

(1) көстөрүлүшү догрудур. Нэмий барабарликдө $\Delta x \neq 0$ вө $\Delta y = 0$ һесаһ етсәк

$$\Delta_x W = A\Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

олар. Бу барабарлијин һәр йәи тәрәфини Δx артымына бөләрәк $\Delta x \rightarrow 0$ шәртиндә лимитә кечәк:

$$\frac{\Delta_x W}{\Delta x} = A + \alpha, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x W}{\Delta x} = A.$$

Демәли, (x, y) нөгтәсиндә $W'_x = f'_x(x, y)$ хүсүси тәрәмәси вар вө $A = f'_x(x, y)$ барабарлијә догрудур.

Ејни гәјдә илә (x, y) нөгтәсиндә $f'_y(x, y)$ хүсүси тәрәмәсини варлығы вө $B = f'_y(x, y)$ барабарлијини догрудугу исбат олунур.

Нәтичә 2. Верилмиш (x, y) нөгтәсиндә дифференциалланан f функцијасынын һәмик нөгтәдә артымы

$$\Delta W = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \epsilon, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0) \quad (2)$$

шәклиндә көстөрүлө балар.

Нәтичә 3. f функцијасы $f'_x(x, y)$ вө $f'_y(x, y)$ хүсүси тәрәмәләрини һеч олмаса бирини олмәдәги нөгтәдә дифференциалланан дејилдир.

Гәјд. Исбат етәјимиз теоремдәрин тәрси догру дејилдир функцијанын верилмиш нөгтәдә көсилмәз олмәсиндә вө һәм дә һәмни нөгтәдә сонлу f'_x вө f'_y хүсүси тәрәмәләрини олмәсиндә онун һәмни нөгтәдә дифференциалланан олмәси чыхыр.

Мәсәлән,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \text{ олдуғда} \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \text{ олдуғда} \end{cases} \quad (3)$$

шәклиндә тәјини олунуш f функцијасы $(0, 0)$ нөгтәсиндә көсилмәзәндир вө һәмни нөгтәдә сонлу $f'_x(0, 0) = 0$ вө $f'_y(0, 0) = 0$ хүсүси тәрәмәләри вар, ләкин $(0, 0)$ нөгтәсиндә дифференциалланан дејилдир.

Догрудан дә, әкәр (3) функцијасы $(0, 0)$ нөгтәсиндә дифференциалланан олса, ондә онун артымы үчүн (2) барабарлији

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + \epsilon$$

вө ја $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ олдуғундан

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \epsilon \quad (4)$$

мүнәсибәти өдәнимәлидир, бурада $\lim_{\rho \rightarrow 0} \epsilon = 0$.

(4) барабарлијиндә $\Delta x = \Delta y$ табул етсәк, ондә

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{2}} = \epsilon \sqrt{2} |\Delta x|$$

мүнәсибәтини вө бурадан исә $\epsilon = \frac{1}{2}$ барабарлијия аларыг. Бу нәтичә

$\lim_{\rho \rightarrow 0} \epsilon = 0$ олмәси шәртинә яддыр. Демәли, (3) функцијасы $(0, 0)$ нөгтәсиндә дифференциалланан дејилдир.

§ 4. ФУНКЦИЈАНЫН ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Фәрз едәк ки, икнәјишәкли f функцијасы $(x, y) \in \sigma$ нөгтәсиндә дифференциалланандыр. Онда һәмни нөгтәдә онун артымы

$$\Delta W = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \epsilon, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0), \quad (1)$$

шәклиндә көстөрүлө билир (§ 3, нәтичә 2). Бу барабарлијин сағ тәрәфиндәки бирикчи ики һәддәи чәки

$$f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \quad (2)$$

Δx вө Δy артымларына нәзәрән хәттидир. $f'_x(x, y) \neq 0$ вө $f'_y(x, y) \neq 0$ олдуғда исә (2) ифадәси функцијанын ΔW артымындан ρ кәмијәтинә нәзәрән јүксәктәртибли сонсуз кичилән олан ϵ кәмијәтилә фәргләнир ($\rho \rightarrow 0$ шәртиндә $\epsilon \rightarrow 0$).

Бу һалда (2) ифадәси функција артымынын баш һиссәси олур.

Тәриф 1. (x, y) нөгтәсиндә дифференциалланан f функцијасынын һәмик нөгтәдә артымынын (2) хәтти һиссәсинә онун (x, y) нөгтәсиндә дифференциалы (вө ја п.ә.м. дифференциалы) дејилир вө dW , јахуә $df(x, y)$ илә ишарә олунур:

$$dW = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \quad (3)$$

вө ја

$$df(x, y) = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \quad (4)$$

x вө y сәрбәст дәјишәнләрини Δx вө Δy артымлары онларын дифференциалы ядлары вө ујғун оларат dx вө dy илә ишарә олунур. Бу һалда, функција дифференциалынын (3) ифадәси

$$dW = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \quad (5)$$

шәклини алар. Бу ифадәи f функцијасынын [хүсүси дифференциаллары (§ 1) һәситәсилә

$$dW = d_x f + d_y f \quad (6)$$

кими јазмәг олар, јәни функцијанын там дифференциалы онун хүсүси дифференциалларынын чәмикә барабардир.

n -дәјишәкли f функцијасынын $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәсиндә дифференциалы

$$dW = f'_1(X)\Delta x_1 + f'_2(X)\Delta x_2 + \dots + f'_n(X)\Delta x_n \quad (7)$$

ифадәси олар. Бу һалда дә функцијанын артымы

$$\Delta W = dW + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0)$$

вө ја

$$\Delta f(X) = df(X) + o(\rho)$$

шәклиндә көстөрүлир вө функцијанын дифференциалы онун артымынын $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән (7) хәтти һиссәсинә дејилир.

Δx_i ($i = 1, \dots, n$) кәмијәтләрни ујғун оларат dx_i ($i = 1, \dots, n$) илә (буна x_i сәрбәст дәјишәнлини дифференциалы

дејилир) ишарә етсәк, дифференциалын (7) ифадәсини

$$dW = f'_{x_1}(X) dx_1 + f'_{x_2}(\lambda) dx_2 + \dots + f'_{x_n}(X) dx_n \quad (8)$$

кимн јазмаг олар.

Тәрифдән ајдындыр ки, верилмиш нөгтәдә дифференциалланан функцијанын һәмнн нөгтәдә дифференциалы (вә ја там дифференциалы) вардыр. Функцијанын дифференциалланан олдуғу нөгтәдә онун сонлу хүсуси төрәмәләринин олмасы да мәлумдур (§ 3). Бунуи тәрсиннә доғру олмадығыны, јәни верилмиш нөгтәдә сонлу хүсуси төрәмәләрин варлығындан функцијанын һәмнн нөгтәдә дифференциалланан олмасынын чыхмадығыны әввалки параграфын сонунда көстәрмишик. Бурадан ајдындыр ки, функцијанын сонлу хүсуси төрәмәләри васитәсилә дүзәлдилмиш (3) вә ја (5) ифадәси функцијанын дифференциалы олмаја да биләр.

Функцијанын верилмиш нөгтәдә дифференциалы олмасы үчүн һәмнн нөгтәдә 0, дифференциалланан олмагыдыр.

Функцијанын верилмиш нөгтәдә дифференциалланан олмасы үчүн кафи шәрти ашағыдакы теорем шәклиндә сөйләмәк олар.

Теорем. *f* функцијасынын (x_0, y_0) нөгтәсинин муәйјән әтрафында $f'_x(x, y)$ вә $f'_y(x, y)$ хүсуси төрәмәләри варса вә бу хүсуси төрәмәләр һәмнн нөгтәдә кәсилмәјәндирсә, онда *f* функцијасы (x_0, y_0) нөгтәсиндә дифференциалланандыр.

Исбаты. $X_0 = (x_0, y_0)$ нөгтәсинин теоремдә көстәрилән әтрафыны $O_\delta(X_0)$ илә ишарә едәк. x вә y дәјишәнләринә (x_0, y_0) нөгтәсиндә ујғун оларағ елә Δx вә Δy артымлары верәк ки, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нөгтәси јенә дә һәмнн әтрафа дахил олсун. Онда *f* функцијасынын там артымыны

$$\Delta W = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

шәклиндә јазарағ, сағ тәрәфдәки мәтәризаларин һәр биринә Лагранжын бирдәјишәнли функцијалар һағгындакы теоремини (XIV, § 2) тәтбиғ етсәк,

$$\Delta W = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y \quad (9)$$

аларығ ($0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$). Хүсуси төрәмәләр (x_0, y_0) нөгтәсиндә кәсилмәјән олдуғундан

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha_1$$

вә

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \alpha_2$$

олар; бурада $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_1 = 0$ вә $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \alpha_2 = 0$.

Бу гијәтләри (9) бәрәбәрлијиндә јеринә јаздыгда

$$\Delta W = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

көстәрилиши алыныр ки, бу да *f* функцијасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә дифференциалланан олдуғуну көстәрир.

Һәтижә. *Верилмиш нөгтәдә кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри олан функција һәмнн нөгтәдә кәсилмәјәндир.*

Ғәјд едәк ки, функцијанын верилмиш нөгтәдә дифференциалланан олмасы үчүн онун хүсуси төрәмәләринин һәмнн нөгтәдә кәсилмәз олмасы кафи шәрт олдуғу һалда әзрури дејилдир. Функцијанын дифференциалланан олдуғу нөгтәдә хүсуси төрәмәләри кәсилән дә ола биләр.

Мисал.

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{1+\alpha/2} & (\alpha > 0), \text{ рационал нөгтәләрдә,} \\ 0 & \text{, јердә галан нөгтәләрдә} \end{cases}$$

бәрәбәрлијилә тәјийн олунан *f* функцијасы $(0, 0)$ нөгтәсиндә дифференциалланандыр:

$$f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o(\rho);$$

бурада

$$o(\rho) = o(\rho) - (\rho \rightarrow 0).$$

Һәмнн функција $(0, 0)$ нөгтәсиндә фәргли олан бүтүн нөгтәләрдә кәсиләндир вә

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0.$$

Демәли, *f* функцијасы $(0, 0)$ нөгтәсиндә дифференциалланандыр, ләкин һәмнн нөгтәдә кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри јохдур.

Тәриф 2. *Верилмиш областда (вә ја нөгтәдә) кәсилмәјән хүсуси төрәмәләри олан функцијаја һәмнн областда (нөгтәдә) кәсилмәз дифференциалланан функција дејилир.*

Ајдындыр ки, функцијанын нөгтәдә дифференциалланан олмасы һәмнн нөгтәдә хүсуси төрәмәләринин олмасы шәртиндән күчлү (ағыр), кәсилмәз дифференциалланан олмасы шәртиндән исә зәифдир.

§ 5. ФУНКЦИЈА ДИФФЕРЕНЦИАЛЫНЫН ҺӘНДӘСИ МӘНАСЫ

Фәрз едәк ки, икнәјишәнли *f* функцијасы σ областинда тәјийн олунмуш, кәсилмәјән вә области $X_0 = (x_0, y_0) \in \sigma$ нөгтәсиндә дифференциалланан функцијадыр. X_0 нөгтәсинә *f* функцијасынын графнки үзәриндә ујғун олан нөгтә

$$M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

олсун.

Функција X_0 нөгтәсиндә дифференциалланан олдуғундан

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + o(\rho)$$

вә ја

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + o(\rho) \quad (1)$$

$$(z = f(x, y) \text{ вә } z_0 = f(x_0, y_0))$$

мүнәсибәти доғру олар. Бурада $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ вә $\lim_{\rho \rightarrow 0} \epsilon = 0$.

Алдындыр ки, тәлији

$$Z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y-y_0) \quad (2)$$

олан мустәви f функцијасынын графиги үзәриндә олан M_0 нөгтәсиндән кечир вә Oz охуна паралел дејилдир. (1) вә (2) мүнәсибәтләриндән ајдылдыр ки, $\rho \rightarrow 0$ шәртиндә $z \rightarrow Z$ фәрги ($z = f(x, y)$ функцијасынын гијмәти илә (2) мустәвисинин ујғун нөгтәси аппликатынын фәрги) сифра јахын ашыр.

Тәриф. $z = Z$ фәрги $\rho \rightarrow 0$ шәртиндә ρ кәмијәтигә нәзәрән јүксәктәртибли сонсуз кичилән кәмијәт олдугда, (2) мустәвисинә f функцијасынын графиги олан сәтһә M_0 нөгтәсиндә тохунан мустәви дејилдир.

(1) вә (2) мүнәсибәтләринә әсвәсән $\rho \rightarrow 0$ шәртиндә

$$z - Z = o(\rho)$$

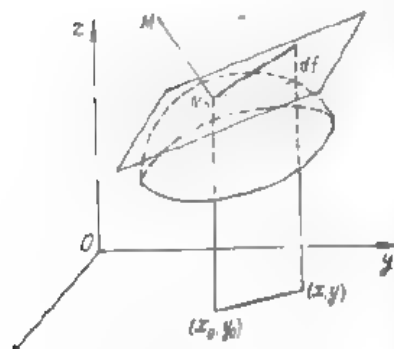
олиасы көстәрир ки, (2) мустәвиси f функцијасынын графиги олан сәтһә $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсиндә тохунан мустәвилдир.

Демәли, f функцијасы (x_0, y_0) нөгтәсиндә дифференциаллан олдуғда тәлији $z = f(x, y)$ олан сәтһин ујғун $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ нөгтәсиндә Oz охуна паралел олмајан тохунан мустәвиси бар. Бу тохунан мустәви јекәнәдир вә о, (2) тәлији илә тәјин олуноур.

Бу тәклифик тәрсә дә доғрудур: f функцијасынын графиги олан сәтһик $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ нөгтәсиндә Oz охуна паралел олмајан тохунан мустәвиси барса, онда һәмин функција (x_0, y_0) нөгтәсиндә дифференциалланандыр.

$x - x_0 = \Delta x$ вә $y - y_0 = \Delta y$ илә ишарә етсәк, (2) барабәрлијини

$$Z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$$



Шәкил 223

кими јазмағ олар. Бу барабәрлијин сәғ тәрафиндәки ифадә f функцијасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә дифференциаландыр:

$$Z - z_0 = df(x_0, y_0). \quad (3)$$

Бурадан икиләишәнли f функцијасы дифференциаллығын һәндәси мәнасы алыноур: f функцијасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә дифференциалы (вә ја там дифференциалы), һәмин функција графигинә (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә чәкилмиш тохунан мустәви аппликатынын артымына барабәрдир (шәкил 229).

Сәтһин тохунан мустәвисинә M_0 тохунма нөгтәсиндә перпендикулјар олан M_0M дүз хәттинә һәмин сәтһин M_0 нөгтәсиндә нормалы дејилдир. Сәтһин $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсиндә тохунан мустәвиси вә нормалы перпендикулјар олдуғундан нормал дүз хәттин буцағ әмсаллары (2) тохунан мустәвисинин ујғун

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad -1$$

әмсаллары илә мутәнәсиб олмалыдыр (VII, § 7). Бурадан $z = f(x, y)$ сәтһинә (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә чәкилмиш нормалын тәлији алыноур:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (4)$$

Демәли, f функцијасы (x_0, y_0) нөгтәсиндә дифференциаллан олдуғда $z = f(x, y)$ сәтһинин ујғун (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә нормалы да бар вә онун тәлији (4) шәкилдә јазылыр.

Мисал. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ јарымсферасына $(1, 2, 2\sqrt{5})$ нөгтәсиндә тохунан мустәвинин вә нормалын тәлијини јазмала.

Верилмиш функцијанын

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \quad \text{вә} \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

хүсуси тәрәмәләри $(1, 2)$ нөгтәсиндә вә онун әтрафында кәсилмәјән олдуғундан һәмин нөгтәдә $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ функција-сы дифференциалланандыр.

Буна көрә дә сәтһин $(1, 2, 2\sqrt{5})$ нөгтәсиндә тохунан мустәвиси вә нормалы бар.

$$z'_x(1, 2) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{вә} \quad z'_y(1, 2) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

олдуғундан $(1, 2, 2\sqrt{5})$ нөгтәсиндә тохунан мустәвинин тәлији

$$z - 2\sqrt{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(x - 1) - \frac{2}{\sqrt{5}}(y - 2),$$

һәмин нөгтәдә сәтһин нормалынын тәлији ксә

$$\frac{x - 1}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{y - 2}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{z - 2\sqrt{5}}{-1}$$

вә ја

$$\frac{x - 1}{\sqrt{5}} = \frac{y - 2}{2\sqrt{5}} = \frac{z - 2\sqrt{5}}{10}.$$

олар.

Ғејделәк ки, и-дәјишәнли f функцијасынын верилмиш нөгтәдә дифференциалланан олиасы илә $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

сәтһиә тохуна мустәвинин вә нормалыи варлыгы һаггында да җухарыда деდიҗимиз кими тәклиф доғрудур. Бу һалда сәтһи тохуна мустәвинин вә нормалыи тәнлији (3) вә (4) мүнәсибәт әринә охшар шәкилдә җазылыр.

§ 6. МҮРӘККӘБ ФУНКСИЈАНЫН ТӨРӘМӘСИ

Фәра едәк ки, $x = x(U, V)$ вә $y = y(U, V)$ функцијалары (U, V) нөгтәсинин мүүјән әтрафында тәјин олунмушдур вә һәмин нөгтәдә

$$\frac{\partial x}{\partial U}, \frac{\partial x}{\partial V}, \frac{\partial y}{\partial U}, \frac{\partial y}{\partial V}$$

хүсуси төрәмәләри вар.

Бундан башга, $W = f(x, y)$ функцијасы (x, y) нөгтәсинин мүүјән әтрафында тәјин олунмушдур вә (U, V) нөгтәсинин көстәрилән әтрафында $W = f[x(U, V), y(U, V)]$ суперпози-
сијасынын мәңәсы вар.

Бу һалда, әкәр $f(x, y)$ функцијасы (x, y) нөгтәсиндә диференциалланандырса, онда мурәккәб

$$W = f[x(U, V), y(U, V)] = F(U, V)$$

функцијасынын (U, V) нөгтәсиндә сонлу $\frac{\partial W}{\partial U}$ вә $\frac{\partial W}{\partial V}$ хүсуси төрәмәләри вар вә олар

$$\frac{\partial W}{\partial U} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial U}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial V} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial V} \quad (2)$$

дүстурулары вәситәсилә һесабыланыр.

$\frac{\partial W}{\partial U}$ хүсуси төрәмәсинин варлыгы вә (1) дүстурунун доғрулуғуну исбат етмәк үчүн U дәјишәниә ΔU артымы верәк (V дәјишәниин гијмәтини сабит сахлајырыг). Онда x вә y дәјишәнләри ујғун олараг

$$\Delta_U x = x(U + \Delta U, V) - x(U, V)$$

вә

$$\Delta_U y = y(U + \Delta U, V) - y(U, V)$$

артымларыны алар. Бу артымлара f -ин там артымы $F(U, V)$ -нин исә U -ја нәзәрән хүсуси артымы ујғун олар

$$\Delta W = \Delta f(x, y) = \Delta_U F(U, V).$$

f функцијасы (x, y) нөгтәсиндә диференциалланан олдуғундан онун там артымы үчүн

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial x} \Delta_U x + \frac{\partial W}{\partial y} \Delta_U y + \alpha \cdot \Delta_U x + \beta \cdot \Delta_U y \quad (3)$$

көстәрилиши доғрудур. Бурада

$$\alpha \rightarrow 0 (\Delta_U x \rightarrow 0, \Delta_U y \rightarrow 0) \text{ вә } \beta \rightarrow 0 (\Delta_U x \rightarrow 0, \Delta_U y \rightarrow 0).$$

Ајдындыр ки, $\Delta U \rightarrow 0$ шәртиндә $\Delta_U x \rightarrow 0$ вә $\Delta_U y \rightarrow 0$ олур. Демәли,

$$\lim_{\Delta U \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \beta = 0. \quad (4)$$

Инди (3) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини ΔU артымына бөләрәк, алынған бәрабәрликдә $\Delta U \rightarrow 0$ шәртиндә лимитә кечсәк вә (4) бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг, онда

$$\lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta U} = \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\Delta_U F(U, V)}{\Delta U} = \frac{\partial W}{\partial x} \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\Delta_U x}{\Delta U} + \frac{\partial W}{\partial y} \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\Delta_U y}{\Delta U} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial U}$$

вә ја.

$$\frac{\partial W}{\partial U} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial U} \quad (1)$$

олар. (2) бәрабәрлијинин доғрулуғу дә ејни гајда илә исбат олунур.

Үмуми һалда,

$$W = f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= f[x_1(t_1, \dots, t_m), x_2(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)]$$

мурәккәб функцијасынын t_k аргументинә нәзәрән хүсуси төрәмәси

$$\frac{\partial W}{\partial t_k} = \frac{\partial W}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial W}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial W}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \quad (5)$$

($k = 1, 2, \dots, m$)

дүстуру илә һесабыланыр. (5) дүстуру җухарыда апардығымыз мүнәкимә илә исбат олунур.

Бурада бир хүсуси һалә баһаг.

Тутаг ки, $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вә $x_2 = x_2(x_1)$, $x_3 = x_3(x_1)$, ..., $x_n = x_n(x_1)$. Онда $W = f[x_1, x_2(x_1), \dots, x_n(x_1)] = F(x_1)$ мурәккәб функцијасы анчаг бир x_1 сәрбәст дәјишәниинин функцијасы олар. Бу һалда, (5) дүстуруна көрә

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} + \dots + \frac{\partial W}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_1} \quad (6)$$

аларыг. Хүсуси һалда, $W = f(x, y)$ вә $y = y(x)$ олса, онда $W = f[x, y(x)]$ вә (6) дүстуруна көрә

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (7)$$

олар.

Ғәјд едәк ки, (6) дүстурунун һәр ики тәрәфиндә W дәјишәниинин x_1 аргументинә нәзәрән төрәмәси иштирак едир. Бу төрәмәләрни мәңәсы исә мұхтәлифдир. Сағ тәрәфдә W -ини x_1 -ә нәзәрән хүсуси $\frac{\partial W}{\partial x_1}$ төрәмәси иштирак едир (бу төрәмәни һесабыларкән јердә галаи аргументләри сабит һесап едир-ләр, оларын x_1 -дән асыллыгы нәзәрә алынмыр). W -ини x_1 -ә

нәзәрән сол тәрәфдә иштирак едән $\frac{dW}{dx_1}$ төрәмәсини һесабладыгда исә W -нин x_1 -дән һәм быласыга асыллыгы вә һәм дә башга аргументлар вәситәсиз асыллыгы тамамла нәзәрә алыныр.

Буна көрә дә $\frac{dW}{dx_1}$ төрәмәсинә W -нин x_1 дәјишәнигә нәзәрән *там төрәмәси*, (6) (вә һәм дә (7)) дүстурга исә *там төрәмә дүстур* дәјилип.

Мисал. $W = x^2 + x^3y + y^2$, $x = e^{2t}$, $y = \sin 3t$ олдугда функцияның t -гә нәзәрән төрәмәсини һесабламалы. Айдидыр ки,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2x + 3x^2y, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = x^3 + 2y,$$

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t}, \quad \frac{dy}{dt} = 3 \cos 3t$$

олар. Онда W -нин t -гә нәзәрән төрәмәсини (1) дүстур ула һесабламаг олар:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = (2x + 3x^2y) 2e^{2t} + \\ &+ (x^3 + 2y) 3 \cos 3t = (2e^{2t} + 3e^{4t} \sin 3t) 2e^{2t} + \\ &+ 3(e^{6t} + 2 \sin 3t) \cos 3t. \end{aligned}$$

§ 7. ДИФЕРЕНЦИАЛ ШӘКЛИНИ ИНВАРИАНТЛЫГЫ

Тәрифә көрә дифференциаллан $W = f(x, y)$ функциясы артымынын хәтти һиссәсинә онун дифференциалы дејилип вә

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial W}{\partial y} \Delta y \quad (1)$$

кики ишарә олунур (§ 4). x вә y сәрбәст дәјишәкләриниң Δx вә Δy артымларыны уңгун оларат dx вә dy илә әвәз етдикдә f функциясының (1) дифференциалы

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy \quad (2)$$

шәклиндә жазылып.

Инди, фәрз едәк ки, $f(x, y)$ функциясының x вә y аргументләри сәрбәст дәјишән олмапб башга U вә V дәјишәкләриниң дифференциаллан функцияларыдыр:

$$x = x(U, V), \quad y = y(U, V).$$

Бу һалда, $W = f[x(U, V), y(U, V)]$ мүрәккәб функциясының дифференциалы

$$dW = \frac{\partial W}{\partial U} dU + \frac{\partial W}{\partial V} dV \quad (3)$$

шәклиндә олар. Мүрәккәб функцияның күсүси төрәмәләриниң

$$\frac{\partial W}{\partial U} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial U},$$

$$\frac{\partial W}{\partial V} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial V}$$

иңадәләрини (§ 6, (1), (2)) (3) бәрәбәрлијиндә јеринә јазсаг,

$$dW = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial U} \right) dU + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial V} \right) dV$$

вә ја

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial U} dU + \frac{\partial x}{\partial V} dV \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial U} dU + \frac{\partial y}{\partial V} dV \right) \quad (4)$$

бәрәбәрлијини аларыг. Саг тәрәфдәки мөтәриизәләр ичәриски-дәки иңадәләр $x = x(U, V)$ вә $y = y(U, V)$ функцияларының дифференциалларыдыр:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial U} dU + \frac{\partial x}{\partial V} dV, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial U} dU + \frac{\partial y}{\partial V} dV.$$

Буну нәзәрә алдыгда (4) бәрәбәрлији

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy$$

кики жазылар

Демәли, $W = f(x, y)$ функциясының x вә y аргументләри сәрбәст дәјишәкләр олдугда да, башга јени U вә V дәјишәкләриниң функциялары олдугда да онун дифференциалы һәмешә (2) шәклиндә олур.

Буна дифференциалың (2) шәклиниң *инвариантлыгы* (дәјиш-мәзлелә) дејилип.

Функция дифференциалының (1) шәкли исә инвариант дејилип. x вә y аргументләри сәрбәст дәјишән олдугда онларын артымлары дифференциалларына бәрәбәрди, ләкин башга U вә V дәјишәкләриниң функциясы олдугда исә онларын артымлары, һәмешә дә дифференциалларына бәрәбәр олмур:

$$\Delta x \neq dx, \quad \Delta y \neq dy.$$

n -дәјишәкли ($n \geq 3$) f функциясы дифференциалының

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

формасы да инвариантдыр. Бу тәклиф јухарыда апардығымыз мұһакимә илә асанлыгга исбат олунур.

Функция дифференциалының тәрифинә вә формасының инвариант олмасына әсасланага исбат етмәк олар ки бирдәјишәкли функцияларын дифференциаллары тагын да мәлүм олан тәклифләр чохдәјишәкли функциялар үчүн дә доғрудур. Мәсәлән,

$$\begin{aligned} d(Cf) &= Cdf, \quad d(f \cdot \varphi) = \varphi \cdot df + f \cdot d\varphi, \\ d\left(\frac{f}{\varphi}\right) &= \frac{\varphi df - f d\varphi}{\varphi^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Бурадан ајдындыр ки, $f(t)$ дифференциалланган вә t чохдәји-
шәһли дифференциалланган функција олдугда

$$df(t) = f'(t) dt \quad (6)$$

бәрабәрлији доғрудур.

Мисал. $W = \ln(2+x^2+y^2)$ функцијасынын дифференциалы-
ны вә хусуси төрәмәләрини тапмалы.

(5) (үчүнчү дүстур) вә (6) дүстурларына көрә

$$dW = \frac{1}{2+x^2+y^2} d(2+x^2+y^2) = \frac{2xdx+2ydy}{2+x^2+y^2}$$

мүнәсибәти вә бурадан

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{2x}{2+x^2+y^2} \quad \text{вә} \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{2y}{2+x^2+y^2}$$

бәрабәрликләри ајдындыр.

§ 8. ЈҮКСӘКТӘРТИБЛИ ХҮСУСИ ТӨРӘМӘЛӘР

Әввәлчә σ областында тәјин олунмуш икидәјишәһли $W = f(x, y)$ функцијасынын јүксәктәртибли хусуси төрәмәләрини тәјин едәк.

Ајдындыр ки, икидәјишәһли $W = f(x, y)$ функцијасынын $f'_x(x, y)$ вә $f'_y(x, y)$ хусуси төрәмәләри дә x вә y дәјишәһлә-
риниң функцијаларыдыр. Буна көрә онларын да хусуси төрә-
мәләриндәи данышмағ олар.

$f(x, y)$ функцијасынын биртәртибли $f'_x(x, y)$ вә $f'_y(x, y)$ ху-
суси төрәмәләриниң x вә y аргументләринә нәзәрән төрәмәлә-
ринә f функцијасынын икитәртибли хусуси төрәмәләри деји-
лир вә

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) \quad (\text{ардычыл оларағ ики дәфә } x\text{-ә нәзәрән төрәмә алыныр}),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) \quad (\text{әввәлчә } x\text{-ә нәзәрән, сонра исә } y\text{-ә нәзәрән төрәмә алыныр}),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) \quad (\text{әввәлчә } y\text{-ә нәзәрән, сонра исә } x\text{-ә нәзәрән төрәмә алыныр}),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) \quad (\text{ардычыл оларағ } y\text{-ә нәзәрән ики дәфә төрәмә алыныр})$$

кимн ишарә олунур.

Функцијаның икитәртибли хусуси төрәмәләриниң x вә y аргументләринә нәзәрән төрәмәләринә онун үчтәртибли хусуси төрәмәләри дејилир вә

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \dots$$

кимн ишарә олунур. Функцијаның $(m-1)$ -тәртибли хусуси төрәмәсиниң төрәмәси онун m -тәртибли хусуси төрәмәси олар. Верилмиш функцијаның әввәлчә n дәфә ардычыл оларағ x -ә нәзәрән, сонра исә $(m-n)$ дәфә y -ә нәзәрән төрәмәси һе-

сабландыгда онун m -тәртибли $\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}$ хусуси төрәмәси алынар.

Ејин гајда ялә n -дәјишәһли $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функ-
сијасынын биртәртибли $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, икитәртибли $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}$, үчтәртибли

$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_l \partial x_j}$ ($k, l, j = 1, 2, \dots, n$) вә с. хусуси төрәмәләриндәи данышмағ олар.

Верилмиш функцијаның мүхтәлиф аргументләринә нәзәрән алынмыш јүксәктәртибли төрәмәләринә онун гарышығ хусуси төрәмәләри дејилир. Икидәјишәһли $f(x, y)$ функцијасынын ики дәнә икитәртибли $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ вә $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ гарышығ хусуси төрәмәләри вар.

Мисал. $W = x^2 e^{xy}$ функцијасынын икитәртибли хусуси төрәмәләрини һесаблаамалы.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2xe^{xy} + yx^2 e^{xy} \quad \text{вә} \quad \frac{\partial W}{\partial y} = x^2 e^{xy}$$

олдугундан

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 2e^{xy} + 4yxe^{xy} + y^2 x^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 3x^2 e^{xy} + yx^3 e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = 3x^2 e^{xy} + yx^3 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$$

олар.

Бурадан көрүнүр ки, $W = x^2 e^{xy}$ функцијасынын икитәртибли гарышығ хусуси төрәмәләри бәрабәрлир.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = 3x^2 e^{xy} + yx^3 e^{xy}.$$

Бунула алағадар оларағ белә бир суал гарыша чыхыр: чохдәјишәһли функцијаның мүхтәлиф аргументләрә нәзәрән дифференциалланмасынын нәтичәси дифференциалланманың нә-
бәсиндән асылдырмы? Бу гајда ашағыдакы теорем исбат едәк.

Теорем (Шварс). (x_0, y_0) нөгтәсиниң мүдәттәи атра-
фында $W = f(x, y)$ функцијасынын икитәртибли гары-
шығ хусуси төрәмәләри $f'_{xy}(x, y)$ вә $f'_{yx}(x, y)$ варса вә (x_0, y_0) нөгтәсиндә кәсилләнәндирсә, онда һәмин нөгтә-
дәи онлар бир-биринә бәрабәрлир:

$$f'_{xy}(x_0, y_0) = f'_{yx}(x_0, y_0). \quad (1)$$

Исбаты. Аргументләрә елә Δx вә Δy артымлары верәк ки, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нөгтәси (x_0, y_0) нөгтәсиниң теоремдә көс-
тәрилән атрафына даһил олсун. Бу һалда

$$A = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0) \quad (2)$$

ифадэсини $\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$ функциясы өлсөтөспө

$$A = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) \quad (3)$$

кими жазмаг олар. (3) Фэргинэ Лагранжын сонлу артым багындагы теоремини татбиг етсөк,

$$A = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x) \Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1$$

вэ ја

$$A = [f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)] \Delta x \quad (4)$$

барабарлигини аларыг. (4) фэргинэ исэ у дэжишенинэ нэзэрэн Лагранж теоремини татбиг етмөк олар:

$$A = f'_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \cdot \Delta y, \quad 0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1. \quad (5)$$

(2) ифадэси үзэриндэ апардыгымыз эмэли, аты эввэлчэ у, сонра исэ х дэжишенинэ нэзэрэн апарсаг, онда

$$A = f'_{yx}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y) \Delta x \cdot \Delta y, \quad 0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1 \quad (6)$$

алынар. (5) вэ (6) барабарликларинэ эсасан

$$f'_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_{yx}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y)$$

олар. Бу барабарликдэ $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ шэртиндэ лимитэ кечсөк вэ икитэртибли гарышыг хүсуси төрөмэлэрини (x_0, y_0) нөгтөсиндэ кэсилмэз олдуғуну нэзэрэ алсаг,

$$f'_{xy}(x_0, y_0) = f'_{yx}(x_0, y_0)$$

алынар.

Нэтичэ 1. $f(x, y)$ функциясинин икитэртибли гарышыг хүсуси төрөмэлэри о обласинда кэсилмэжэндирсэ, онда һэмим обласида

$$f'_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y) \quad (7)$$

олар. Ја'ни мүхпәлиф аргументлэрэ нэзэрэн ардычыл дифференциалламанын нэтичэси дифференциалламанын нөвбэсиндэн асылы дежилдир.

Нэтичэ 2. $f(x, y)$ функциясинин о обласинда и иэртибэ гэдэр бүтүн хүсуси төрөмэлэри варса вэ һачин обласида кэсилмэжэндирсэ, онда онун и-иэртибли ($m \leq n$) гарышыг хүсуси төрөмэлэринин гијмәтин мүхпәлиф аргументлэрэ нэзэрэн ардычыл дифференциалламанын нөвбэсиндэн асылы дежилдир:

$$\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^m f(x, y)}{\partial y^{n-k} \partial x^k}, \quad (8)$$

Белэ тәклифлэр истәнилән сајда дэжишенин функцијасы үчүн дә доғрудур.

Гејд. Икитэртибли функцијанын икитэртибли гарышыг хүсуси төрөмэлэри үчүн теоремини шэртлэри өджилмәдикдэ (1) барабарлигин доғру ол-

маја ла билэр. Доғрудан дә,

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ олдугда,} \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \text{ олдугда} \end{cases}$$

функцијасынын $(0, 0)$ нөгтөсиндэ $\varphi'_{xy}(0, 0) = 1$ вэ $\varphi'_{yx}(0, 0) = -1$ тәришмәг хүсуси төрөмэлэри вар, ләкин онлар бир-биринэ барабар дежилдир: $\varphi'_{xy}(0, 0) \neq \varphi'_{yx}(0, 0)$. Буну кәбәби $\varphi_{xy}(x, y)$ вэ $\varphi_{yx}(x, y)$ гарышыг хүсуси төрөмэлэринин $(0, 0)$ нөгтөсиндэ кәсилән оламасыдыр.

§ 9. ЈУКСӘКТЭРТИБЛИ ДИФЕРЕНЦИАЛЛАР

Икитэртибли $W = f(x, y)$ функцијасынын бахылан обласида икитэртибли кәсилмэз хүсуси төрөмэлэри олдугда, онун

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (1)$$

дифференциалынын (буна функцијанын биртэртибли дифференциалы дејәчәик) дифференциалындан даһышмаг олар.

Функција дифференциалынын дифференциалына һәмим функцијаны икитэртибли вэ ја икинчи дифференциалы дејилир вэ d^2f, d^2W, \dots вэ с. илэ ишарә олунур:

$$d^2f = d(df), \quad d^2W = d(dW).$$

Икитэртибли дифференциалы һесабламаг үчүн x вэ y сәрбәст дэжишәвләринин dx вэ dy дифференциалларынын сабит әдәлләр олдуғуну вэ һәм дә биртэртибли вэ икитэртибли дифференциаллар үчүн ејни олдуғуну гәбул едәк. Онда (1) барабарлигинин сағ тәрәфин анчаг x вэ y -дән асылы функција олар. Дифференциалын тәрифинә кәрә

$$d^2f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = dx \cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + dy \cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2.$$

Икитэртибли хүсуси төрөмәләр кәсилмэз олдуғундан гарышыг хүсуси төрөмәләр барабар олар (§ 8):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Онда функцијанын икитэртибли дифференциалы үчүн

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \quad (2)$$

ифадэсини аларыг. Ејни гәјдә илэ функцијанын үчтэртибли дифференциалынын дә тәјни етмәк олар:

$$d^3f = d(d^2f) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3. \quad (3)$$

Функциянын $(n-1)$ -тәртібли дифференциалынын дифференциалына һәм функциянын n -тәртібли дифференциалы дейлир: $d^n f, d^n W, \dots$ кими ишара олунур: $d^n f = d(d^{n-1} f)$ Функциянын n -тәртібли дифференциалы үчүн релязи индукция үсулу аясатасила

$$d^n f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + n \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n \quad (4)$$

ифадәсини алмаг олар. Гејд едәк ки, функция дифференциалларынын ифадәсини јаздыгла dx вә dy ифадәләрини мөтәризәдә јазмырлар, $(dx)^k$ вә $(dy)^m$ әвәзинә у/ғуи олараг dx^k вә dy^m јазырлар. Функција дифференциалынын (2), (3) вә (4) ифадәләри гапыларкән бу шәртләр нәзәрә алынмышдыр.

Функциянын јүксәктәртібли дифференциалларыны гысә шәкилдә дә јазмаг олар. Бу мәгсәдлә, (2) бәрәбәрлијинин сағ тәрәфиндә f -и формал олараг мөтәризә кәнарына чыхарып јердә галан ифадәни „икинәдлинин формал квадраты“ шәкилиндә јазар:

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f. \quad (5)$$

(3) вә (4) ифадәләрини дә ејни гајда илә

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f$$

вә

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f \quad (6)$$

кими јазмаг олар. (6) дүстуруну мәнасы беләдир: әвәлчә мөтәризәдәки икинәдлинин гүвәти Нјутон биномуу дүстуру илә формал олараг ачылыр, алынаи $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^m$ гүвәтләри

$\frac{\partial^{k+m}}{\partial x^k \partial y^m}$ илә әвәз едиллир. Сонра исә $\frac{\partial^{k+m}}{\partial x^k \partial y^m}$ ифадәләри формал олараг f -ә „вурулур“:

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial x^k \partial y^m} f = \frac{\partial^{k+m} f}{\partial x^k \partial y^m}.$$

(6) дүстуруну истәкилән сәјдә сәрбәст дәјишәнин функциясы үчүн дә үмумиләшдирмәк олар. Бу һалда, $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясынын n -тәртібли дифференциалы

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^n f \quad (7)$$

шәкилиндә јазылыр.

Гејд едәк ки, (6) вә һәм дә (7) дүстуруну алмаг үчүн апарылан мүнәкимәләрдә функция аргументләринин сәрбәст

дәјишән олдуғу нәзәрә алынмышдыр. Аргументләр сәрбәст дәјишән олдуғда оларын дифференциалы сабит әдәдләр олар.

Функциянын аргументләри сәрбәст дәјишән олмайыб башга дәјишәнләрин функциясы олдуғда онун јүксәктәртібли $d^n f$ дифференциаллары ($n \geq 2$), үмумијәтлә, (6) вә ја (7) шәкилдә олмур.

Доғрудан да, икинәдлинәли $f(x, y)$ функциясынын x вә y аргументләри башга јени t вә τ дәјишәнләринин функциясы $x = x(t, \tau)$, $y = y(t, \tau)$ олдуғда, онун јүксәктәртібли дифференциаллары (6) шәкилдә олмаз. Бу һалда, мәсәлән, функциянын икинәртәртібли дифференциалы

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial x} d(dx) + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial y} d(dy) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y \quad (8)$$

шәкилдә олур. Бу исә (5) ифадәсиндән $\frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y$ һәдди илә фәргләнир.

Демәли, функциянын јүксәктәртібли $d^n f$ ($n \geq 2$) дифференциалынын (6) (вә ја (7)) шәкли инвариант дејилдир.

Хүсуси һалда, икинәдлинәли функциянын x вә y дәјишәнләри јени t вә τ дәјишән, әриндән хәтти асылы. Јәни

$$x = a_1 t + b_1 \tau + c_1, \quad y = a_2 t + b_2 \tau + c_2$$

оларса, онда $d^2 x = d^2 y = \dots = d^n x = 0$, $d^2 y = d^2 y = \dots = d^n y = 0$ олар вә (5) вә (8) ифадәләри үст-үстә дүшәр. Демәли, бу һалда икинәдлинәли f функциясынын јүксәктәртібли дифференциаллары (6) шәкилдә олур. Јәни бу һалда јүксәктәртібли дифференциалларын (6) шәкли инвариантдыр.

Бу тәклиф истәкилән сәјдә дәјишәнин функциясы һағгында да доғрудур.

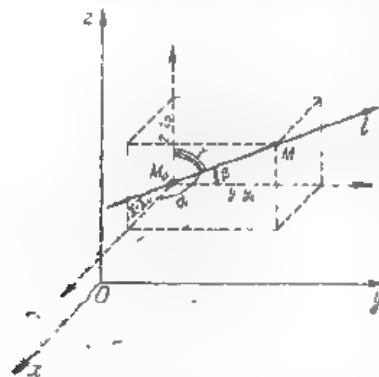
§ 10. ИСТИГАМӘТ ҮЗРӘ ТӨРӘМӘ

Фәрз едәк ки, $W = f(x, y, z)$ функциясы $\in E_3$ областында тәјин олунмушдур вә $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ бу областын һәр һансы нөгтәсидир. M_0 нөгтәсиндән ваһид $\vec{l}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ вектору истигамәтиндә кечән l дүз хәттики кәтүрәк (шәкил 230). Бурада α, β вә γ кәмијәтләри ваһид \vec{l} векторунун координат оқларынын мүсбәт истигамәти илә әмәлә хәтирдји буһағлардыр. l дүз хәтти үзәриндә јерләшән ихтијари $M(x, y, z)$ нөгтәсинин $(M \in \sigma)$ тәјин етдји истигамәтли $M_0 M$ парчасынын (векторунун) гијмәти (III, § 5) р олсун: $r = M_0 M$. Онда

$$\begin{aligned} x - x_0 &= r \cos \alpha, \\ y - y_0 &= r \cos \beta, \\ z - z_0 &= r \cos \gamma \end{aligned} \quad (1)$$

аларыг. Бу һалда f функцијасы l дүз хәтти үзәриндә бир дә-
јишәнин мурәккәб функцијасы олур.

$$f(x, y, z) = f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta, z_0 + \rho \cos \gamma). \quad (2)$$



Шәкил 230

Әкәр (2) функцијасынын ρ дә-
јишәнинә кәрә $\rho \rightarrow 0$ нөгтәсин-
дә төрәмәси вәрса, онда һәммин
төрәмәсә f функцијасынын M_0
нөгтәсиндә верилмиш l истига-
мәти үзәрә төрәмәси дежилур вә

$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$ (вә ја $\frac{\partial f}{\partial l}, \frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0)$)

кимини ишәрә олунур. Ајдын-
дыр ки,

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} \quad (3)$$

олар. Бу һалда $\Delta_l f = f(M) - f(M_0)$ фәрги f функцијасынын
верилмиш l истигамәти үзәрә артымы адланьыр.

Хүсуси һалда, l дүз хәтти абсис оху илә үст-үстә дүш-
дүкдә $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$, ординат оху илә үст-үстә дүшдүкдә $\frac{\partial f}{\partial l} =$
 $= \frac{\partial f}{\partial y}$ вә аппликат оху илә үст-үстә дүшдүкдә $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial z}$ олар

Демәли, истигамәт үзәрә төрәмә хүсуси төрәмә аялајышынын
үмумиләшмәсидир.

Тутаг ки, f функцијасы (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә дифере-
нциалланандыр. Онда онун верилмиш истигамәт үзәрә төрәмәси-
ни мурәккәб функцијанын диференциалланмасы гәјдасына (§6)

$$\frac{df(M_0)}{d\rho} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \frac{dx}{d\rho} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \frac{dy}{d\rho} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \frac{dz}{d\rho}.$$

Тәрифә кәрә $\frac{df(M_0)}{d\rho} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ вә (1) бәрәбарликләринә әса-
сан

$$\frac{dx}{d\rho} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{d\rho} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{d\rho} = \cos \gamma$$

олдугундан нәтижәдә

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma \quad (4)$$

бәрәбарлијини аларыг.

Беләликлә, ашағыдакы теорем исбат олунур:

Теорем. Верилмиш (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә дифе-
ренциалланан f функцијасынын һәммин нөгтәдә исти-

нилә l истигамәти үзәрә төрәмәси вәр вә (4) дүс-
туру илә һесабланьыр.

Бурадан ајдындыр ки, функција верилмиш нөгтәдә дифе-
ренциалланандырса вә хүсуси төрәмәләри мәлумдурса, онда
оқун һәммин нөгтәдә истәнилән истигамәт үзәрә төрәмәсини (4)
дүстуру илә һесабламағ олар. Функција диференциалланан ол-
малыгда исә (4) дүстуруну тәтбиг етмәк олмаз.

Функцијанын верилмиш нөгтәдә диференциалланан олмасы
оқун һәммин нөгтәдә истәнилән истигамәт үзәрә төрәмәсинин
варлығы үчүн кағи шәрт олдуғу һалда зәрури дежилдир.
Функцијанын верилмиш нөгтәдә истәнилән истигамәт үзәрә тө-
рәмәсинин варлығындан һәммин нөгтәдә диференциалланан ол-
масы чыхмыр.

Мисал. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функцијасы $(0, 0)$ нөгтәсиндә
диференциалланан дежилдир, ләкин һәммин нөгтәдә истәнилән
 l истигамәти үзәрә төрәмәси вәр.

Функцијанын $(0, 0)$ нөгтәсиндә диференциалланан олмасы
ајдындыр. Онун истәнилән l истигамәти үзәрә төрәмәси белә
һесабланьыр:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\rho} = 1,$$

бурада $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ олдуғу нәзәрә алынышдыр.

§ 11. ГРАДИЕНТ

Функцијанын төрәмәси онун дәјишмә сүр'әтини көстәрир.
Буна кәрә дә чоҳдәјишәли функцијанын верилмиш нөгтәдә
 l истигамәтиндә төрәмәсинә, онун һәммин нөгтәдә l истигамәти
үзәрә дәјишмә сүр'әти кимини бахмағ олар. Функцијанын мұхта-
лиф истигамәтләрдә дәјишмә сүр'әти, үмумијәтлә ејни олмур.

Бир чоҳ мәсәләләрин һәллиндә бә'зән бахылан функција-
нын верилмиш нөгтәдә ән бөјүк сүр'әтлә артия истигамәтини
тапмағ тәләб олунур. Бу мәсәләни бугада үчдәјишәли f функ-
сијасы үчүн тәдғиг етмәклә кифәјәтләнәк.

Тутаг ки, $W = f(x, y, z)$ функцијасынын $M = (x, y, z)$ нөг-
тәсиндә сонлу $\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \frac{\partial f(M)}{\partial y}$ вә $\frac{\partial f(M)}{\partial z}$ хүсуси төрәмәләри
вар. Бу хүсуси төрәмәләр вәситәсилә

$$\vec{F} = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \vec{k}$$

векторуны дүзәлдәк. \vec{F} векторуна f функцијасынын M нөгтә-
синдә **градиент**и дежилур вә $\vec{F} = \text{grad } f(M)$ кимини ишәрә
олунур. Демәли,

$$\overline{\text{grad } f(M)} = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \bar{k}. \quad (1)$$

f функциясы $\alpha \in E_3$ областында дифференциалланган олдулга онун истәнилән $M \in \alpha$ нөгтәсиндә истәнилән l истигамәти үзрә сонлу $\frac{\partial f(M)}{\partial l}$ төрәмәси олар. Бу төрәмәни функцияның M нөгтәсиндәки градиентки вәситәсилә ифадә етмәк мүмкүндүр.

Догрудан да, l дүз хәтти үзәриндә l ирләшән вәһид \bar{l} ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$) вектору илә (1) векторунун скалјар һасили f функциясының M нөгтәсиндә l истигамәти үзрә төрәмәсинә бәрә бәрди:

$$\begin{aligned} \bar{l} \cdot \overline{\text{grad } f(M)} &= \frac{\partial f(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \cos \beta + \\ &+ \frac{\partial f(M)}{\partial z} \cos \gamma = \frac{\partial f(M)}{\partial l}. \end{aligned} \quad (2)$$

$\bar{l} \cdot \overline{\text{grad } f(M)}$ вә вәһид \bar{l} вектору арасындакы буньг φ олсун. Онда вект рлары скалјар һасилиның тә'рифинә (III, § 9) әсасән (2) бәрәбәрлијиндә

$$\frac{\partial f(M)}{\partial l} = |\overline{\text{grad } f(M)}| \cdot \cos \varphi \quad (3)$$

мүнәсибәти алындыр. Бурадан ајдындыр ки, функциясының M нөгтәсиндә l истигамәти үзрә төрәмәсинин ән бөјүк олмасы үчүн $\varphi = 0$ олмалыдыр, јә'ни функцияның төрәмәси градиентин тә'јин етдији истигамәт үзрә көтүрүлмәлидир. Бу һалда

$$\left(\frac{\partial f(M)}{\partial l} \right)_{\max} = |\overline{\text{grad } f(M)}| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(M)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(M)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(M)}{\partial z} \right)^2} \quad (4)$$

олар. Демәли, дифференциалланган функция верилмиш нөгтәдә өз градиентки истигамәтиндә ән бөјүк сүр'әтлә аргыр вә бу дәјишмә сүр'әтинин ән бөјүк гијмәти градиентки модулуна бәрәбәрди.

Чох вахт функцияның градиенткиң һамилтон¹ оператору (вә ја Набло оператору) ејлан:

$$\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (5)$$

вектор-оператору вәситәсилә ифадә едирләр (∇ ишарәси Набло әдлань):

$$\overline{\text{grad } f(M)} = \nabla f(M). \quad (6)$$

Бу бәрәбәрлијә ∇ векторунун f функциясына „с мволки һасили“ вә ја тә'сири кими бахмаг олар.

¹ У. Һамилтон (1805—1865) иккилис рижинјәтчысыдыр.

§ 12. ТЕЈЛОР ДҮСТУРУ

Бирдәјишәнли функцијалар үчүн мә'лум олан Тејлор дүстуру ујғун шәкилдә чоҳдәјишәнли функциялар үчүн дә доғрудур. Буну, садәлик х: тирина, икидәјишәнли функцијалар үчүн көстәрмәклә кирәјәтләнәк.

Бирдәјишәнли функцијалар үчүн Тејлор дүстуру вә онун галыг һәдди мүхтәлиф шәкиләрдә јазылар (XVI, § 5). Бурада һәммин дүстурун

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(a) &= d\varphi(a) + \frac{1}{2!} d^2\varphi(a) + \dots + \frac{1}{n!} d^n\varphi(a) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}\varphi(\xi) \end{aligned} \quad (1)$$

шәкилдә јазылышындан истифада олунур.

Фәрз едәк ки, икидәјишәнли $f(x, y)$ функцијасы (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмушдур вә $(n+1)$ тәртибә гәдәр кәсимијән бүтүн х:уси төрәмәләри вәр. Бурада x вә y дәјишәнләринә елә Δx вә Δy артымлары верәк ки, алынан $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нөгтәләр јенә вә (x_0, y_0) нөгтәсинин көстәрилән әтрафына дахыл олсун. Онда истәнилән $0 \leq t \leq 1$ үчүн

$$x = x_0 + t \Delta x \quad \text{вә} \quad y = y_0 + t \Delta y$$

дәјишәнләриндән асылы

$$\varphi(t) = f(x, y) = f(x_0 + t \Delta x, y_0 + t \Delta y) \quad (2)$$

функцијасына бахмаг олар. Бирдәјишәнли $\varphi(t)$ функцијасы x вә y дәјишәнләри вәситәсилә t -нин мүрә кәб функцијасыдыр. Белә тә'јин олунмуш бирдәјишәнли $\varphi(t)$ функцијасының $t=0$ нөгтәси әтрафында $(n+1)$ тәртибә гәдәр бүтүн төрәмәләри вәр (§ 6) вә онун үчүн (1) дүстурун јазмаг олар:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(0) &= d\varphi(0) + \frac{1}{2!} d^2\varphi(0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n\varphi(0) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}\varphi(\theta), \end{aligned} \quad (3)$$

бурада $\alpha = 0$, $0 \leq \theta \leq 1$ вә $\Delta t = t - \alpha = 1 - 0 = 1$.

Инди $\Delta \varphi(0)$ вә $d^k \varphi(0)$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$) кәм јјәтләрини f функцијасы вәситәсилә ифадәсини таләг.

(2) бәрәбәрлијиндән

$$\Delta \varphi(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) \quad (4)$$

олмасы ајдындыр. $d^k \varphi(0)$ кә јјәтләрини вәситәсилә ифадә етмәк үчүн нәзәрә алыг лзындыр ки, x вә y дәјишәнләри t -дән хәтти асылыдыр вә буна көрә лә $\varphi(t)$ -нин јүксәктәртибли дифференциаллары 9-чу параграфдакы (6) дүстуру илә һесаблань (§ 9):

$$d^k \varphi(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} d + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x, y).$$

Бүрдэ $t = 0$ олдугда $x = x_0$, $y = y_0$ вэ $t = \theta$ олдугда $x = x_0 + \theta \Delta x$, $y = y_0 + \theta \Delta y$ олдугуну нээгэрэ алдыда

$$d^k \varphi(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x_0, y_0) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

$$d^{n+1} \varphi(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \quad (6)$$

олур. (4), (5) вэ (6) барабарликлэринэ эсвсэн (3)-дэн алырыг:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \quad (7)$$

вэ ја

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y),$$

$$0 < \theta < 1. \quad (8)$$

(8) (вэ ја (7)) барабарлижнэ кидэжншэнли $f(x, y)$ функциясы үчүн *Тејлор дүстуру* дежилир. Барабарлижн саг тэрэ-финдэки

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$$

һэдди *Тејлор дүстурунун Лагранж шэклиндэ галыг һэдди* адланыр.

Тејлор дүстуруну башга шэкилдэ дэ јазмаг олар. Бу мәгсәллә $dx = \Delta x dt$, $dy = \Delta y dt$, $dt = \Delta t = 1 - 0$ (t сәрбәст дэјншән олдугу үчүн), $\Delta x = x - x_0$ вэ $\Delta y = y - y_0$ олдугуну нээгэрэ алмаг лазымдыр. Онда (7) дүстурун

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f[x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0)] \quad (9)$$

кими јазмаг олар.

Хүсуси һалда, $x_0 = 0$ вэ $y_0 = 0$ олдугда (9) дүстуру

$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(0, 0) + \frac{1}{(n+1)!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(\theta x, \theta y) \quad (10)$$

шэклиндэ јазылар. Бу барабарлижә чох заман $f(x, y)$ функциясы үчүн Маклорен дүстуру дежилир.

XXVIII ФАСИЛ

ГЕЈРИ-АШКАР ФУНКСИЈАЛАР ВЭ ОНЛАРЫН ТЭТЫБИ

§ 1. БИРДЭЈИШЭНЛИ ГЕЈРИ-АШКАР ФУНКСИЈАНЫН БАҢЛЫГЫ ВЭ ДИФЕРЕНЦИАЛЛАНЫМАСЫ

Бирдэјишэнли гејри-ашкар функцијанын тэрифи вэ төрө-мәсини: бир сыра һалларда тапмак гадасы эяваллар көстөрилмәшдир (XI, § 7 вэ XIV, § 11).

Тутаг ки, $F(x, y)$, мүстәви нөггәләринин һәр һансы $\sigma = [(x, y)]$ чохлауғунда тәјин олунмуш функцијадыр вэ $E = x$ чохлауғунда $(x \in E \rightarrow (x, y) \in \sigma)$ тәјин олунмуш елә $y = f(x)$ функциясы вар ки,

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

барабарлијини һәмин E чохлауғунда x -ә нәзәрән ејилијә чеви-рир: $F[x, f(x)] = 0$. Онда $y = f(x)$ функцијасына (1) тәнлији васитәсилә E чохлауғунда тәјин олунмуш *гејри-ашкар функција* дежилир.

Бирдэјишэнли функција $y = f(x)$ шәклирдә дүстурла (y -ини y -ә нәзәрән һәлл олунмуш шәкилдә) верилдикдә, она ашкар функција дежилир. Бәзәя (1) тәнлијини y -ә нәзәрән һәлл едәрәк, һәмин тәнликлә тәјин олунан гејри-ашкар функцијаны ашкар шәлә кәтирмәк мүмкүн олур. Мәсәлә, $x^3 + y^3 - 4 = 0$ барабарлији илә тәјин олунан гејри-ашкар $y = \sqrt[3]{4 - x^3}$ функцијасыны һәмин тәнлији y -ә нәзәрән һәлл етмәклә тапмаг олар. Бир чох һалларда исә (1) тәнлијини y -ә нәзәрән һәлл етмәк чох чәтин олур вэ ја мүмкүн олур. Тәрсинә, функција $y = f(x)$ ашкар шәкилдә верилдикдә ону $y = f(x) = 0$ кими јазмагла гејри-ашкар шәкилдә верилмиш функција алы-рыг.

Бурадан ајдындыр ки, функцијаја „ашкар“ вэ ја „гејри-ашкар“ ады верилмәси онун хүсуси бир хәсәси олдуғуну көстәрмир, јалныз һансы үсулла верилдијини көстәрмир.

Мәлүмдүр ки, (1) шәклиндә тәнлик-һәч бир функција тәјин етмәјә д биләр (XI, § 7). Ола да биләр ки, (1) тәнлијини

васитәсилә бир вә ја бир нечә функция тә'јин едиләр. Әлбәт-тә, (1) тәңлији васитәсилә гејри-ашкар $y = f(x)$ функциясы-нын тә'јин олунмасы, һеч дә һәмин тәңлијин y -ә нәзәрән (эле-ментар функциялар сифиндә) һәлл олунә билдијини кәстәр-мир.

Мисәлә, $x = 2y - \sin y$ ($-\infty < y < \infty$)

$$(2)$$

функциясынын бүтүн әдәд охунда y -ә нәзәрән төрәмәси вәг:

$$\frac{dx}{dy} = 2 - \cos y > 0 \text{ вә мүсбәтдир. Бу һәмин функцияның бүтүн}$$

әдәд охунда артан олдуғуну кәстәрир. Артан функцияның нсә тәрә функциясы вәр вә артандыр (XI, § 14). Демәли, $x = 2y - \sin y$ функциясынын монотон артан $y = f(x)$ тәрә функ-циясы вәр вә һәмин функция

$$x - 2y + \sin y = 0 \quad (3)$$

тәңлији васитәсилә гејри-ашкар функция кими тә'јин олунур. (3) тәңлијини y -ә нәзәрән һәлл етмәк (јә'ни, y дә'јишәнини сонду сәјдә элементар функцияларла ифадә етмәк) мүмкүн дејилдир.

(1) тәңлији нә заман гејри-ашкар функция тә'јин едир? Бу гејри ашкар функция дифференциалланан ола биләрми?

Бу суаллара ашағыдакы теорем җаваб верир.

Теорем (гејри-ашкар функцияның зарлыгы). *Җуғтаг ки, $F(x, y)$ функциясы ашағыдакы шәртләри өдәтир:*

1. (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјҗән әтрафында тә'јин олунмушдур вә кәсилмәјән F_x, F_y хәтәси төрәмәләри вәр;

2. $F(x_0, y_0) = 0$ вә $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ мүнәсибәтләри өдә-тилир.

Онда (1) тәңлији x_0 нөгтәсинин мүәјҗән $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ әтрафында гејри-ашкар $y = f(x)$ функциясынын тә'јин едир. Бу гејри-ашкар функция $f(x_0) = y_0$ шәр-тини өдәтир, кәстәрилән $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында кәсилмәјән төрәмәси вәр вә бу төрәмә

$$y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad (4)$$

бустиру илә һесаблиныр

Исбаты. Үмумилији азәлтмәдән фәрз едәк ки, $F_y(x_0, y_0) > 0$.

Онда (x_0, y_0) нөгтәсинин елә $\prod((x_0, y_0); \delta')$ әтрафы вәр ки, һәмин әтрафда кәсилмәјән $F_y(x, y)$ функциясы өз ишарәсини сахлајыр. Јә'ни $F_y(x, y) > 0$ олур. Буна керә дә $F(x, y)$, y -ни функциясы кими $l = [x = x_0, |y - y_0| < \delta']$ пар-чәсында монотон артан, кәсилмәјән вә $y = y_0$ нөгтәсиндә сыфра чеврилән ($F(x_0, y_0) = 0$) функциядыр. Бурадан

$f(x_0, y_0 - \delta') < 0$ вә $F(x_0, y_0 + \delta') > 0$ олмасы ајды: дыр. Онда функ-сияның кәсилмәзлијинә әсәсән елә $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалы тапа биләрик ки, x -ни һәмин $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и тервалында јер-ләшән бүтүн гијмәтләриндә

$$F(x, y_0 - \delta') < 0 \text{ вә } F(x, y_0 + \delta') > 0$$

мүнәсибәтләри өдәниләр.

Инди $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында јерләшән истәнилән x нөгтәси кәтүрәк вә $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ парчәсында y -ә нәзәрән $F(x, y)$ функциясына бахаг. Ајдындыр ки, $F(x, y)$ функ-циясы $(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ y -ә нәзәрән $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ парча-сында артан, кәсилмәјән вә парчанын үч нөгтәләриндә мүхтә-лиф ишарәли гијмәтләр алаң функциядыр. Онда $[y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ парчәсында јерләшән вә $y = f(x)$ кими ишарә олунан елә јеханә y вәр ки $F[x, f(x)] = 0$ олур. Буну ла да, $F(x, y) = 0$ тәңли-јинин $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында гејри-ашкар $y = f(x)$ функ-сиясынын тә'јин етдији исбат олунур. Гејри-ашкар $f(x)$ функ-сиясы $f(x_0) = y_0$ шәртини өдәтир вә онун $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында кәсилмәз олдуғуну асанлыгла исбат етмәк олар.

Гејри-ашкар $y = f(x)$ функциясынын кәсилмәз төрәмәси олдуғуну исбат етмәк үчүн онун артымыни $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ($x, x + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$) илә ишарә едәк. Ајдын-дыр ки,

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \epsilon_1 \right) \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \epsilon_2 \right) \Delta y \quad (5)$$

олар. $y = f(x)$ функциясы кәсилмәз олдуғундан $\Delta x = 0$ шәр-тиндә $\Delta y = 0$ мүнәсибәти өдәнилир. Онда $F(x, y)$ функция-сынын дифференциаллангн олмасына әсәсән $\epsilon_1 \rightarrow 0$ ($\Delta x \rightarrow 0$) вә $\epsilon_2 \rightarrow 0$ ($\Delta x \rightarrow 0$) олар. Шәртә керә $F_y(x, y) > 0$ олдуғундан кифәјәт гәдәр кичик Δx үчүн $F_y(x, y) + \epsilon_2 > 0$ мүнәсибәти дә өдәниләр. Буна керә дә (5) барабәрлијиндән

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x + \epsilon_1}{F_y + \epsilon_2} \text{ вә } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

мүнәсибәтләри алыныр. Демәли,

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (6)$$

Бу барабәрликдә y әвәзинә $f(x)$ јаздыгда

$$f'(x) = -\frac{F'_x[x, f(x)]}{F'_y[x, f(x)]} \quad (F'_y \neq 0)$$

олар. Бу кәсрин сурәти $F'_x[x, f(x)]$ вә мәхрәчи $F'_y[x, f(x)]$ кәсилмәјән функцияның кәсилмәјән функциясы олдуғу үчүн

кәсилмәҗәнтир. $f'(x)$ функцијасы исә иһи кәсилмәҗән функцијанын исбатһи олдуғу үчүн $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалһида кәсилмәҗән олар. Беләликлә, теорем тамамлә исбат олуаур.

Теоремһи исбаты просесһида (1) тәһлији вәситәсилә тәҗһин олуһан геҗри-ашкар $f(x)$ функцијасының төрәмәһин һесаблимағ үчүн (6) дүстуру да тапылды. Бу дүстуру x -һи мүәҗҗән гиҗмәтләри чоһлуғһида доғру олар $F[x, f(x)] = 0$ еҗһилијиһи x -ә һәзәрән диференсиалламағла да алмағ олар:

$$\frac{dF[x, f(x)]}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Бурадан алыһаң

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad (7)$$

еҗһилијиһидән $\frac{dy}{dx}$ төрәмәһини тәҗһин етсәк, һенә дә (6) дүстуруһи аларығ.

Баһыһан обдаһта $F(x, y)$ функцијасының икитәртибһи кәсилмәз хусуси төрәмәләри олдуғда (1) тәһлијиһи тәҗһин етдији геҗри-ашкар $f(x)$ функцијасының икитәртибһи төрәмәһини дә тапымағ олар. Бу мәғсадлә (6) бәрәбәрлијиһи сағ тәраһини x -һи мүрәккәб функцијасы һесаблимағ лаһымдыр ($y = f(x)$). Онда һәмһи дүстурдан

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{F_x}{F_y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{F_x}{F_y} \right) \cdot \frac{dy}{dx}$$

вә һа

$$y' = -\frac{F_{xx} F_y - F_{xy} F_x}{(F_y)^2} - \frac{F_{xy} F_y - F_{yy} F_x}{(F_y)^2} \cdot y'$$

аларығ. y' -һи (6) дүстурундакы гиҗмәтиһи һерһиә һаһағ вә алыһан ифадәһи сәдәләшдирәк:

$$y' = -\frac{(F_y)^2 \cdot F_{xx} - 2 F_{xy} F_x F_y + (F_x)^2 \cdot F_{yy}}{(F_y)^3} \quad (8)$$

Бу дүстуру (7) еҗһилијиһи x -ә һәзәрән диференсиалламағла да алмағ олар. Нәһаҗәт, геҗри-ашкар $y = f(x)$ функцијасының һүксәктәртибһи төрәмәләриһи тапымағ үчүн бу просеси даһа етдирмағ лаһымдыр.

Мисал. $x - 2y + \sin y = 0$ тәһлији һлә тәҗһин олуһмуш геҗри-ашкар $y = y(x)$ функцијасының биртәртибһи вә икитәртибһи төрәмәләриһи тапымағ.

(6) вә (8) дүстуруларыһа көрә

$$y' = \frac{1}{2 - \cos y}, \quad y'' = \frac{\sin y}{(1 - \cos y)^2}$$

олар.

§ 2. БИРДӘҢИШӘНЛИ ГЕҖРИ-АШКАР ФУНКЦИЈАЛАРЫН БИР СЫРА ТӘТБИГЛӘРИ

Геҗри-ашкар функцијаның варлығы һағһида теоремһи (§ 1) тәрә функцијаның варлығы вә геҗри-ашкар шәһилдә верилмиш әҗрисини тохунаныңы вә нормалыңы тапымағ мәсәләһиә тәтбиғ едак.

1. Тутағ ки, $y = f(x)$ функцијасы x_0 һөгтәһиниң мүәҗҗән әтраһиңда тәҗһин олзһмуш функцијадыр. Бу функцијаны $y - f(x) = F(x, y) = 0$ тәһлији һлә тәҗһин олзһмуш функција һесаблимағ олар.

Иһди белә бир мәсәләһиң-тәдғиғ һлә мәшғул олар: $y - f(x) = 0$ тәһлији һә заман y_0 ($y_0 = f(x_0)$) һөгтәһиниң әтраһиңда x -ә һәзәрән һәлл олуһа биләр? $y - f(x) = 0$ тәһлијиһиңи аһтарыһан $x = f^{-1}(y)$ һәлли верилмиш $y = f(x)$ функцијасының тәрә функцијасы олар.

Әвәәһки параграфда геҗри-ашкар функцијаның варлығы һағһида исбат едһилиш теорема әсәһән тоҗуһиһи мәсәләһиң һәлли һағһида аһағһыдакы һәтиҗә алыһыр: $y = f(x)$ функцијасының x_0 һөгтәһиниң әтраһиңда сыфра бәрәбәр олмаһан сонлу төрәмәһи олдуғда, һәмһи һөгтәһиңи мүәҗҗән әтраһиңда верилмиш функцијаның $x = f^{-1}(y)$ тәрә функцијасы вәр вә бу тәрә функција y_0 ($y_0 = f(x_0)$) һөгтәһиниң мүәҗҗән әтраһиңда диференсиалланандыр. Тәрә функцијаның y_0 һөгтәһиңдә төрәмәһи әвәәһки параграфда исбат едһилиш (3) дүстуру һлә һесаблиһыр:

$$x_y' = -\frac{F_y'(x_0, y_0)}{F_x'(x_0, y_0)} = -\frac{1}{f'(x_0)} \quad (1)$$

Бу дүстур тәрә функцијаның төрәмәһи һағһида мәһлум олар (XIV, § 7) дүстурла үст-үстә дүшүр.

2. Координатлары верилмиш

$$F(x, y) = 0 \quad (2)$$

тәһлијиһиңи өдәһән $M(x, y)$ һөгтәләри чоһлуғһу L һлә иһарә едак. L бош чоһлуғ олмадығда она мүстәһи әҗри, (2) бәрәбәрлијә һә онун тәһлији деҗһилір (VI, § 2). Бу һалда, чоһ вахт деҗһиләр ки, (2) тәһлији геҗри-ашкар шәһилдә L әҗрисини тәҗһин едир вә һа L әҗриси геҗри-ашкар (2) тәһлији һлә верилмишдир. Верилмиш $M_0 = (x_0, y_0)$ һөгтәһиңдә $F_x'(x, y)$ вә $F_y'(x, y)$ хусуси төрәмәләриһиңиң һеч олмаса бири сыфрадак фәргәһи олдуғда, һәмһи һөгтәһә L әҗрисиниң ади вә һа дүз-кун һөгтәһи деҗһилір. Әһәр $F_x'(x_0, y_0) = F_y'(x_0, y_0) = 0$ мәһәһи-бәһи өдәһиләһә, онда M_0 һөгтәһи L әҗрисиниң мәһсуси һөгтәһи адыһыр.

Тутағ ки, M_0 һөгтәһи L әҗрисиниң ади һөгтәһидир вә $F_y'(x_0, y_0) \neq 0$. Онда (2) тәһлији M_0 һөгтәһиниңи мүәҗҗән әтраһиңда

дифференциалланган гејри-ашкар $y = f(x)$ функцијасынын тәјин едәр. Бу функција бин һәммин әтрафда јерләшән графиги ади гәвс олачәгдыр. M_0 нөгтәсиндә һәммин гәвсүн мүәјјән тохунаны вә нормалы вар ($f(x)$ функцијасынын x_0 нөгтәсиндә соплу

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

тәрәсәи олдуғуна хәрә).

Әјријә (x_0, y_0) нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын тәнлији (XIV, § 2)

$$y - y_0 = \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(x - x_0), y_0 = f(x_0)$$

вә ја

$$F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) = 0 \quad (3)$$

олар. Һәммин нөгтәдә әјријә чәкилмиш нормалын тәнлији (XIV, § 2) исә

$$y - y_0 = \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(x - x_0), F'_x(x_0, y_0) \neq 0$$

вә ја

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)} \quad (4)$$

олар.

Мисал. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболасына (x_0, y_0) ($y_0 \neq 0$)

нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын тәнлији

$$\frac{x_0}{a^2} x - \frac{y_0}{b^2} y = 1,$$

нормалын тәнлији исә

$$\frac{a^2}{x_0}(x - x_0) + \frac{b^2}{y_0}(y - y_0) = 0$$

олар.

§ 3. ЧОХДӘЈИШӘНЛИ ГЕЈРИ-АШКАР ФУНКЦИЈА ВӘ ОНУН ВАРЛЫҒЫ

Чохдәјишәнли гејри-ашкар функцијалар бирдәјишәнли гејри-ашкар функцијалара аналәли оларәг тәјин едиләр.

Фәрз едәк ки, $(n+1)$ -дәјишәнли (x, \dots, x_n, y) функцијасы $(n+1)$ -өлчүлү E_{n+1} фәзасы нөгтәләринин һәр һәсәи $\alpha = (x_1, \dots, x_n, y)$ чохлағунда тәјин олунмуштур вә $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәләринин һәр һәсәи E чохлағунда $(X \in E, (x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \alpha)$ тәјин олунмуш n -дәјишәнли елә $y = f(X)$ функцијасы вар ки, һәммин (унксија

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0 \quad (1)$$

бәрәбәрлијини E чохлағунда $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәләриннә нәзәрән ејиклијә чевирәр:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0. \quad (2)$$

Онда n -дәјишәнли $y = f(x_1, \dots, x_n)$ функцијасына (1) тәнлији вәситәсиә E чохлағунда тәјин олунмуш гејри-ашкар функција дөјиләр.

Мәсәлән, $z^2 - x^2 - y^2 \cos^2 x - 5 = 0$ тәнлији бүтүн мүстәвидә икидәјишәнли гејри-ашкар $z = \sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 x + 5}$ функцијасыны тәјин едир. Догрудан да, z -ни бу ифадәсини тәнликдә јеринә јазсағ, x вә y -ни бүтүн гијмәтләриндә өдәннлән

$$(\sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 x + 5})^2 - x^2 - y^2 \cos^2 x - 5 = 0$$

ејинлијини аларығ. $z^4 + x^4 + y^2 + 5 = 0$ тәнлији исә һеч бир гејри-ашкар функција тәјин етмәр.

Демәли, (1) тәнлији һеч бир функција тәјин етмәјә дө би-ләр. Ола да биләр ки, һәммин тәнлик бир вә ја бир нечә функција тәјин едир.

Чохдәјишәнли гејри-ашкар функцијанын вәрлығы һағгында кафи шәрт ашағыдакы теоремдә көстәриляр.

Теорем. Тутал ки, $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ функцијасы ашағыдакы шәртләри өдәјир:

1. $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_0)$ нөгтәсинин мүәјјән әтра-фында тәјин олунмуштур вә кәси алағын хүсуси тө-рәмәләри (биртәртибли) вар.

2. $F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_0) = 0$ вә $F'_y(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_0) \neq 0$ мунасибәтләри өдәтиляр.

Онда (1) тәнлији $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нөгтәси-нин мүәјјән әтрафында n -дәјишәнли гејри-ашкар $y = f(X)$ функцијасыны тәјин едир. Бу гејри-ашкар функција $y_0 = f(X^{(0)})$ шәртини өдәјир. $X^{(0)}$ нөгтәси-нин һәммин әтрафында кәси алағын хүсуси төрәмәләри вар вә һәммин төрәмәләр

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad (x = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

дүстуруну илә һесаблаиляр.

Бу теорем бирдәјишәнли гејри-ашкар функцијанын вәрлығ теоремин (§ 1) кийи исбат олунур.

Гејд едәк ки, гејри-ашкар f функцијасынын хүсуси төрәмә-ләрини һесабламағ үчүн көстәрилән (3) дүстуруну, (2) бәрә-бәрлијини x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) аргументинә нәзәрән диферен-сиалламағда да алмағ олар. Догрудан да, ејиниклә сыфра бәрә-бәр олан $F[x_1, x_2, \dots, x_n, (f(x_1, \dots, x_n))]$ функцијасынын x_k -ја

нәзәрән там хусуси төрәмәси дә сыфра барабар олар.

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Бурадан (3) дүстүрү алыныр.

F функциясинин икитәртибли кәсилмәҗән хусуси төрәмәләри олдуҗда (4) барабарликларини x_k аргументларинә нәзәрән дифференциалламаҗа геҗри-ашкар f функциясинин икитәртибли хусуси төрәмәләрини дә таппаҗ олар. Бу мәҗсәддә (4) барабарлиҗини x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) аргументинә нәзәрән дифференциалласаҗ, аларыҗ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_i} = 0, \\ (i, k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Биртәртибли $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ вә $\frac{\partial y}{\partial x_k}$ төрәмәләринин (3) барабарлиҗиндән

геҗмәтларини тапыҗ, бурада җеринә җазмаҗла икитәртибли $\frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_i}$ хусуси төрәмәләрини таппаҗ олар. Бу процеси давам етдирмәклә бәшҗа җүксәктәртибли хусуси төрәмәләр дә тапылыр.

§ 4. ГЕҖРИ-АШКАР ШӘКИЛДӘ ТӘНЛИКЛӘ ВЕРИЛМИШ СӘТНИН ТОХУНАН МҮСТӘВИСИ ВӘ НОРМАЛЫ

Фәзада верилмиш координат системиндә

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

тәңлиҗи илә тәҗин олунаҗ S сәтнинә бахаҗ (VIII, § 7). Фәзә едәк ки, $F(x, y, z)$ функциясинин биртәртибли кәсилмәҗән бүтүн хусуси төрәмәләри вар.

Верилмиш $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсиндә $F'_x(x_0, y_0, z_0)$, $F'_y(x_0, y_0, z_0)$ вә $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ хусуси төрәмәләринин һеҗ олмаҗа бири сыфрдан фарели олдуҗда, һәмни нөгтәҗә S сәтниникин ади вә җа дүзкүк нөгтәси деҗилир. $F'_x(M_0) = F'_y(M_0) = F'_z(M_0) = 0$ мунасибәти өдәнилсә, онда M_0 нөгтәси S сәтниникин махсуси нөгтәси адланыр.

Тутәҗ ки, M_0 нөгтәси S сәтниникин ади нөгтәсидир вә бу нөгтәдә $F'_x(M_0) \neq 0$. Онда чоҗдәҗишәнли геҗри-ашкар функциясинин варлыҗ теореминә (§ 3) көрә (1) тәңлиҗи M_0 нөгтәсинин мүәҗҗән әтрафында дифференциалланан геҗри-ашкар $z =$

$= f(x, y)$ функциясини тәҗин едир. Бу функциясини һәмни әтраҗда җерләшән графиги саҗа сәтдир вә M_0 нөгтәсиндә онун тохунаҗ муҗтәвиси вә нормалы вар.

Иҗди һәмни сәтһә M_0 нөгтәсиндә тохунаҗ муҗтәвинин вә нормалын тәңлиҗини (XXVII, § 5) таппаҗ.

$f(x, y)$ функциясинин $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсиндә хусуси төрәмәләри әвәлҗи париграфда чыхарилмиш (3) дүстүрү илә һесаҗланыр

$$f'_x(x_0, y_0) = - \frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad f'_y(x_0, y_0) = - \frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Онда M_0 нөгтәсиндә сәтһә тохунаҗ муҗтәвинин тәңлиҗи (XXVII, § 5)

$$z - z_0 = \frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} (x - x_0) + \frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} (y - y_0)$$

вә җа

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) (z - z_0) = 0 \quad (2)$$

олар. Көстәрилән нөгтәдә сәтнин нормалынин тәңлиҗи иҗә

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \quad (3)$$

кимни җазылар.

Мисал. $x + y^2 + z^2 = k^2$ сфәрасына (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндә ($z_0 \neq 0$) тохунаҗ муҗтәвинин тәңлиҗи

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = k^2$$

вә нормалын тәңлиҗи

$$\frac{x - x_0}{x_0} = \frac{y - y_0}{y_0} = \frac{z - z_0}{z_0} \quad (x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0)$$

олар.

§ 5. ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИНДӘН ТӘҖИН ОЛУНАН ГЕҖРИ-АШКАР ФУНКЦИЈАЛАР ВӘ ЯКОБИ ДЕТЕРМИНАНТЫ

Фәзә едәк ки, m -өлчүлү фәзаны мүәҗҗән нөгтәләр чоҗлуҗунда тәҗин олуныҗ m -дәҗишәнли $\psi_k(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $k = 1, 2, \dots, m$ функцијаларын бүтүн дәҗишәнләрә нәзәрән сонлу хусуси төрәмәләри вардыр. Бу төрәмәләрдән ашаҗыдыҗы кимни детерминант дүзәлдәк

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

(1) *детерминанта* $\psi_k(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($k=1, 2, \dots, m$) *функциялар системинин* x_1, x_2, \dots, x_m *дәйишәкләринә нәзәрән* *Якобианы* *вә* *Якобинин* *функционал детерминанты* *дежиләр* вә

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}$$

ими ишарә олунур. $m=1$ *олдугда* *Якобиан* *бирдәјишәнли* $\psi_1(x_1)$ *функциясынын* x_1 *дәйишәннә нәзәрән төрәмәсинә* *чевирлир*:

$$\frac{D(\psi_1)}{D(x_1)} = \frac{d\psi_1(x_1)}{dx_1}.$$

Буна кәрә дә *Якобиана* *төрәмә янлајышынын* *чохдәјишәнли* *функциялар системи* *үчүн* *үмүмиләшмәси* *кими* *бахмаг* *олар.*

Инди $(n+m)$ -өлчүлү фазанын m -дәјишәнли $F_k(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ ($k=1, 2, \dots, m$) *функцияларындан* *дүзәлмиш*

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ \dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

тәңликләр системи *кә* *бахат.* *Бу* *тәңликләр системи* *ндән* y_1, y_2, \dots, y_m *дәјишәнләрини* *јердә* *галан* x_1, x_2, \dots, x_n *дәјишәнләр* *вә* *ситәси* *илә* *тапмаг* *мүмкүн* *олдугда* *һәм* *һәм* *тәңликләр системи* *васитәсилә* *тәјин* *олуван* n -*дәјишәнли*

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

функциялары *алынар.*

(3) *функциялары* n -*өлчүлү* *фаза* *нөгтәләринин* *һәр* *һансы* E *чохлуғунда* *тәјин* *олунмуш* *вә* (2) *тәңликләр системи* x_1, x_2, \dots, x_n *дәјишәнләринә* *кәрә* E *чохлуғунда* *ејилилјә* *чевирән*

$$F_k[x_1, x_2, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)] = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

јекә *ә* *функциялар системи* *олдугда,* *дејирләр* *ки,* *һәм* *һәм* *функциялар* (2) *тәңликләр системи* *васитәсилә* *тәјин* *олунмуш* *гејри-ашкар* *функциялардыр.*

Мәсәлән,

$$\begin{cases} 7x + y + 2z = 0, \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

гәңликләр системи $E = (-\infty, \infty)$ *чохлуғунда* *гејри-ашкар* $y = 3x$ *вә* $z = -5x$ *функцияларынын* *тәјин* *едир.*

Карл Густав Яков Якоби (1804—1851) аячан рижалы јатчысыдыр.

Әлбәттә, верилмиш тәңликләр системи һеч бир гејри-ашкар функция тәјин етмәјә дә биләр. (2) тәңликләр системинин һансы кафи шәртләр дахилиндә гејри-ашкар функциялар тәјин етмәсинин ашағыдакы теорем шәклиндә сөјләмәк олар.

Теорем. *Дунаг ки,* $F_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ ($k=1, 2, \dots, m$) *функциялары* *ашағыдакы шәртләр* *одајыр:*

1. $(X^{(0)}, Y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ *нөгтәсинин* m -*дәјишәнли* $(n+m)$ -*өлчүлү* *әтрафында* *тәјин* *олунмуш* *һәм* *һәм* *әтрафда* *кәсәлмәјән* *бир* *тартибли* *бүтүн* *хүсуси* *төрәмәләр* *вардыр.*

2. $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ *нөгтәсинин* *координатлары* (2) *системинин* *одајыр:*

$$F_k(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

вә $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}$ *Якобианы* $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ *нөгтәсиндә* *сифырдан* *фәрглидир.*

Онда (2) *тәңликләр системи* $(X^{(0)}, Y^{(0)} \pm) = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ *нөгтәсинин* m -*дәјишәнли* *әтрафында* n -*дәјишәнли* *гејри-ашкар* $f_k(x_1, \dots, x_n)$ ($k=1, 2, \dots, m$) *функцияларынын* *тәјин* *едир.* *Бу* *гејри-ашкар* *функциялар* $f_k(X^{(0)}) = y_k^{(0)}$ ($k=1, 2, \dots, m$) *шәртини* *одајыр* *вә* $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ *нөгтәсинин* *кәсәлмәјән* *әтрафында* *бүтүн* *дәјишәнләр* *нәзәрән* *кәсәлмәјән* *хүсуси* *төрәмәләр* *вардыр.*

Теоремни исбаты верилмир.

Теоремни шәртләрнә өдәнилдикдә (2) *системиндән* *тәјин* *олуван* *гејри-ашкар* (3) *функцияларынын* *хүсуси* *төрәмәләр* *ни* *тапмаг* *үчүн* (4) *ејиликләр* x_i ($i=1, 2, \dots, n$) *аргумент* *нәзәрән* *дифференциалламаг* *лазымдыр:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_1} &= 0, \\ \dots &\dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Бу систем ахтарылан $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_1}$ *хүсуси* *төрәмәләр*

ринә *кәрә* m -*мәңһуллау* m *дәнә* *хәтти* *тәңликләр системи* *дир.* *Һәм* *һәм* *систем* *әсас* *детерминанты* *(мәңһулларын* *әмсалларын* *дан* *дүзәлдилмиш* *детерминант)* *олан*

$$\Delta = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \quad (6)$$

Якобианы $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ *нөгтәсиндә* *сифырдан* *фәрглидир.* *Буна*

$$\frac{\partial y_{\kappa}}{\partial x_1} = \frac{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_{\kappa-1}, x_1, y_{\kappa+1}, \dots, y_m)}}{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$
$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1)$$
$$A = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$
$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (2)$$

182

аларса, онда хэмин хүсуси төрэмэлэр $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ сыфра бэрэбэр олар: $\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_k} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Исбаты. $f(X)$ функциясны $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ аргументлэрини гелд етдикдэ бирдэишэнли $\varphi(x_k) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ функцияс алыныр. Теоремин шэртинэ хэрэ $\varphi(x_k)$ функцияс $x_k = x_k^{(0)}$ нөгтэсиндэ локал экстремум гүмэт алар. Функцияны төрэмэси локал экстремум нөгтэсиндэ сыфра бэрэбэр (XVII, § 4) олдуғундан

$$\varphi'(x_k) = \varphi'_k(X^{(0)}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

олар.

Функция, локал экстремум гүмэт алдыгы $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ дифференциаллан олдуғда, экстремумун варлыгы үчүн зарури шэрти башга шэкилдэ дэ сөйлөмөк олэр. Догрудан да, (3) бэрэбэрликлэри өдөнилдикдэ функцияны там дифференциалы аргументлэрин dx_k ($k = 1, 2, \dots, n$) дифференциалларына нэзэрэн $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ еңиликлэ сыфра бэрэбэр олар:

$$df(X^{(0)}) = 0. \quad (4)$$

Бунун тэрсин дэ доғрудур (4) - (3). Экэр $dx_k \neq 0$ вэ $dx_1 = \dots = dx_{k-1} = dx_{k+1} = \dots = dx_n = 0$ габул етсэк, онда

$$df(X^{(0)}) = \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_k} dx_k + \dots + \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_n} dx_n = \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_k} dx_k = 0$$

мүнэсибэтиндэн (3) алыныр.

Бурадан ашағыдакы тэклиф алыныр: экэр $f(X)$ функциясы дифференциаллан олдуғу $X^{(0)}$ нөгтэсиндэ локал экстремум гүмэт алырса, онда хэмин нөгтэдэ $f(X)$ функцияс үчүн (4) шэрти өдөнилэр.

Функция локал экстремум гүмэтини хүсуси төрэмэлэринин бири вэ ја бир нечэси олмадыгы нөгтэлэрдэ дэ ала билэр.

Масэлэн, $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ вэ $\psi(x, y) = |x| + |y|$ функциялары (0, 0) нөгтэсиндэ локал минимум гүмэт алыр, лакин хэмин нөгтэдэ хүсуси төрэмэлэри жохдур.

Бирдэишэнли функциялара аналожи олараг чоҳдэишэнли функцияны биртэртибли бүтүн хүсуси төрэмэлэринин сыфра чеврилдији вэ ја неч олмас бир дэишэнэ нэзэрэн хүсуси төрэмэсинин олмадыгы нөгтэдэ функцияны "бөһран нөгтэлэри" дэилир.

Демэли, функцияны локал экстремум гүмэт алдыгы һэр бир нөгтэ хэмин функцияны бөһран нөгтэсидир.

Локал экстремумун варлыгы үчүн бу зарури шэрт кафи дэилдир. Бөһран нөгтэсиндэ функция локал экстремум гүмэт алмаја да билэр. Масэлэн, (0, 0) нөгтэси $f(x, y) = xy$ функциясны бөһран нөгтэсидир, лакин функция бу нөгтэдэ ло-

кал экстремум гүмэт алмыр. Чункы (0, 0) нөгтэсинин ястэчилэн атрафында $f(x, y)$ функцияс $f(0, 0) = 0$ гүмэтиндэн һэм бөһүк вэ һэм дэ кичик гүмэтлэр алыр.

Функцияны верилмиш бөһран нөгтэсиндэ локал экстремум гүмэт алдыгыны нечэ билмөк олар?

§ 2. ЭКСТРЕМУМУН ВАРЛЫГЫ ҮЧҮН КАФИ ШЭРТ

Икидэишэнли $f(x, y)$ функциясны верилмиш (x_0, y_0) бөһран нөгтэсиндэ локал экстремум гүмэт алмасы шэртини мүэјјэн едөк.

Бу мәсәдлә фэрз едөк ки, $f(x, y)$ функциясны (x_0, y_0) бөһран нөгтэсинин мүэјјэн атрафында бүтүн икитэртибли хүсуси төрэмэлэри вар, бу $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ хүсуси төрэмэлэри хэмин нөгтэдэ кэсылмәјјэндир вэ $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Бундан башга, $a_{11} = f_{xx}(x_0, y_0)$, $a_{12} = f_{xy}(x_0, y_0)$, $a_{22} = f_{yy}(x_0, y_0)$ вэ $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ олсун.

Онда верилмиш бөһран нөгтэсиндэ локал экстремумун варлыгы һагында ашағыдакы теорем исбат етмөк олар.

Теорем. $\Delta > 0$ вэ $a_{11} > 0$ олдуғда $f(x, y)$ функцияс (x_0, y_0) бөһран нөгтэсиндэ локал минимум гүмэт алыр, $\Delta > 0$ вэ $a_{11} < 0$ олдуғда $f(x, y)$ функцияс (x_0, y_0) бөһран нөгтэсиндэ локал максимум гүмэт алыр, $\Delta < 0$ олдуғда исә функция (x_0, y_0) бөһран нөгтэсиндэ локал экстремум гүмэт алмаја да билэр, алмаја да билэр.

Исбаты. Ајындыр ки, $f(x, y)$ функциясны (x_0, y_0) нөгтэсиндэ локал экстремум гүмэт алмасы үчүн хэмин нөгтэсини јахын атрафында онун

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (1)$$

там артымы өз ишарэсини сахламалыдыр:

$$\text{локал максимум гүмэт алдығда } \Delta f < 0, \quad (2)$$

$$\text{локал минимум гүмэт алдығда } \Delta f > 0.$$

Буна хэрэ дэ $f(x, y)$ функциясны (x_0, y_0) нөгтэсиндэ локал экстремум гүмэт алмасыны жохламаг үчүн онун (x_0, y_0) нөгтэси атрафында (1) там артымыны тэдгиг етмөк лавымдыр. Бу мәсәдлә, $f(x, y)$ функциясны (x_0, y_0) нөгтэси атрафында Тејлор дүстуруну јазаг ($n=2$):

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \Delta x + \\ &+ f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \frac{1}{2} [f''_{xx}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) (\Delta x)^2 + \\ &+ 2f''_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x \Delta y + \\ &+ f''_{yy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) (\Delta y)^2], \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Бурадан $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ олдуғуна эсасан

$$\Delta f = \frac{1}{2} [f''_{xx}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) (\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x \cdot \Delta y + f''_{yy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) (\Delta y)^2], \quad 0 < \theta < 1 \quad (3)$$

аларыг. Икитэртибли хусуси төрөмөлөр (x_0, y_0) нөгтөсінде касилмәјән олдуғундан

$$\begin{aligned} f'_{xx}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) &= a_{21} + \alpha, \\ f'_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) &= a_{12} + \beta, \\ f'_{yy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) &= a_{22} + \gamma \\ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \gamma = 0 \end{aligned}$$

мүнасибәтләрини јазмаг олар. Онда (3) бәрабәрлији ешағдылы кими јазылар:

$$\Delta f = \frac{1}{2} [a_{11}(\Delta x)^2 + 2a_{12}\Delta x \cdot \Delta y + a_{22}(\Delta y)^2 + \alpha(\Delta x)^2 + 2\beta\Delta x \cdot \Delta y + \gamma(\Delta y)^2]. \quad (4)$$

$M_0 = (x_0, y_0)$ вә $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нөгтәләри арасындакы мәсафа ρ вә M_0M векторунун абсис оқунун мүсбәт истигамәти илә әмәлә кәтирдји бучаг φ олсун. Онда

$$\Delta x = \rho \cos \varphi, \quad \Delta y = \rho \sin \varphi$$

олар. Бу гијмәтләри (4) бәрабәрлијиндә јеринә јаздыгда,

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2} (a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \cdot \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi + 2\beta \cos \varphi \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi)$$

вә ја

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2} [A(\varphi) + \varepsilon(\varphi)] \quad (5)$$

алыныр; бурада

$$A(\varphi) = a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \cdot \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi,$$

$$\varepsilon(\varphi) = \alpha \cos^2 \varphi + 2\beta \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi$$

вә

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\varphi) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon(\varphi) = 0.$$

(5) бәрабәрлијиндән ајдындыр ки, ρ -нун кифәјәт гәдәр кичик гијмәтләриндә функцијаның Δf там артымының ишарәси $A(\varphi)$ ифадәсинин гијмәтиндән асылыдыр (чүнки, $\rho \rightarrow 0$ шәртиндә $\varepsilon(\varphi) \rightarrow 0$). Инди $A(\varphi)$ ифадәсини

$$A(\varphi) = \frac{1}{a_{11}} [(a_{11} \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \sin^2 \varphi] \quad (6)$$

шәклиндә јазаг вә теоремдә көстәрилән һаллары әјрылыгда тәдгиг едәк.

I. $\lambda = a_{21}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ вә $a_{11} > 0$ олдугда $A(\varphi)$ ифадәси һәми-

шә мүсбәт олар. Доғрудан да, $\sin \varphi \neq 0$ олдугда (6) бәрабәрлијиндә мө'тәризәнин дахилиндәки ифадә мүсбәт олар

$$(a_{11} \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi)^2 + \lambda \sin^2 \varphi > 0.$$

$\sin \varphi = 0$ олдугда кәсә $\cos \varphi \neq 0$ олар ки, бу һалда да мө'тәризә дахилиндәки ифадә јенә дә мүсбәтдир:

$$(a_{11} \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi)^2 + \lambda \sin^2 \varphi - a_{11} \cos^2 \varphi > 0.$$

Бурадан вә (5) бәрабәрлијиндән ајдындыр ки, $\lambda > 0$ вә $a_{11} > 0$ олдугда (x_0, y_0) нөгтәсинин јахын әтрафындакы бүтүн нөгтәләрдә функцијаның там артымы мүсбәт олур: $\Delta f > 0$, јә'ни $f(x, y)$ функцијасы (x_0, y_0) нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алыр.

II. $\lambda > 0$ вә $a_{11} < 0$ олдугда икә јенә дә (6) бәрабәрлијиндә мө'тәризә дахилиндәки ифадә һәмишә мүсбәт олар (I һалда көстәрилдији кими) вә буна көрә дә $A(\varphi)$ -нин ишарәси a_{11} -ни ишарәсини ејни олур, јә'ни $A(\varphi) < 0$.

Демәли, бу һалда (5) бәрабәрлијинә көрә $\Delta f < 0$ олур ки, бу да $f(x, y)$ функцијасының (x_0, y_0) нөгтәсиндә локал максимум гијмәт алдығыны көстәрир.

III. $\lambda < 0$ олдугда $A(\varphi)$ кәмијјәти (x_0, y_0) нөгтәсинин истә нилән әтрафында һәм мүсбәт вә һәм дә мәңфи гијмәтләр алыр. Доғрудан да, $a_{11} \neq 0$ оларса, $\varphi = \varphi_1 = 0$ көтүрдүкдә $A(\varphi) = A(\varphi_1) = a_{11}$, φ -јә $a_{11} \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi = 0$ тәнлијиндән тәјин олунмуш $\varphi = \varphi_2$ гијмәтини вердикдә икә

$$A(\varphi) = A(\varphi_2) = \frac{\lambda}{a_{11}} \sin^2 \varphi_2$$

олар. $A(\varphi_1)$ вә $A(\varphi_2)$ сыфырдан фәргли вә мүхтәлиф ишарәли әдәдләрдир. Демәли, $A(\varphi)$ кәмијјәти вә буна көрә дә Δf там артымы, (x_0, y_0) нөгтәсиндән чыхан $\varphi = \varphi_1$ вә $\varphi = \varphi_2$ шүәлары үзәриндә мүхтәлиф ишарәли гијмәтләр алыр. $a_{11} = 0$ олдугда да $A(\varphi)$ кәмијјәтинин (x_0, y_0) нөгтәсинин истә нилән јахын әтрафында мүхтәлиф ишарәли гијмәтләр алдығыны көстәрмәк олар. Бурадан ајдындыр ки, $f(x, y)$ функцијасы (x_0, y_0) нөгтәсиндә локал экстремум гијмәт алмыр.

IV. $\lambda = 0$ олдугда $f(x, y)$ функцијасы бөһран нөгтәсиндә локал экстремум гијмәт ала да биләр, алмаја да биләр. Доғрудан да, $f(x, y) = x^4 + y^4$ вә $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ функцијаларының һәр икиси үчүн $(0, 0)$ бөһран нөгтәсидир. Бу функцијаларың һәр икиси үчүн $\lambda = 0$ бәрабәрлији өдәнилир. Һәмиң функцијаларың бири $f(x, y) = x^4 + y^4$ функцијасы, $(0, 0)$ бөһран нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алыр, о бири $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ функцијасы икә $(0, 0)$ бөһран нөгтәсиндә локал экстремум гијмәт алмыр.

Мисал. $f(x, y) = \frac{1}{3} x^3 + y^2 - 4xy + 3$ функцијасының локал экстремум гијмәтләрини тапмалы.

$f'_x = x^2 - 4y$ ва $f'_y = 2y - 4x$ олдуғундан бөһран нөгтэләри

$$\begin{cases} x^2 - 4y = 0, \\ 2y - 4x = 0 \end{cases}$$

системини һәлл етмәклә тапылыр: $(0, 0)$ вә $(8, 16)$

Икитәртибли хусуси төрәмәләри тапаг:

$$f''_{xx} = 2x, \quad f''_{xy} = -4, \quad f''_{yy} = 2.$$

Ајдындыр ки, $(0, 0)$ бөһран нөгтәсиндә $\lambda = 0 \cdot 2 - (-4)^2 = -16 < 0$, $(8, 16)$ бөһран нөгтәсиндә иһә $\lambda = 32 - 16 = 16 > 0$ олар. Демәли, $(0, 0)$ нөгтәсиндә локал экстремум юхдур, $\lambda > 0$ вә $a_{11} = 16 > 0$ олдуғуна көрә иһә $(8, 16)$ нөгтәсиндә функция локал минимум гијмәт алыр.

§ 3. ФУНКСИЈАНЫН ГЛОБАЛ ЭКСТРЕМУМУ

Фәрс едәк ки, $z = f(x, y)$ функциясы гапалы мәһдуд σ областында тәјин олуиш кәсилмәјән функциялыр. Онда кәсилмәјән функцияныи хәссәсинә (XXVI, § 6) көрә онун һәммин областа сонлу дәгиг ашағы сәрһәди вә сонлу дәгиг јухары сәрһәди вә бу сәрһәдләри һәр бирини һәммин гапалы областыи һеч олмаса бир нөгтәсиндә алыр.

Бу һалда f функциясыныи дәгиг ашағы сәрһәди онун σ областында ән кичик гијмәти, дәгиг јухары сәрһәди иһә σ областында онун ән бөјүк гијмәти олар. f функциясыныи σ областында ән бөјүк гијмәти онун һәммин областа *максимуму* (вә ја *максимал гијмәти*), ән кичик гијмәти иһә һәммин областа *минимуму* (вә ја *минимал гијмәти*) адланыр.

Функцияныи гапалы σ областында максимумуна вә минимумуна бирликлә онун *глобал экстремуму* дејилир. Функцияныи локал экстремуму нөгтәләрии јакын әтрафына аид олдуғу һалда, онун глобал экстремуму бүтүн областа аиддир, јәни глобал экстремум бүтүн областа нәзәрән көтүрүлүр.

Функција σ областындакы *максимал гијмәтини* ја *областыи дахили нөгтәсиндә*, ја да *областыи сәрһәд нөгтәсиндә* (областыи контуру үзәриндә) алыр. Әкәр функция σ областындакы *максимал гијмәтини* областыи бир дахили нөгтәсиндә алырса, онда һәммин нөгтә онун локал максимум нөгтәси олар.

Функција σ областындакы *минимал гијмәтини* да ја *областыи сәрһәд нөгтәсиндә*, ја да *локал минимум нөгтәси* олан дахили нөгтәдә алыр.

Беләликлә, функцияныи σ гапалы мәһдуд σ областында глобал экстремумуну тапмағ үчүн ашағыдакы гајда алыныр: *функцияныи σ областындакы бүтүн бөһран нөгтәләри тапылыр, функцияныи бу нөгтәләрдәки гијмәтләри вә областыи сәрһәди үзәриндәки ән бөјүк вә ән кичик гијмәти һесабланыр. Бу гијмәтләрии ән кичији функцияныи σ обла-*

стында минимуму, ән бөјүју иһә функцияныи σ областында максимуму.

Мисал. $z = x^2 + y^2$ функциясыныи $\sigma = \left\{ \begin{matrix} -1 < x < 1 \\ -2 < y < 2 \end{matrix} \right\}$ дүз-

бучағлысында глобал экстремумуну тапмалы.

Функцияныи σ областыныи дахилиндә јерләшән јекәнә бөһран нөгтәси вәрдыр: $O(0, 0)$. Бу нөгтәдә функция локал минимум гијмәт алыр:

$$z_{\min} = 0.$$

Функцияныи AB , BC , CD вә DA парчалары үзәриндә (шәкил 231) ән кичик гијмәти ујғун олар: 1, 16, 1 вә 16-дыр.

Функцияныи AB , BC , CD вә DA парчалары үзәриндә ән бөјүк гијмәти иһә 17-дир.

Демәли, σ областыныи $ABCD$ контуру үзәриндә функцияныи ән кичик гијмәти 1 вә ән бөјүк гијмәти иһә 17-дир. Бурадан ајдындыр ки, верилмиш функцияныи σ дүзбучағлысында минимуму 0, максимуму иһә 17 әдәднә бәрәбәрдир:

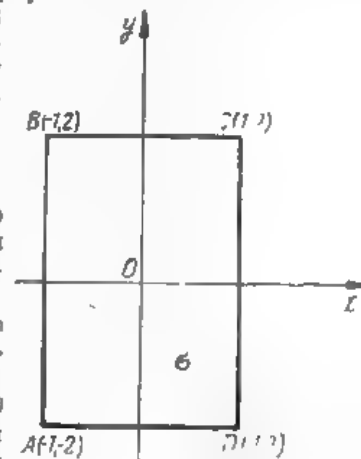
$$z_{\min} = 0, \quad z_{\max} = 17.$$

§ 4. ШӘРТИ ЭКСТРЕМУМ

Чохдәјишәнли функцияныи локал экстремуму тәјин олуиш дугда онун аргументләри асылы олмајән (сәрбәст) дәјишәнләр һесаб олуиш. Функцияныи аргументләри сәрбәст дәјишәнләр олмајыб мұәјјән мүнәсибәтләрдә (буиһәлә рабиһә тәиһәләри дејилир) бағлы да ола билир. Бу һалда, функцияныи һәммин мүнәсибәтләрии ндәнилдји нөгтәләр чоһлуғунда экстремумна *шәрти экстремум* дејилир. Буну бир мисал үзәриндә изаһ едәк.

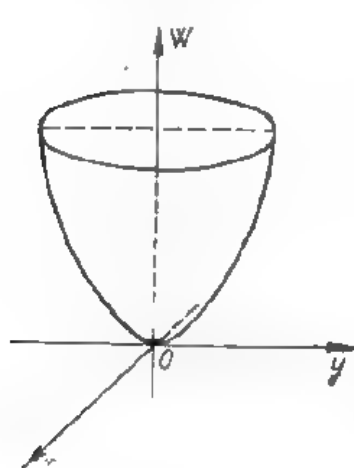
Бүтүн мүстәвида тәјин олуиш $W = x^2 + y^2$ функциясыныи $(0, 0)$ нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алдығы мәһдуддур (§ 1, мисал 1). Бу, функцияныи графигиндән да ајдындыр (шәкил 232). Бурада x вә y дәјишәнләри һеч бир мүнәсибәтлә бағлы дејилир (онлар асылы олмајән дәјишәнләрдир).

Икди, фәрс едәк ки, x вә y дәјишәнләри $y + x - 2 = 0$ мүнәсибәти (рабиһә тәиһә) илә бағлыдыр. Бу рабиһә тәиһәни едәјән нөгтәләр чоһлуғу дүз хәтдир. Верилмиш $W = x^2 + y^2$ функциясыныи һәммин дүз хәтт үзәриндә алдығы гијмәтләр



Шәкил 231

ABC параболасыны тәшкил едир (шәкил 233). Бу гижәтләрин ән кичији олан әдәд, јәни функцијанын $(-1, 1)$ нөгтәсиндә (бу нөгтә дүз хәтт үзәриндә јерләшир) алдыгы гижәт, һәмни функцијанын шәрти минимум гижәтидир. Функцијанын көс-тәрилән шәрти минимум гижәтини белә тапмаг олар: рабита



Шәкил 232

тәнлијиндән y дәјишәни x вәситәсилә $y=2-x$ кими тапыларәг функцијада јеринә јазылыр. Алынған бир дәјишәнли $W=x^2+(2-x)^2=2x^2-4x+4$ функцијасынын локал экстремуму тапылыр. Бу функција $x=1$ нөгтәсиндә $W=2$ локал минимум гижәтини алыр. $W=x^2+y^2$ функцијасы һәмни гижәти рабита тәнлијинә әсасән $(1, 1)$ нөгтәсиндә алыр. Бу гижәт функција-нын шәрти минимумудур.

Демәли, функцијанын шәрти экстремуму онун бүтүн тәјин областыдакы локал экстремуму олмайыб, јалныз рабита тән-ликләринин өдәнилдији нөгтәләр чохлауындакы локал экстремумудур. Функцијанын шәрти экстремуму аңлаышыны үмуми һалда ашағыдакы кими тәјин етмәк олар.

Фәрә едәк ки, $f(X, Y) = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ вә

$$F_k(X, Y) = F_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

$\sigma \in E_{n+m}$ областында тәјин олуиуш функцијалардыр σ облас-тыннын

$$F_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

барәбарликләрини (рабита тәнликләрини) өдәјән (X, Y) нөгтә-ләри чохлауы E вә бу чохлауы һәр һансы нөгтәси $(X^{(0)}, Y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) \in E$ олсун.

Тәрифи. $(X^{(0)}, Y^{(0)}) \in E$ нөгтәсинин һәр һансы $O_\delta[(X^{(0)}, Y^{(0)})]$ ($\delta > 0$) атрафында јерләшән бүтүн $(X, Y) \in E$ нөгтә-ләриндә

$$f(X, Y) < f(X^{(0)}, Y^{(0)}) \quad (2)$$

барәбарсизлији өдәнилдикдә, дејирләр ки, $f(X, Y)$ функција-сы $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ нөгтәсиндә шәрти локал максимум гижәт алыр. $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ нөгтәсинин һәр һансы $O_\delta[(X^{(0)}, Y^{(0)})]$ атра-фынын бүтүн $(X, Y) \in E$ нөгтәләриндә

$$f(X, Y) > f(X^{(0)}, Y^{(0)}) \quad (3)$$

барәбарсизлији өдәнилдикдә исә, дејирләр ки, $f(X, Y)$ функ-сијасы $(X^{(0)}, Y^{(0)})$ нөгтәсиндә шәрти локал минимум гижәт алыр.

Функцијанын шәрти локал максимуму вә шәрти локал минимуму бирликдә функцијанын шәрти (локал) экстремуму адылары. Гејд едәк ки, функцијанын шәрти экстремумуна бәзән функцијанын нисби экстремуму да тејилир.

Верилмиш $(n+m)$ -дәјишәнли $W=f(X, Y)$ функцијасынын (1) рабита шәртләри дахилиндә шәрти экстремумунун тапыл-масы бәзән бир n -дәјишәнли функцијанын ади (шәртсиз) ло-кал экстремумунун тапылмасына кәтирилир. Бу мәгсәдлә (1) рабита тәнликләр системиндән y_1, y_2, \dots, y_m дәјишәнләри x_1, x_2, \dots, x_n вәситәсилә тапылыр (әлбәттә, бу мүмкүндүрсә):

$$y_k = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (4)$$

Сонра исә бу гижәтләри верилмиш функцијада јеринә јаз-магла ашағыдакы кими бир n -дәјишәнли функција алыныр:

$$\begin{aligned} W &= f(X, Y) = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ &= f[x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)], \\ &= \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

вә јә

$$W = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5)$$

Бу функцијанын аргументләри асылы олмајән дәјишәнләрдир (онлар һеч бир мүнәсибәтлә бағлы дејилдир). Беләликлә, верилмиш $(n+n)$ -дәјишәнли $W=f(X, Y)$ функцијасынын шәр-ти экстремумунун тапылмасы мәсәләси n -дәјишәнли (5) функси-јасынын ади локал экстремумунун тапылмасына кәтирилиши олур. Функцијанын локал экстремумунун тапылма гајдасы исә әввәлки параграфлардан мәлумдур.

Әлбәттә, бу әмәлијәти апармаг һәмнишә мүмкүн олиур. Чүнки (1) рабита тәнликләри системини y_1, y_2, \dots, y_m дәји-шәнләринә нәзәрән һәлл етмәк чок вахт чәтти олур. Белә һәлләрда верилмиш функцијанын шәрти экстремуму башга үсулларла тапылыр.

Мисал. Верилмиш мүсбәт a әдәдини n сәјдә мәнфи олма-јән елә x_1, x_2, \dots, x_n топлананларынын чәми шәклиндә көстәр-мәли ки, онларын һәсили ән бөјүк олсун.

$$W = x_1 x_2 \cdots x_n \quad (6)$$
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \quad (7)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \quad (7)$$

$$W = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} (a - x_1 - \dots - x_{n-1}), \quad (8)$$
$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_1} &= x_2 \cdot x_3 \cdots x_{n-1} (a - 2x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} &= x_1 \cdot x_3 \cdots x_{n-1} (a - x_1 - 2x_2 - \cdots - x_{n-1}) = 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial W}{\partial x_{n-1}} &= x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-2} (a - x_1 - x_2 - \cdots - 2x_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$
$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} &= a, \\ x_1 + 2x_2 + \dots + x_{n-1} &= a, \\ &\vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + 2x_{n-1} &= a \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(9) тэнликләрини тәрәф-тәрәфә топласаг, аларыг

$$n(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) = (n-1)a.$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = a$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \frac{2}{n} \quad (10)$$

$(n-1)$ -дэ[ишэнли (8) функсиясы

$$0 \leq x_1 \leq a, \dots, 0 \leq x_{n-1} \leq a, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leq a \quad (II)$$

(10) бəрəбərлклєри клє тə'јин олунан јеканə $\left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right)$

$$W_{\text{max}} = \max W = \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} \cdot \dots \cdot \frac{a}{n} = \left(\frac{a}{n}\right)^n.$$

Духарыда көстөрдик ки, верялмиш чохдәјишәли функци-
янын шәрти экстремумуну тапмағы ади локал экстремум тап-
маға кәтирмәк чох вахт мүмкүн олуур. Бир сыра һалларда
исә бу үсүл әлверишли дејилдир. Буна көрә да функцијанын
шәрти экстремуми гүмәтләрини ала бијлији нөгәтләри (буи-
лар, шәрти экстремум үчүн стационар нөгәтләр адландыраг)
башга үсүлларла тапараг онлары тәдгиг етмәк лазым әдир.

Чохлајишэнли функцияларык шэрти экстремум үчүн стационар нөггөдөрлөрини Лагранжын гејри-мүөјөн вуруглар үсүлү илэ толуга даһа мүөасибдир. Буну изаһ етмэк үчүн, фэрз едэк ки, $W = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ функциясынын

$$F_{\kappa}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s) = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

рабита шэртлэри (тэнликлэри) дахилиндэ шэрти экстремуму таппаг, тэлэб олунур. Функцияны дифференциаллан олдуугу нөггэдэ локал экстремум гижат олмасы үчүн зэрүр шэрт нэмин нөггэдэ там дифференциалы сифра бэрэбэр олмасыдыр (§ 1):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m} dy_m = 0, \quad (2)$$

(1) бəрəбəрликлəриндəк исə

$$\frac{\partial F^k}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F^k}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F^k}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F^k}{\partial y_m} dy_m = 0. \quad (3)$$

мүнәсибәтләри алыныр. Бу барабарлыклары уңуя оларак, һә-
ләлик мәлүм олмаган $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ эдәдләринә кыруарак, алы-
нан барабарлыклары (2) барабарлыгы икә тәрәф-тәрәфә топла-
яг. Онда

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_m} dy_m = 0 \quad (4)$$

мүнәсибәти алынар: бурада

$$\psi = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_m F_m. \quad (5)$$

Инди $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ көмәкчи вуругларыны елә сечәк ың.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_2} = 0, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial y_m} = 0 \quad (b)$$

барабарликлэри өдэнилсин. (6) барабарликлэринин өдэнилмэси үчүн $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ вуруглары

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_1} = 0,$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0$$

хатти тэнликлэр системин дэн таппылмадыр. Системин эсас детерминанты олан

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}$$

Якобианы сыфырлан фаргли олдугда нсэ бу хэмишэ мүмкүндүр.

(6) барабарликларина эсасэн (4) барабарлиги

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (7)$$

шэкинде жазылар. Бурадан (x_1, x_2, \dots, x_n) сарбаст дэишанлар олдугуна көрө

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0 \quad (8)$$

алымыр. (1), (6) вэ (8) барабарликлари бирликдэ ашагыдакы $n+m$ саяда тэнликлэр системини эмэлэ кэтирир:

$$\begin{cases} F_1 = 0, & F_2 = 0, \dots, & F_m = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_1} = 0, & \frac{\partial \psi}{\partial y_2} = 0, \dots, & \frac{\partial \psi}{\partial y_m} = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \dots, & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Бу системдэн шэрти экстремум үчүн стасионар нөгтэлэрин $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ координатлары вэ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ көмөкчи эмсаллары тапылар. Тапылан стасионар нөгтэлэрдэ f функциясэ шэрти экстремум гиймэт ала да билэр, алмаја да билэр. Буну жохламаг үчүн элава тэдгигат апармаг лазымдыр.

Белэликлэ, функциясини шэрти экстремум гиймэтлэри ала билдији нөгтэлэри тапмаг үчүн ашагыдакы саяда гайда алымыр:

$(n+m)$ -дэишэнли f функциясини (1) рабита шэртилэри дахилинлэ шэрти экстремум гиймэтлэри ала билдији $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ нөгтэлэрини тапмаг үчүн (5) көмөкчи функциясэ (буна Лагранж функциясэ дэишир) гурулур. Сонра нсэ бу функциясини $x_i (i=1, 2, \dots, n), y_i (i=1, 2, \dots, m)$ вэ $\lambda_i (i=1, 2, \dots, m)$ дэишэнлэринэ көрө хусуси төрөмэлэри тапылараг сыф-ра барабар едилир. Алынган (9) системиндэн шэрти экстремум үчүн стасионар нөгтэлэрини координатлары $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ вэ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ зуруглары тапылар.

Хусуси халда, икидэишэнли $f(x, y)$ функциясини $\varphi(x, y) = 0$ шэртинде ахтарылан экстремуму үчүн стасионар нөгтэлэрини x, y координатлары э көмөкчи λ зуругу

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

системиндэн тапылмайдыр.

Тутаг ки, (10) системини халлариндэн бири x_0, y_0 вэ λ_0 эдэллэридир. Онда $M_0 = (x_0, y_0)$ нөгтэси $f(x, y)$ функциясини шэрти экстремуму үчүн стасионар нөгтэ олар. Ј харыда дедэ-жимиз кими бу стасионар нөгтэдэ f функциясэ шэрти экстремум гиймэт ала да билэр, алмаја да билэр. Буну жохламаг үчүн ашагыдакы тэклиф-и истифада етмак олар.

Шэрти экстремуму иварлыгы үчүн кафи шэрти: $f(x, y)$ вэ $\varphi(x, y)$ функциясаларыни M_0 стасионар нөгтэсинде икитэртибли кэсилмэјэн хусуси төрөмэлэри варса вэ $\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ Лагранж функциясэ васкэсилэ дүзэлдилмиш

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & \varphi''_{xx}(M_0) & \varphi''_{xy}(M_0) \\ \varphi'_y(M_0) & \varphi''_{xy}(M_0) & \varphi''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} \quad (11)$$

детерминанты мүсбэтдирсэ ($\Delta > 0$), онда f функциясэ M_0 нөгтэсинде шэрти минимум гиймэт алыр, детерминант мэңфи ($\Delta < 0$) олдугда нсэ f функциясэ M_0 нөгтэсинде шэрти максимум гиймэт алыр.

Бу тэклифин исбаты верилмир.

Мисал. $W = xy$ функциясини $x + y = 2$ шэртинде экстремуму тапмалы.

Бу халда Лагранж функциясэ

$$\varphi(x, y) = xy + \lambda(x + y - 2)$$

вэ онун хусуси төрөмэлэри $\varphi'_x = y + \lambda, \varphi'_y = x + \lambda$ вэ $\varphi'_\lambda = x + y - 2$ олдугундан (10) системи

$$\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ y + x - 2 = 0 \end{cases}$$

кими олар. Бурадан

$$\begin{aligned} y &= -\lambda, & x &= -\lambda, & -2\lambda - 2 &= 0, & \lambda &= -1, \\ x &= 1, & y &= 1 \end{aligned}$$

алымыр. Демэли, (1, 1) нөгтэси шэрти экстремум үчүн стасионар нөгтэди. Хэмишэ нөгтэдэ (11) детерминанты мэңфи эдэдэ барабар ($\Delta = -1 < 0$) олдугундан функция (1, 1) нөгтэсинде шэрти максимум гиймэт алыр:

$$W_{\max} = 1.$$

§ 6. ЭН КИЧИК КВАДРАТЛАР ҮСУЛУ

Тутаг ки, y кэмийэтини x -дэн функционал асыллыгыни экспериментал (эмпирик) оларэг тэјин етмак лазымдыр. Бу мэгсэдэ x -ни мүхтэлнф x_1, x_2, \dots, x_n гиймэтлэринэ y -ни y_1, y_2, \dots, y_n гиймэтлэри эксперимент нэтижэсинде тапылар вэ алымыш гиймэтлэр ашагыдакы эдвал шэкинде жазылар:

		x_1	x_2		x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Беләликлә, эксперимент нәтижәсиндә

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \quad (1)$$

кимн n дәнә „экспериментал нөгтә“ алыныр. Бу нөгтәләри (Оху) координат мустәвиси үзәриндә гејд едирләр. Нөгтәләрин јерләшмә характеринә вә ја бәшгә нәзәри мұлаһизәләрә әсасән ахтарылан функционал асылылыгын формасы тәхминн олараг мұәјјән едилір. Намә’лум функция

$$y = a_1 x + a_2, \quad y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3,$$

$$y = a_1 x^{a_2}, \quad y = a_1 + a_2 \sin x + a_3 \cos x, \dots$$

вә с. шәклиндә ола биләр. Бу функциялар a_1, a_2, a_3, \dots кимн намә’лум параметрләрән асылдыр. Әкәр эксперимент заманы һеч бир хәтәја јол верилмирсә, ондә m дәнә параметрдән хәтти асылы олан функцияны тә’јин етмәк үчүн x ни m дәнә гижмәтиндә y -ни үјгүн гижмәтләрини билмәк кифәјәтдир. Лүсуси һалда, ики параметрдән асылы

$$y = a_1 x + a_2$$

функциясыны тапмаг үчүн (јә’ни онун a_1 вә a_2 параметрләрини тә’јин етмәк үчүн) x -ни ики x_1 вә x_2 гижмәтиндә y -ни y_1 вә y_2 гижмәтләрини билмәк кифәјәтдир:

$$y_1 = a_1 x_1 + a_2, \quad y_2 = a_1 x_2 + a_2.$$

Бурадан a_1 вә a_2 параметрләри дәгиг тапылыр.

Ләкин реал иш процесиндә белә олмур. Эксперимент аппарларкән бир чох тәсадүфи хәталара (өлчмә аппаранын бурахдыгы хәтә, өлчү аппаратынын хәтәсы вә с.) јол верилір вә буну да нәтижәсиндә x вә y үчүн тапылан гижмәтләр дәгиг олмур. Буна көрә дә m дәнә параметрдән асылы олан

$$y = \varphi(x, a_1, a_2, \dots, a_m) \quad (2)$$

функциясыны дәгиг тапмаг үчүн m дәнә экспериментни нәтижәсини билмәк, јә’ни x -ни x_1, x_2, \dots, x_m гижмәтләриндә y -ни y_1, y_2, \dots, y_m гижмәтләрини экспериментдән тапмаг кифәјәт етмир. Нәтижәдә чохлу сәјдә ($m > m$) эксперимент аппаратаг ләзин кәлİR.

Эксперимент нәтижәсиндә алынған y_k гижмәтләри илә ахтарылан (2) функциясының x_k нөгтәсиндәки $\varphi(x_k, a_1, \dots, a_m)$ гижмәтләри (нәзәри һесаблиған гижмәтләри), үмумијјәтлә, үст-үстә дүшмүр. Бу заман һәмин гижмәтләрин мејли адланан

$$\epsilon_k = y_k - \varphi(x_k, a_1, \dots, a_m) \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

фәргләри алыныр.

Бурада әсас мәсәлә намә’лум a_1, a_2, \dots, a_m параметрләри үчүн елә гижмәтләр тапмагдыр ки, тапылан (2) функциясы һәр бансы мә’надә ахтарылан функцияја даһа јакын олсун. Параметрләри гижмәтләри мұхталиф үсулларла тапылыр.

Бу мәсәләни ән кичик квадратлар үсулу илә дә һәлл етмәк олар. Бу үсул ашагыдакы „ән кичик квадратлар принципі“ әсасланыр: параметрләр үчүн ән әлverişли гижмәтләр (3) мејләри квадратлары сәмкинн ән кичик, јә’ни

$$\sum_{k=1}^m \epsilon_k^2 = \sum_{k=1}^m [y_k - \varphi(x_k, a_1, a_2, \dots, a_m)]^2 = \min$$

олмасы шәртиндән тапылыр.

Беләликлә, гојулмуш мәсәләниң һәлли m -дәјишәни

$$f(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{k=1}^m [y_k - \varphi(x_k, a_1, a_2, \dots, a_m)]^2 \quad (5)$$

функциясының минимум гижмәтиң алдыгы нөгтәләрин тапылмасына хәтириләр. Белә нөгтәләр исә § 1-дә шарһ едилән үсулла тапылыр.

(5) функциясының минимум гижмәт алдыгы нөгтәләри

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial a_m} = 0$$

системини вә ја

$$\sum_{k=1}^m [y_k - \varphi(x_k, a_1, a_2, \dots, a_m)] \frac{\partial \varphi(x_k, a_1, a_2, \dots, a_m)}{\partial a_1} = 0, \\ \sum_{k=1}^m [y_k - \varphi(x_k, a_1, a_2, \dots, a_m)] \frac{\partial \varphi(x_k, a_1, a_2, \dots, a_m)}{\partial a_2} = 0, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^m [y_k - \varphi(x_k, a_1, a_2, \dots, a_m)] \frac{\partial \varphi(x_k, a_1, a_2, \dots, a_m)}{\partial a_m} = 0$$

системини һәлл етмәклә тапмаг олар. (7) системини тәңликләринин саы ахтарылан a_1, a_2, \dots, a_m параметрләриниң сәјмә бәрәбәрдир.

Һәр бир конкрет һалда (7) системиниң һәллиниң варлығы вә тапылмыш нөгтәдә (5) функциясының минимум гижмәт алмасы ајрыча тәдгиг едилмәлидир. Мәсәлән, тутар ки, (2) функциясы $\varphi(x, a_1, a_2) = a_1 x + a_2$ шәклиндә ахтарылыр. Онда (5) функциясы

$$f(a_1, a_2) = \sum_{k=1}^m [y_k - (a_1 x_k + a_2)]^2 \quad (8)$$

шәклиндә олар. Бурада x_k вә y_k ($k = 1, 2, \dots, n$) илә экспериментдән тапылмыш вә сәдвәл шәклиндә јазылмыш мә’

лум эдэдлэр ишарэ олунмушдур. (8) функцијасы үчүн (7) системн

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a_1} = -2 \sum_{k=1}^n [y_k - (a_1 x_k + a_2)] x_k = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial a_2} = -2 \sum_{k=1}^n [y_k - (a_1 x_k + a_2)] = 0 \end{cases}$$

вэ ја

$$\begin{aligned} a_1 \sum_{k=1}^n x_k^2 + a_2 \sum_{k=1}^n x_k &= \sum_{k=1}^n x_k y_k, \\ a_1 \sum_{k=1}^n x_k + a_2 \cdot n &= \sum_{k=1}^n y_k \end{aligned} \quad (9)$$

шаклинде олар. Бурадан a_1 вэ a_2 параметр ари ашылар

$$a_1 = \frac{x_1 - (\bar{x})(\bar{y})}{\bar{x} - (\bar{x})^2}, \quad a_2 = \frac{\bar{x}\bar{y} - \sum_{k=1}^n x_k y_k}{\bar{x} - (\bar{x})^2} \quad (10)$$

Бурада

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k, \\ \overline{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{aligned}$$

ишарэлери габул едилмишдир.

Тапшымыш (10) нөгтөсінде (8) функцијасы минимум гнјмөт глыр. Догрудан да,

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} = 2 \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2} = 2n, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} = 2 \sum_{k=1}^n x_k$$

олдугундан

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 4n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(2 \sum_{k=1}^n x_k\right)^2, \\ &= 4 \sum_{i,k} (x_i - x_k)^2 > 0, \quad a_{11} > 0 \end{aligned}$$

олар кк, бу да (§ 2) (8) функцијасынын (10) нөгтөсінде минимум гнјмөт алдыгыны көстөрлр.

Ејни гайда илэ үч, дөрд вэ с. сајда параметрдан ашылы олан хэти функцијалары да тапмаг олар.

V НИССЭ

АДИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТЭНЛИКЛЭР

БИРТЭРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТЭНЛИКЛЭР ВЭ ОНЛАРЫН НЭЛЛИ ҮСУЛЛАРЫ

§ 1. ҮМУМИ АНЛАЖЫШЛАР

Нама'лум функцијанын төрөмөси берилдикдэ ону интеграл-лама (III Ниссэ) васитэсилэ тапмаг олур. Бир чох һалларда исэ функцијанын төрөмөси дејил, ахтарылан у функцијасы, х аргументи вэ у функцијасынын х-э нэээрэн $y', y'', \dots, y^{(n)}$ төрөмэлэри арасында мүэјән асылылыг верилкр. Бу асылылыгдан һамин нама'лум функцијаны тапмаг талэб олунур. Белэ мәсәлэлэрлэ дифференциал тэнликлэр нэээријәсиндэ мәшгул олур-лар

Т'а' рн ф. Иштијари х дәјишәни, оқун $y = y(x)$ функција-сы вэ бу функцијанын һәмин х дәјишәнигә нэээрэн $y', y'', \dots, y^{(n)}$ төрөмэлэри дахил олан тэнлијә ади дифференциал тәнликләр дејилкр.

Ики вэ ја чох сајда дәјишәндән асылы олан функција вэ бу функцијанын һамин дәјишәнлэрэ нэээрэн хусуси төрөмэлэри дахил олан тэнлијә исэ хусуси төрөмәли дифференциал тәнликләр дејилкр.

Дифференциал тәнлијә дахил олан ән јүксәктәртибли төрөмәнин тәртибинэ һамин дифференциал тәнлијин тәртиби дејилкр. n тәртибли ади дифференциал тәнлик үмуми шакилдэ

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

кими јазылып. Мәсәлән,

$$y' + 4xy + 3 = 0$$

вэ

$$3y'' + 2y' + xy + 5 = 0$$

тәнликлэри ујғун оларат биртәртибли вэ икитәртибли ади дифференциал тәнликләрди.

Бурада јатныз ади дифференциал тәнликлэр вјрәнилик

(1) дифференциал тәнлијини х-ни E чохлугундакы бүтүн гнјмәтләриндэ өдәјән һәр бир $y = \varphi(x)$ функцијасыны һамин

тәнлији E чохлуғунда һалли дежилр. Бу, о демәкдир ки, $y = \varphi(x)$ функцијасыны ва онун $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ төрәмәләрини (1) тәнлијиндә јеринә јаздыгда һәмий тәнлик E чохлуғунда x -ә нәзәрән ејилинјә чеврилир:

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] = 0.$$

Верилмиш диференсиал тәнлији өдәјән функција гејри-ашкар ва параметрик шәкилдә дә верилә биләр. Бу һалда һәмий функцијаја бәзән диференсиал тәнлији интегралы дејилир.

Биз кәләчәкдә диференсиал тәнлијин һалли ва интегралы истикләһляринын икисини дә (һеч бир фәрг гојмадан) ишләдә-чәјик.

Мәсәлән, $y = e^x$ ва $y = e^{-x}$ функцијаларынын һәр бири бүтүн әдәд охунда

$$y' - y = 0 \quad (2)$$

диференсиал тәнлијинин һаллидир:

$$(e^x)' - e^x = 0, (e^{-x})' - e^{-x} = 0.$$

Үмумијјәтлә, C_1 ва C_2 сабитләрини истәкилән гијмәтләриндә

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

функцијасы бүтүн әдәд охунда (2) тәнлијинин һаллидир:

$$(C_1 e^x + C_2 e^{-x})' - (C_1 e^x + C_2 e^{-x}) = 0.$$

Бурадан өјдүндүр ки, верилмиш диференсиал тәнлијин бир нечә ва һәттә сонсуз сәјдә һалли ола биләр.

Верилмиш диференсиал тәнлијин бүтүн һәлләрини тапмағ ва онларын хәссәләрини өјрәшмәк диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин әсас мәсәләсидир. Диференсиал тәнликләрини һәлли чох заман функцијаларын интегралланмасы вәситәсилә тапылыр. Буна кәрә дә диференсиал тәнлијин һәлләринин тапылмасы әмәлиә чох заман диференсиал тәнлијини интегралланмасы дејилир.

Диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин бөјүк елии ва практик әһмијјәти вәдир. Физика, механика ва с. кими мұхтәлиф елм сәһәләринин ва техниканын бир чох мұһүм мәсәләләринин һалли диференсиал тәнликләрә кәтирилир.

Буну икә мисал үзәриндә изаһ едәк.

Мисал 1. Күтләси m олан мағди нөгтә мұәјјән јүксәкликдән ағырлығ гүввәсини тәсири илә сәрбәст дүшүр. һаванын мұғайимәтини нәзәр алмадан нөгтәнин һәрәкәт ганунуну тапмалы.

Һәлли. Һәрәкәт едән нөгтәјә тәсири глән F гүввәси онун һәрәкәтинин a тәһилх вәситәсилә

$$F = ma \quad (3)$$

кими тапылыр (Нјутонун иккинчи гануну). Нөгтәјә анчағ

ағырлығ гүввәси тәсири етдијиндә $F = P = mg$ олар. Һәрәкәт едән чисми тәһилх и исә кәдилән мәсәфәнин заман кәрә икә-тәртибли төрәмәси (XIV, § 3)

$$a = \frac{d^2 S(t)}{dt^2} = S''(t)$$

олдуғундан (3) бәрәбәрлијин,

$$m \cdot S''(t) = mg$$

ва ја

$$S''(t) = g \quad (4)$$

кими јазмағ олар.

(4) бәрәбәрлији ахтарылан $S(t)$ функцијасына нәзәрән икитәртибли диференсиал тәнликдир. Јохламағ олар ки, бу тәнлијин һалли

$$S(t) = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad (5)$$

функцијасыдыр. Һәрәкәт едән нөгтәнин башланғыч сүр'әти $S'(0) = V_0$ ва башланғыч мәсәфәси $S(0) = S_0$ мәлүм олдугда (3) функцијасына дахи олан ихтијари C_1 ва C_2 сабитләрини тапмағ олар:

$$C_1 = V_0 \text{ ва } C_2 = S_0.$$

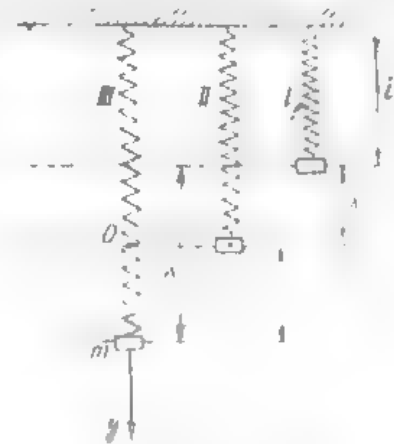
Бу һалда мағди нөгтәнин һәрәкәт гануну ашағыдакы кими јазылыр:

$$S(t) = \frac{gt^2}{2} + V_0 t + S_0.$$

Мисал 2 (гармоник рәгс). Күтләси m олан јүк еластикни $[a]$ (табиин вәзијәтдә $[a]$ -н узунлуғу l -дир) вәситәсилә шағули вәзијәтдә асылмышдыр.

Ону y үзјәни гүнәә илә ашағыја тәрәф чәкәрәк сочра бурахырлар. Һаванын мұғайимәтини ва $[a]$ -н күтләсини нәзәр алмадан $[y]$ -н һәрәкәт ганунуну тапмалы.

Һәлли. Јүкүн таразлығ вәзијәтинин координат башланғычы күгүрмәклә координат охуну $[a]$ истигимәтиндә ишатыја тәрәк уздағ (шәкил 234). Јүсүн арзалығ вәзијәтиндән ашағыја тәрәк узағлашдығы мәсәфә (иһтирағы) y олсун. Бахылан анда $[a]$ чәми λ гәдәр узанмышдырса (I һалдан III һала кечәркән) ва онун дартылмамыш һалындан таразлығ һалына (I һалдан II һала) кечәркән узандығы мәсәфә λ_0 оларса, онда $\lambda = \lambda_0 + y$ олар.



Шәкил 234

Алды-дыр ки, верилмиш жүкө ики гүввә тә'сир едир: јаын еластиклик гүввәси вә ағырлыг гүввәси.

Жүкү ганунуна көрә јаын еластиклик гүввәси онун узандыгы мәсифә илә мütәнасибдир: $-kx$ (бурада k һәр ја үчүн сабит кәмијјәт олуп, јаын бәрклини адланыр).

Сүкунәт һалында исә жүкүн ағырлыг гүввәси јаын еластиклик гүввәси илә таразлашдыгындан $P = kx_0$ олар. Онда Нјуто нун икинчи ганунуна көрә

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -kx + kx_0$$

вә ја

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky$$

олар. Бурадан $\left(\frac{k}{m} = \omega^2\right)$ гәбул етмәклә

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

вә ја

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (6)$$

диференциал тәңлији алыныр.

(6) тәңлији *гармоник осцилляторун тәңлији* адланыр. Иәмин тәңлик жүкүн сәрбәст рәгсләрини тәјин едир. (6) тәңлијини һәлл етмәклә жүкүн һәрәкәт ганунуну тапмаг олар.

Белә тәңликләрин һәлли үсуллары кәләчәктә чәстәриләчәкдир (XXXI).

§ 2. БИРТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИКЛӘР ВӘ ОНЛАРЫН БӘНДӘСИ МӘНАСЫ

Биртәртибли диференциал тәңлик үмуми шәкилдә

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

ким и язылдыр. Бу тәңлији ахтарылан функцијанын y' төрәмәсинә нәзарән һәлл етмәк мүмкүн олдуғда

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

шәкилдә төрәмәјә нәзарән һәлл олунмуш биртәртибли диференциал тәңлик алыныр.

Төрәмәјә нәзарән һәлл олунмуш биртәртибли диференциал тәңлији, һәмкә

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (3)$$

диференциал шәкилдә язмаг олар. Догрудан да, (2) тәңлијини

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad f(x, y) dx - dy = 0$$

Роберт Гук (1633—1703) механик алимидир.

ким и язмаг олар. Бүрада $M(x, y) = f(x, y)$ вә $N(x, y) = -1$ гәбул етмәклә (3) шәкилдә диференциал тәңлик алыныр.

Тәрсинә, (3) шәкилдә диференциал тәңлији $N(x, y) \neq 0$ олдуғда

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad (4)$$

$M(x, y) \neq 0$ олдуғда исә

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \quad (5)$$

шәкилдә язмаг олар.

Беләликлә, $N(x, y) \neq 0$ олдуғда (2) вә (3) тәңликләр y' күчлү олар. Үмуми һәлдә исә (3) тәңлији ики тәңликлә: (4) вә (5) тәңликләри илә ејинкүчлүдүр.

Биртәртибли диференциал тәңлијини (1) диференциал шәклини үстүн чәһәти ондан ибарәтдир ки, орала x вә y дәјишмәләри ејини һүгүгүлдүр. Оңларын һәр бирини аргумент вә ја функсијә һесап етмәк олар.

Мәлумдүр ки, диференциал тәңлијини чәлли $y = \varphi(x)$ ашкар шәкилдә башга гејри-ашкар вә параметрик шәкилләрдә дә верилә биләр.

Әкәр

$$\Phi(x, y) = C \quad (6)$$

тәңлији вәситәсилә тәјин олунан гејри-ашкар $y = \varphi(x)$ функцијасы (XXVIII, § 1) (1) тәңлијини өдәјирсә, јәни x -ин мүәјјән E чоҳлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә $F[x, y(x), y'(x)] = 0$ ејинлији өдәнилерсә, онда дејирләр ки, (2) тәңлијини һәлли (6) тәңлији вәситәсилә гејри-ашкар шәкилдә верилмишдир.

(1) тәңлијини һәллини

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

параметрик шәкилдә верилмәси о демәкдир ки, t -нин мүәјјән (α, β) интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$F\left[\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] = 0$$

ејинлији өдәнилер.

Инди (2) тәңлијини бәндәси мәнасыны изләсәк. Бүрада сәдлә фәрз едәк ки, x вә y мүстәви нөгтәсинин координатлары вә $y = \varphi(x)$ функцијасы (2) тәңлијини һәлтидир. $y = \varphi(x)$ функцијасынын графиги мүстәви үзәриндә бир эјри олар. Эјријә (вә һәмкә (2) тәңлијини интегралынын графигинә) (2) тәңлијини интеграл эјриси дјәйләр.

Алдындыр ки, интеграл эјрини кәсими јәндир вә онун һәр бир нөгтәсиндә тохунанын бир

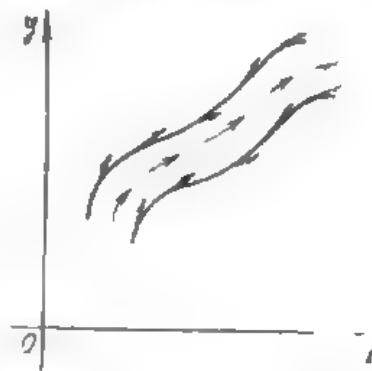
Фәрз едәк ки, (2) тәңлијини сәт тәрфиндә $f(x, y)$ функцијасы һәр һансы σ областында тәјин олунмушдур вә онун бүтүн нөгтәләриндә сонлу гијмәтләр алыр. Әкәр $(x, y) \in \sigma$ нөгтәси (2) тәңлијини интеграл эјриси үзәриндә јрләширсә, онда һәмкә нөгтәдә интеграл эјриси чәклимиш тохунанын

бугаг эмсалы y' вэ $f(x, y)$ барабарлыгына көрө $f(x, y)$ олар: $\lg a = f(x, y)$. Бурадин интеграл эйрисинэ (x, y) нөгтөсіндэ чэкилиш тохунанын абсис охундан мејл бугагы тапылып. $a = \arctg f(x, y)$.

Инди һәр бир $(x, y) \in \sigma$ нөгтөсіндэн абсис оху илэ $a = \arctg f(x, y)$ бугагы эмалэ кәтүрөк ох ишарәси чәкәк. Беләликлә, (2) тәңлијиниң сағ тәрафи васитәсилә σ областында

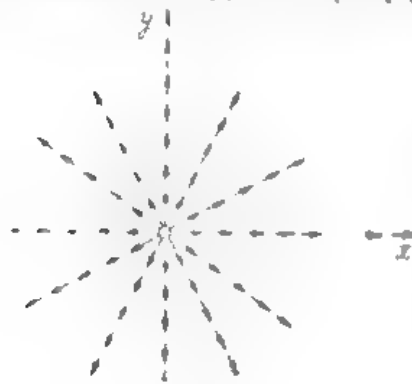


Шәкил 235



Шәкил 236

истигамәтләр мејданы тәјин олунур (шәкил 235) (2) тәңлији көстәрир ки, интеграл эйрисиниң һәр бир нөгтәсіндә тохунанын истигамәти ујғун нөгтәдә мејданын истигамәти илэ үст-үстә дүшүр. Интеграл эйриләри бүтүн башга эйриләрдән елә σ хәссә илэ фәргләнир. Демәли, дифференциал тәңлији һәлл етмәк, һәндәси оларг елә эйри тапмағ демәкдир ки, бу эйриниң истәнилән нөгтәсіндә тохунанын истигамәти ујғун нөгтәдә мејданын истигамәти илэ үст-үстә дүшсүн (шәкил 236). Белә эйриләр чох олур. Олар мүәјјән эйриләр аиләсини (интеграл эйриләри аиләсини) тәшкил едир. Бу аиләдән мүәјјән эйри ајырмағ үчүн һәмий эйриниң кечдији бир (x_0, y_0) нөгтәси верилмәлидир.



Шәкил 237

Мисал 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0). \quad (7)$$

Бу тәңлиик васитәсилә тәјин олунан истигамәтләр мејданы 237-чи шәкилдә көстәрилир.

Ајдыңдыр ки, координат башланғычындан чыхып вә

станидән (x, y) нөгтәсіндән кечән һәр бир дүз хәттин истигамәти һәмий нөгтәдә мејданын истигамәти илэ үст-үстә дүшүр. Бу көстәрир ки, $y = Cx$ дүз хәтләри (7) дифференциал тәңлијиниң интеграл эйриләридир.

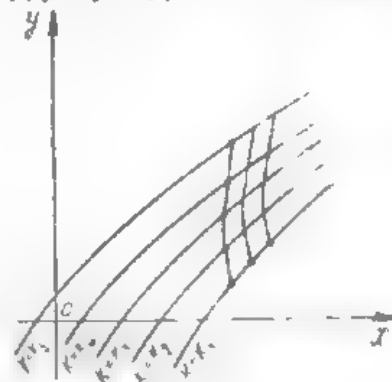
Верилмиш дифференциал тәңлијиниң интеграл эйриләриниң кечә јерләшдијини тәсәввүр етмәк вә һәм дә интеграл эйриләрини тәғриби гурмағ үчүн изоклиналәр (барабар мејлли хәтләр) үсулундан истифада етмәк олур.

Интеграл эйриләриниң ејниистигамәтли нөгтәләри чохлуғуна истигамәтләр мејданын изоклиналәр дејиләр. (2) тәңлијиниң интеграл эйрисиниң истигамәтиниң (јәни, тохунанын бугаг эмсалыны) $y' = k$ илэ тәјин етсәк, онда белә истигамәтти олан нөгтәләр

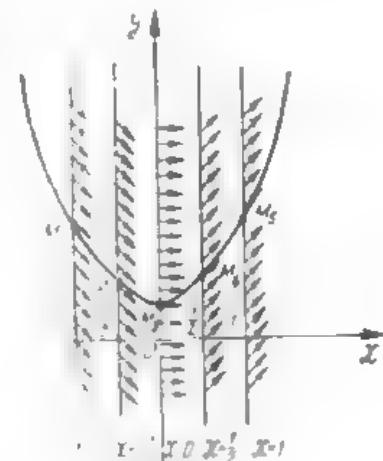
$$f(x, y) = k \quad (8)$$

шәртиниң өдәјән нөгтәләр олур. Демәли, (8) тәңлији истигамәтләр мејданын $y' = k$ истигамәтинә ујғун олан изоклининиң тәңлијидир. Бурада k -ја мүхтәлиф гијмәтләр вердикдә мүхтәлиф изоклиналәр, јәни (2) тәңлији үчүн изоклиналәр аиләси алыныр.

Тутәг ки, k -нын бир-биринә чох јәхын k_1, k_2, \dots, k_n гијмәтләринә ујғун изоклиналәр гурулмушдур (шәкил 238). Инди



Шәкил 238



Шәкил 239

$k = k_1$ -ә ујғун олан изоклиналәр үзәриндә бир нечә нөгтә кәтүрәк, бу нөгтәләрдән бугаг эмсаллары k_1 олан вә $k = k_2$ изоклининә гәдәр узатылмыш дүз хәтт парчалары чәкәк. Сонра исе бу дүз хәтт парчаларының $k = k_2$ изоклининиң кәсдији нөгтәләрдән бугаг эмсаллары k_2 олан вә $k = k_3$ изоклининиң кәсәнә гәдәр узатылмыш јени дүз хәтт парчалары чәкилир.

Беләликлә, бу процес нәтижәсиндә гурулмуш дүз хәтт парчалары верилмиш дифференциал тәңлијиниң интеграл эйрисини тәғриби ифада едән (на она чох јәхын олан) сынығ хәтти

тәшкил едир. Ајындыр ки, $k_{i+1} - k_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n-1$) фәргләри чох кичик олдугда гурулак дүз хәтт парчалары чох гыса олар вә оларын әмәлә кәтирдия сыныг хәтт тәлијин интеграл әјрисинә диха јахын олур.

Мисал 2.

$$y' = 2x. \quad (9)$$

Дифференциал тәлијин изоклиналәр аиләсиник тәлији $2x = k$ вә ја $x = \frac{k}{2}$ олар. Бурада k -ја $k = 0, k = 1, k = 2, \dots$ вә с. кими гијмәтләр вердикдә тәкликләри

$$x = 0, x = \frac{1}{2}, x = -\frac{1}{2}, x = 1, \dots$$

олан изоклиналәр алчыыр. Бу изоклиналәр ординат охуна паралел олан чүз хәтләрдир (шәхил 239). Оу охундан ибарәт олан $x = 0$ изоклининин бүтүн нөгтәләриндә мејданын истигамәти абсис охуна паралелдир ($y' = 0 = \operatorname{tg} \alpha, \alpha = 0$). $x = \frac{1}{2}$ изоклининин бүтүн нөгтәләриндә мејданын истигамәти абсис оху илә $\alpha = 45^\circ$ буцаг әмәлә кәтирир ($y' = \operatorname{tg} \alpha = 1, \alpha = 45^\circ$). $x = -\frac{1}{2}$ изоклининин бүтүн нөгтәләриндә мејданын истигамәти абсис оху илә $\alpha = -45^\circ$ ($y' = \operatorname{tg} \alpha = -1, \alpha = -45^\circ$) буцаг әмәлә кәтирир вә с.

Јуағызда дедијимиз гәјдә илә гурулмуш M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 сыныг хәтти (9) тәлијинин интеграл әјрисини тәгриби ифадә едир. Бу сыныг хәтт $y = x^2 + C$ параболасына чох јахындыр (9) тәлијинин һәлли исе $y = x^2 + C$ функцияларыдыр. Бурада C параметринә мүхтәлиф гијмәтләр вермәклә алынган параболалар (9) тәлијинин интеграл әјриләри олар.

§ 3. КОШИ МӘСӘЛӘСИ ВӘ БИРТӘРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТӘЛИКЛӘРИН ҮМУМИ ҺӘЛЛИ

Биртәртибли дифференциал тәликләрин һәндәи изады вә иғдијә кими һәлл олунмуш мисаллар көстәрир ки, дифференциал тәликләрин, үмумијәтлә, чох вә һәтта сонсуз сәјдә һәлти вардыр. Бу һәлләрин графикләри верилмиш дифференциал тәлијин интеграл әјриләри аиләсини тәшкил едир.

Тәрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

дифференциал тәлијин үчүн белә бир мәсәлә гојулур: бу тәлијин көстәрилән һәлләри ичәрисиндән еләсини тәлмәли ки, аргументин $x = x_0$ гијмәтиндә верилмиш $y = y_0$ гијмәтинин алсын. Буну белә јазырлар:

$$y|_{x=x_0} = y_0. \quad (2)$$

Верилмиш x_0 зәддинә аргументин башлангыч гијмәти, y_0 зәддинә исе ахтарылан функциянын башлангыч гијмәти

дејилир. Үмумијәтлә, x_0, y_0 әгәлләри һәллини башлангыч гијмәтләри вә ја башлангыч шәртләри адланыр.

Һәллини x_0, y_0 башлангыч гијмәтләринин верилмәси һәндәси олараг мүстәви үзәриндә бир (x_0, y_0) нөгтәсинин вә ја (x_0, y_0) башлангыч нөгтәсинин верилмәси демәкдир.

(1) тәлијинин $y = \varphi(x)$ һәлли (2) шәртинин вә ја $\varphi(x_0) = y_0$ бәрәбарлијинин әдәдикдә дејирлар ки, һәмин һәлл верилмиш x_0, y_0 башлангыч шәртләриники (вә ја башлангыч гијмәтләриники) әдәјир.

Дифференциал тәликләр нәзәријәсинин әсас мәсәләлариндән бири (1) тәлијинин верилмиш x_0, y_0 башлангыч шәртләринин әдәјән һәллини ахтарылмасыдыр. Буна (1) тәлијин үчүн Коши мәсәләси дејилир.

Коши мәсәләси һәндәси олараг белә сөјләнир: (1) тәлијинин верилмиш (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тапмәли.

Белә тәбии бир суал гаршыја чыхыр: (1) дифференциал тәлијин үчүн Коши мәсәләси һәллинин варлыгы вә јекәнәлији һағгында нә демәк олар? Бу суала ашағыздакы теорем чаваб верир.

Коши теоремин (биртәртибли дифференциал тәлијин һәллинин варлыгы вә јекәнәлији): $f(x, y)$ функцијасы (Oxy) муһимлисинин σ областында кәснәлмәјидирсә вә бу областта кәснәлмәјән $f_y(x, y)$ хүсуси тәрәмәси варса, онда һәллини областтын һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсини үчүн (1) тәлијинин (2) башлангыч шәртинин әдәјән јекәнәи $y = \varphi(x)$ һәлли вар.

Бу, һәндәси олараг ә демәкдир ки, теоремин шәртләрини әдәтиликдә σ областтын һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндән (1) тәлијинин јекәнәи интеграл әјриси кечир.

Теоремин тәм исбаты бурада верилмир. Ләкин исбатын әсас идеясы ашағызда гыса шәрһ олунур:

(1) дифференциал тәлијинин (2) башлангыч шәртинин әдәјән һәллинин ахтарылмасы

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y) dt \quad (3)$$

тәлијинин һәллини эквивалентдир. Ахтарылган y функцијасы интеграл ишарәсин астында олдугу үчүн (3) тәлијинә интеграл тәҗрибә дејилир.

(1) дифференциал тәлијинин (3) интеграл тәлијини илә ејни-күчлү олмасы асанлыгла исбат олунур. (1) тәлијинин (2) башлангыч шәртинин әдәјән һәр бир һәлли (3) интеграл тәлијинини һәлләдир. (3) интеграл тәлијинин һәр бир һәлли исе (1) тәлијини вә (2) башлангыч шәртинин әдәјир.

У дејишәнинин t -дән асыллыгы мәлум олмәдыгы үчүн (3) тәлијинин сәг тәрафиндәки интегралы һесабламәг мүмкүн.

дејилдир. Буна көрө дө билгиваситө интеграллама ласкөтөсилө
(3) бэр-бэрлијиндөи һәмийи тәһлијини һәллини тапмәг олмаҗ.

(3) тәһлијиниң тәғриби вә дәғис һәллини артыҗыл јажынлашма үсулу вәситәсилө иҗағьдөкы кими тапмәг олар.

Әввәләчә $y = y_0$ әдәди (3) тәһлијиниң сәғфәриҗиҗи јажынлашмасы һесаб олуғур. Соғри җисә

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y_0) dt$$

бәрәбәрлији вәситәсилө тәһлијиниң биринҗи јажынлашмасы тапылыр. Бу бәрәбәрлијиниң сәғ тәғрифидәки интеграл алтында t -ниң мәдлум функциясы (y_0 һәғиги әдәд олуғ t -дәи асылы дејилдир) јазылдығында һәмийи интегралы һесабламағ мүмкүндүр. Тәһлијиниң икинҗи јажынлашмасы

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y_1) dt$$

бәрәбәрлији вәситәсилө вә нәһајәт, n -чи јажынлашмасы

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y_{n-1}) dt \quad (4)$$

бәрәбәрлији вәситәсилө тапылыр.

Теоремини шәртләри өдәнилдикдә, белә гурулан $\{y_n\}$ ($y_n = y_n(x)$) артыҗылығы мүәјјән $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) интервалында мүнтәзәи јығыландыр. Артыҗылығын

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

лимити (3) интеграл тәһлијиниң јекәнә һәллидир. Онда һәмийи функция (1) тәһлијиниң дә (2) башланғыч шәртини өдәјән јекәнә һәлли олар.

Җејд едәк ки, $y_0(x)$ функцияларының һәр бирини (1) тәһлијиниң тәғриби һәлли һесаб етмәк олар.

Көһин теореминдәи ајдындыр ки, (1) тәһлијиниң консуз сәјди һәлли вар. Догрудан дә, теоремини шәртләри өдәнилдикдә һәр бир $(x_0, y_0) \in \sigma$ нөгтәси үчүн (1) тәһлијиниң $y = y_0$ башланғыч шәртини өдәјән јекәнә $y = y_0(x)$ һәлли вар. Инди һәмийи областың башғы бир (x_0, y_0) нөгтәсиниң (y_0, y_1) кө үрәк. Теоремә көрә (1) тәһлијиниң $y_1(x_0)$ y_1 башланғыч шәртини өдәјән $y = y_1(x)$ һәлли дә вар. Бу һәлли аввалки $y = y_0(x)$ һәллиндәи фәрглидир (үчүн ки бир $x = x_0$ нөгтәсиндә $y = y_0(x)$ функциясы ики мүхтәлиф y_0 вә y_1 ғијмәтләрини ала биләчәк). Јени (x_0, y_1) башланғыч шәрти (y_1, y_2) башғы бир $y = y_2(x)$ һәллини тәјин едәр (шәкил 240) вә с.

Беләликлә, x_0, y_0 башланғыч ғијмәтләриниң биринчисини, јәһи x_0 -и, сәбит һесаб едәрәк, икинчисини, јәһи y_0 -и мүәјјән интервалда дәјишдирсәк, онда y_0 -иң һәр бир ғијмәтинә (1)

тәһлијиниң бир һәлли ујғун олар. Ајдындыр ки, бу һәлләр чоғлуғу y_0 -дәи асылыдыр: $y = \varphi(x, y_0)$

Бурада y_0 әдәди C (параметри) илә әвәз едилдикдә (1) тәһлијиниң

$$y = \varphi(x, C) \quad (5)$$

һәлли алындыр. Буна (1) тәһлијиниң үмүми һәлли дејилдир.

Җәғриф. (1) дифференциал тәһлијиниң ихтијари C параметриндәи асылы олаи $y = \varphi(x, C)$ һәллине о заман һәмийи тәһлијиниң үмүми һәлли дејилдир ки, һәмийи һәлдәи C параметриндәи мүәјјән C_0 ғијмәти вермәклә истәнилдән $y|_{x=x_0} = y_0$ башланғыч шәрти өдәјән $y = \varphi(x, C_0)$ һәллини алағ мүмкүн олсун. Бурада (x_0, y_0) нөгтәси (1) тәһлијиниң һәллиниң артыҗы вә јекәнәлији теорем шәртләриниң өдәнилдиги σ областына бахылдыр.

(1) дифференциал тәһлијиниң үмүми һәлли

$$F(x, y, C) = 0 \quad (6)$$

тәһлији вәситәсилө гејри-әшкар шәкилдә дә верилә биләр. Бу һәлдә, (6) бәрәбәрлијинә (1) дифференциал тәһлијиниң үмүми интегралы дејилдир.

(1) дифференциал тәһлијиниң үмүми һәлли

$$x = \varphi(t, C), y = \psi(t, C)$$

параметрик шәкилдә дә верилә биләр.

(1) дифференциал тәһлијиниң (5) үмүми һәллиндән C параметринә мүәјјән $C = C_0$ ғијмәти вермәклә алынан $y = \varphi(x, C_0)$ функциясына һәмийи тәһлијиниң хусуси һәлли дејилдир. $F(x, y, C_0) = 0$ мунасибәти илә дифференциал тәһлијиниң хусуси интегралы аламыр.

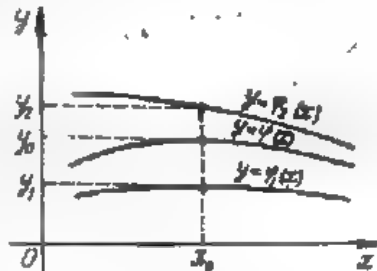
Һәндәси оларәг үмүми һәлл (вә ја үмүми интеграл) бир ихтијари сәбитдән (вә ја бир параметрдән) асылы олаи интеграл әјриләри әйләсиндәк ибарәтдир. Хусуси һәлл (вә ја хусуси интеграл) илә мүстәвинни в риләиш (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјридир.

Дифференциал тәһлијиниң (2) башланғыч шәртини өдәјән (хусуси) һәллини вә ја (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриниң тапмәг үчүн (5) үмүми һәллиндә $x = x_0$ вә $y = y_0$ көгүрәрәк, алынан

$$y_0 = \varphi(x_0, C) \quad (F(x_0, y_0, C) = 0) \quad (7)$$

бәрәбәрлијиниң C -ја нәзәрән һәлл етмәк лағзымыр. Бурадан тапыдан $C = C_0$ әдәдини (5) бәрәбәрлијиндә (вә ја (6) бәрә-

Шәкил 240



бэрлижиндэ) C эвэзинэ, $f(x, y)$ (2) башлангыч шартини өдэжэн

$$y = f(x, C_0)$$

һэллн (вэ $f(x, y, C_0) = 0$ интегралы) алымыр.

Тутаг ки, (1) дифференциал тэнлижинин сэг тарафи у-дэн асылы дежилдир, $f(x, y)$ һәмнн тэнлик

$$y' = f(x) \quad (8)$$

шәкиндәдир вэ $f(x)$ функцијасы һәр һансы (a, b) интервалында кәсимәјәндир. Онда интеграл һесабындан мәлумдур ки, ахтарылан y функцијасы ашағыдакы кими тапылдыр:

$$y = \int f(x) dx + C. \quad (9)$$

Бир C параметриндән асылы олан (9) бәрабарлији (8) тәнлижинин үмуми һәллини (вэ $f(x)$ интегралыны) тәјин едир. Ола биләр ки, (9) бәрабарлижинин сэг тәрафиндәки интеграл һесабын вэ нәтичәси елементар функцијаларла ифадә олунур. Ола да биләр ки, һәмнн интегралы елементар функцијаларла ифадә өтмәк мүмкүн дежилдир (XXI, § 7).

Бу һалларын һәр икисиндә (8) тәнлији һәлл олунмуш һесабы олунур.

Үмумијәтлә, верилмиш дифференциал тәнлижин һәллини тапылмасы бир вэ $f(x)$ бир нечә гејри-мүәјјәнн интегралыны һесабыланмасына кәтирилдикдә һәмнн дифференциал тәнлик һәлл олунмуш һесабы олунур. Бу һалда, бәзән дејирләр ки, верилмиш дифференциал тәнлик квадратура илә һәлл олунур.

Мисәл.

$$y' = y. \quad (10)$$

Тәнлижин сэг тәрафиндәки $f(x, y) = y$ функцијасы үчүн бүтүн (Oxy) мүстәвксиндә Коши теореминин шәртләри өдәни-

лир. Буна көрә дә мүстәвинин истәвилән (x_0, y_0) нөгтәсиндән верилмиш тәнлижин јекәнә интеграл әјрисн кечир.

Тәнлижин үмуми һәлли бир параметрдән асылы

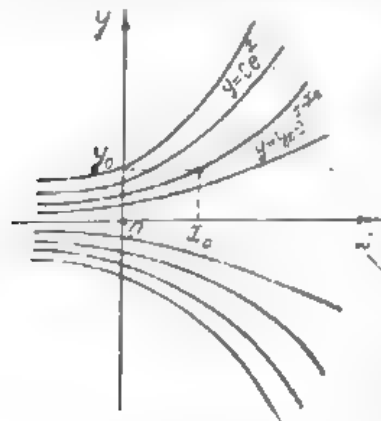
$$y = Ce^x. \quad (11)$$

функцијасыдыр. Доғрудан да, (11) функцијасы ихтијари C үчүн (10) тәнлижини өдәјир:

$$(Ce^x)' = Ce^x, Ce^x = Ce^x.$$

Верилмиш ихтијари (x_0, y_0) башлангыч гијмәтләри үчүн исә C параметринин елә C_0 гијмәтини тапмаг олар ки,

$$y = C_0 e^x$$



Шәкил 241

һәлли

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

башлангыч шартини өдәсин.

Бу мәгсәдлә C -нин C_0 гијмәтини

$$y_0 = Ce^{x_0}$$

бәрабарлијиндән тапмаг лазымдыр: $C = C_0 = y_0 e^{-x_0}$.

Алынган

$$y = y_0 e^{x-x_0} \text{ вэ } f(x) = y_0 e^{x-x_0}$$

һәлли (2) башлангыч шартини өдәјир.

C параметринин мүхтәлиф гијмәтләринә үјгүн интеграл әјриләри 241-чи шәкилдә көстәрилмишдир. $y = y_0 e^{x-x_0}$ һәллини графיקи (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечир.

§ 4. ДӘЈИШӘНЛӘРИНӘ АЈРЫЛАН ТӘНЛИКЛӘР

1. Тутаг ки, $M(x)$ вэ $N(y)$ функцијалары үјгүн оларак (a, b) вэ (c, d) интервалында кәсимәјәндир. Бу һалда

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad (1)$$

тәнлијинә *әјришәнләринә ајрылмыш дифференциал тәнлик* дејилр. (1) тәнлијиндә dx -ни әмсалы анчаг x -дән, dy -ни әмсалы анчаг y -дән асылыдыр.

Фәрз едәк ки, $y(x)$ функцијасы (1) тәнлијинин һәллидир. Онда һәмнн функција (a, c) интервалында (1) тәнлијини ејни-лијә чевирир:

$$M(x) dx + N[y(x)] dy'(x) = 0 \quad (2)$$

Бу ејнилији интегралладыгда

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C. \quad (3)$$

мүнәсибәти алымыр; бурада C ихтијари сабитдир.

Демәли, (1) тәнлијинин һәр бир һәлли (3) тәнлијини дә өдәјир. Тәрсинә, әкәр $y(x)$ функцијасы (3) тәнлијини өдәјирсә, онда һәмнн ејнилији дифференциалладыгда (2) мүнәсибәти алымыр. Бу да һәмнн функцијаның (1) тәнлијини өдәдијини көстәрир.

Бурадан ајдындыр ки, (3) тәнлији (вэ $f(x)$ бәрабарлији) (1) тәнлијинин бүтүн һәлләрини тәјин едир. Буна көрә дә (3) мүнәсибәти (1) тәнлијинин үмуми интегралы олар. Ола биләр ки, (3) бәрабарлијиндә иштирак едән интегралларын бири вэ $f(x)$ һәр икиси елементар функцијаларла ифадә олуна билимр. Ашағыда гејд етд. јимиз кими, бу һалда дә (1) диференс ал тәнлији һәлл олунмуш һесабы олунур вэ $f(x)$ бәрабарлији онун үмуми интегралыны (һәллини) тәјин едир. $f(x) \neq 0$ олдуг а (3) бәрабарлијиндән (1) тәнлијинин y һәлли x -ни гејри-ашыр функцијасы кими тәјин олуна биләр.

$$\frac{x}{1+x^2} dx + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx - e^{-y} = C.$$

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) = f(x, y) \quad (3)$$

барабарлијини өдәмәсини нөзәрә алаг. (3) барабарлијиндә $t = \frac{1}{x}$ гәбул етсәк,

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

олар. Бу барабарлијин сағ тәрәфиндәки $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ ифадәси $\frac{y}{x}$ нисбәтинин мүәјјән функцијасыдыр. һәмжи функцијаны $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ илә дшарә етдикдә, (2) тәнлији

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4)$$

шәклиндә язылыр. (2) вә (4) тәнликләринин эквивалент олмасы үчүн $x \neq 0$ һесаб етмәк ләзымдыр.

(4) тәнлији $\frac{y}{x} = z$ әвәзләмәси вәситәсилә дәјишәнләринә әррәләк тәнлијә кәтирилир.

Догрудан да,

$$y = xz, \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$$

олар вә (4) тәнлији

$$z + x \frac{dz}{dx} = \varphi(z), x \frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z$$

кимнн язылар. Бурадан

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}, \varphi(z) - z \neq 0;$$

$$\ln C + \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln x, x = Ce^{\int \frac{dz}{\varphi(z) - z}}$$

алымыр. $\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \varphi(z)$ гәбул етсәк, (4) тәнлијинин үмуми интегралы

$$x = Ce^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (5)$$

шәклиндә язылар.

Гәјд. Хүсуси һалда, $\varphi(z) \equiv z$ олдуғда (4) тәнлији дәјишәнләринә әррәләк $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ тәнлијинә чәврилир. Бу тәнлијин үмуми һалла $y = Cx$ ($x \neq 0$) функцијасыдыр. Әкәр $\varphi(z) - z \neq 0$ өдәнилисә, һәкин мүәјјән $z = z_1$ гиһәттиндә $\varphi(z_1) - z_1 = 0$ барабарлијә доғрудурса, онда $z = z_1$ функцијасы $xdz = [\varphi(z) - z] dx$ тәнлијинин һалла олар. Буна (4) тәнлијинин $y = z_1 x$ һалла үйгүндүр. һәмжи һалла, бәзән (5) үмуми интегралындан (һәләкидән) азмағ мүмкүн олмур.

Мисал 1. Бирчинсли $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3$ тәнлијинин һалла етмәли.

$\frac{y}{x} = z$ вә ја $y = xz$ әвәзләмәсини апарсағ, $\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$ олар. Онда

$$z + x \frac{dz}{dx} = z + z^3, x \frac{dz}{dx} = z^3$$

(дәјишәнләринә әррәләк тәнлик),

$$\frac{dz}{z^3} = \frac{dx}{x}, \ln z = \ln C - \frac{1}{2z}, x = Ce^{-\frac{1}{2z}},$$

$$x = Ce^{-\frac{1}{2z}}$$

олар. Сочунчу ифадә верилимш тәнлијин үмуми интегралыдыр.

3. $M(x, y)$ вә $N(x, y)$ функцијалары ејни дәрәжәли бирчинсли функцијалар олдуғда

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (6)$$

тәнлији дә бирчинсли тәнлик адланыр. Бу тәнлији (2) бирчинсли тәнлик шәклиндә кәтирмәк олур:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y), (N(x, y) \neq 0).$$

Гәјд едәк ки, бирчинсли (6) тәнлијини (2) шәклиндә кәтирмәдән дә һалла етмәк олар. Бу мәғсадла $y = xz$ ($dy = xdz + zdx$) әвәзләмәсиндән истифадә етмәк ләзымдыр.

Мисал 2. Бирчинсли $(x+y)dx - (y-x)dy = 0$ тәнлијинин һалла етмәли.

$y = xz$ әвәзләмәсини апарсағ, $dy = xdz + zdx$ олар. Онда верилимш тәнлик

$$(x+xz)dx - (xz-x)(xdz+zdx) = 0$$

вә ја

$$(1+2z-z^2)dx + x(1-z)dz = 0$$

шәклиндә язылар. Бурадан тәнлијин үмуми интегралы алымыр:

$$\frac{1-z}{1+2z-z^2} dz + \frac{dx}{x} = 0, \frac{1}{2} \ln |1+2z-z^2| + \ln |x| = \ln C,$$

$$(1+2z-z^2)x^2 = C^2, x^2 + 2yx - y^2 = C^2.$$

4. f мүәјјән кәһилмәјән функција олдуғда

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \quad (7)$$

шәклиндә тәнликләр бирчинсли тәнлијә кәтирилир. $c=c_1=0$ олдуғда (7) тәнлијинин бирчинсли олмасы әддиңдыр. Буна кәрә дә c вә c_1 өдәдләринин һеч олмаса биринин сыфырдан фарли олдуғу һалла баһағ.

Түгәг ки, $ab_1 - a_1b \neq 0$. Бу һалда (7) тәнлијиндә

$$x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta$$

әвәзләмәсини апармағ ләзымдыр:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi+b\eta+\alpha a+\beta b+c}{a_1\xi+b_1\eta+\alpha a_1+\beta b_1+c_1}\right) \quad (8)$$

Әкәр α вә β әдәдләрнн

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + c = 0, \\ a_1 a + b_1 \beta + c_1 = 0 \end{cases}$$

системиниң һәлли кимн тә'јин етсәк, онда (8) тәнлији бирчинсли

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1}{a_1 x + b_1}\right)$$

тәнлијинә чевриләр.

$ab_1 - a_1 b = 0$ олдугда исә $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ мүнәсибәтиндән $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ алыныр. Бу гижәтләри (7) тәнлијиндә јеринә јазсаг вә $z = ax + by$ әвәзләмәсини апарсаг, онда (7) тәнлији дәјишәнләринә ајрылан тәнлија чевриләр.

Мисал 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x + 2y - 9}{3x - y - 1} \quad (9)$$

Бу һалда $ab_1 - a_1 b = -11 \neq 0$ олдугундан $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ әвәзләмәсини апармаг лазымдыр. Намә'лум α вә β әдәдләри

$$\begin{cases} 5\alpha + 2\beta - 9 = 0, \\ 3\alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases}$$

системиниң һәлли кимн тә'јин едилір: $\beta = 2$ вә $\alpha = 1$.

Онда $x = \xi + 1$, $y = \eta + 2$ әвәзләмәси вәситәсилә (9) тәнлији бирчинсли

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{5\xi + 2\eta}{3\xi - \eta}$$

тәнлијинә кәтириләр. Бу тәнлији $\eta = \xi z$ әвәзләмәсини апармагла һәлл етмәк олар:

$$\begin{aligned} z + \xi \frac{dz}{d\xi} &= \frac{5 + z}{3 - z}, \quad \frac{(3 - z) dz}{z^2 - z + 5} = \frac{d\xi}{\xi}, \\ \frac{5}{2} \int \frac{dz}{z^2 - z + 5} - \frac{1}{2} \int \frac{(2z - 1) dz}{z^2 - z + 5} &= \ln |\xi| + \ln C, \\ \frac{5}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2z - 1}{\sqrt{19}} - \frac{1}{2} \ln |z^2 - z + 5| &= \ln \xi + C. \end{aligned}$$

Бурадан (9) тәнлијиниң үмуми интегралы тапылыр:

$$\frac{5}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{19}} \frac{2x - 1}{x - 1} - \ln C = \ln |x - 1| \sqrt{\left(\frac{2}{x - 1}\right)^2 - 1} - 5.$$

§ 6. БИРТӘРТИБЛИ ХӘТТИ ДИФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Ахтарылган функција вә оған төрәмәсинә нәзәрән хәтти олан тәнлија биртәртибли хәтти диференциал тәнлик дејилір. Биртәртибли хәтти диференциал тәнлији

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (1)$$

шәклиндә јазмаг олар.

$f(x) \equiv 0$ олдугда алынан

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2)$$

тәнлијинә (1) тәнлијинә ујғун олан хәтти бирчинсли тәнлик дејилір. $f(x) \neq 0$ олдугда (1) тәнлији хәтти бирчинсли олмајан диференциал тәнлик адыныр.

Фәрс едәк ки, $p(x)$ вә $f(x)$ функцијалары мұәјјән (a, b) интервалында кәсилмәздир (1) тәнлијини ашағыдакы кимн јазар.

$$y' = -p(x)y + f(x).$$

Ајдындыр ки, бу һалда $f(x, y) = -p(x)y + f(x)$ функцијасы $a < x < b$; $-\infty < y < \infty$ областында кәсилмәздир вә һәмин областда кәсилмәјән $f_y(x, y) = -p(x)$ хәтти төрәмәси вар. Буна көрә дә диференциал тәнлијиң һәлтинин варлыгы вә јекәнәлији теореминә (§ 3) көрә (1) тәнлијиниң истәниләи $x_0, y_0 ((x_0, y_0) \in a)$ башланғыч шәртини өдәјән јекәнә һәлли вар:

(2) тәнлијиниң һәлли. Бу тәнлик дәјишәнләринә ајрылыр.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Ахырынчы тәнлији интегралласар,

$$\ln |y| = - \int p(x) dx + \ln |C|$$

$$y = Ce^{-\int p(x) dx} \quad (3)$$

аларыг. Бу (2) тәнлијиниң үмуми һәллидир.

(1) тәнлијиниң һәлли. (1) тәнлијини мұхтәлиф үсулларла һәлл етмәк олар. Бурәдә һәмин тәнлик сабитин вариацијасы үсулу илә һәлл едилір.

(1) тәнлијинә ујғун олан (2) хәтти бирчинсли тәнлијиниң (3) үмуми һәллиндәки ихтијари C сабитини x дәп асылы елә $C = C(x)$ функцијасы һесаб едәк ки, алыная

$$y = C(x) e^{-\int p(x) dx} \quad (4)$$

функцијасы (1) тәнлијиниң һәлли олсун. Онда

$$\begin{aligned} \left[C(x) e^{-\int p(x) dx} \right]' + p(x) \left[C(x) e^{-\int p(x) dx} \right] &= f(x), \\ C'(x) e^{-\int p(x) dx} - C(x) p(x) e^{-\int p(x) dx} + C(x) p(x) e^{-\int p(x) dx} &= f(x), \\ C'(x) e^{-\int p(x) dx} &= f(x), \end{aligned}$$

$$C'(x) = f(x) e^{\int p(x) dx}$$

Бурадан намә'лум $C(x)$ функцијасы тапылыр:

$$C(x) = \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + C.$$

Бу гijмaти (4) бaрaбaрлijиндa [epинa]aздыгдa (1) тaнли-
jинин yмyми нaлли aлынyp:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right]. \quad (5)$$

Аjдындыр ки, (1) тaнлиjинин (5) yмyми нaлли ики интeг-
paллaмa (квaдрaтyрa) вacитaсилa тaпылып вa ики тoплaнaнын
чaминдaн ибapэтдир: биркинчи тoплaнaн (2) бирчинcли тaнли-
jинин yмyми нaлли

$$C e^{-\int p(x)dx};$$

икинчи тoплaнaн иcя (1) тaнлиjинин бир xycyси нaлли

$$e^{-\int p(x)dx} \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

(бy xycyси нaлл (5) yмyми нaллиндaн $C=0$ oлдyгдa aлынyp)

Мисaл. $y' + \frac{y}{x} = x^2$ хaтти тaнлиjини нaлл eтмaли.

Бy тaнлиjя yjгyи oлaн бирчинcли

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

тaнлиjинин yмyми нaлли

$$y = \frac{C}{x}$$

oлaр. Инди eлa $C(x)$ фyнкciяcы тaпaг ки,

$$y = \frac{C(x)}{x} \quad (6)$$

фyнкciяcы вepилмиш тaнлиjин нaлли oлcyн. Бy мaгcэдлa (6)
фyнкciяcыны вepилмиш тaнликдa [epинa]aзaг:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x^2, \quad C'(x) = x^3$$

$$C(x) = \frac{x^4}{4} + C_1.$$

Бyрaдaн ajдындыр ки, вepилмиш тaнлиjин yмyми нaлли

$$y = \frac{x^4}{4} + \frac{C_1}{x}.$$

oлaр

§ 7. БЕРНУЛЛИ ТАНЛИЖИ

Тyтaг ки, $p(x)$ вa $f(x)$ нaр нaнcy (a, b) интepвaлyндa кaсилмa-
жaн фyнкciялaр вa m иcтaнилaн нaгиги aдaддир. Бy нaлдa

$$y' + p(x)y = f(x)y^m \quad (1)$$

шaклиндa тaнлиjя *Бepнyлли тaнлиjи* дejiлиp. $m=0$ вa $m=1$
oлдyгдa (1) тaнлиjи yjгyи oлaрaг хaтти вa дajiшaклaрнa a-
pылaн тaнлиjя чeвpилиp.

Бepнyлли тaнлиjи $m \neq 1$ oлдyгдa aвaзлaмa вacитaсилa хaтти
тaнлиjя кaтpилиp. Бyнa инaнмaг yчyн (1) тaнлиjинин иpики
тaрaфини $y^m (y \neq 0)$ ифaдaсинa бoлaк вa aлынaн

$$y^{-m} \cdot y' + p(x) y^{1-m} = f(x)$$

тaнлиjиндa $y^{1-m} = z$ aвaзлaмaсини aпaрaг. Oндa

$$(1-m) y^{-m} \cdot y' = z', \quad y^{-m} \cdot y' = \frac{z'}{1-m}$$

вa z дajiшaннa нaзepaн

$$z' + (1-m)p(x)z = f(x)(1-m) \quad (2)$$

хaтти тaнлиjи aлынyp. Бy хaтти тaнлиjини yмyми нaлли (§ 6)

$$z = e^{-\int (1-m)p(x)dx} \left[C + \int (1-m)f(x) e^{\int (1-m)p(x)dx} dx \right]$$

oлaр. Бyрaдaн $y = z^{\frac{1}{1-m}}$ oлдyгдaн (1) тaнлиjинин yмyми нaл-
ли aшaгыдaкы шaкилдa aлынyp:

$$y = \left\{ e^{-\int (1-m)p(x)dx} \left[C + \int (1-m)f(x) e^{\int (1-m)p(x)dx} dx \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}}. \quad (3)$$

Аjдындыр ки, $y=0$ фyнкciяcы $m>0$ oлдyгдa Бepнyлли
тaнлиjинин нaллидир. Бy нaлл $m>1$ oлдyгдa (3) yмyми нaл-
линдaн $C=\infty (C=-\infty)$ кaтpымaклa aлынyp, $0<m<1$ oлдyгдa
иcя бy нaлл yмyми нaлдaн C нaнcыннa нeч бир гijмaтиндe
aлынyp.

Мисaл. $y' + xy = xy^3 (m=3)$ тaнлиjини нaлл eтмaли.

Тaнлиjин нaр ики тaрaфини y^3 фyнкciяcынa бoлaрaг, $y^{-2} = z$
aвaзлaмaсини aпaрдыгдa

$$\frac{z'}{2} + xz = x, \quad z' - 2xz = -2x$$

хaтти тaнлиjи aлынyp. Бy тaнлиjини yмyми нaлли

$$z = Ce^{x^2} + 1$$

фyнкciяcыдyp. Бyрaдaн вepилмиш тaнлиjин

$$y^{-2} = Ce^{x^2} + 1$$

yмyми нaлли aлынyp.

§ 8. ТАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ТАНЛИКЛАР

1. Тyтaг ки, $M(x, y)$ вa $N(x, y)$ фyнкciялaры бирpабитaли
oблaстьиндa тajiни oлyнмyш кaсилмaжaн фyнкciялaрдыр. Дe-
фepенциaл шaклиндa jазылимыш

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

тaнлиjинин cол тaрaфи нaр нaнcy икидaн шaнcли $U(x, y)$ фyнк-
ciяcынын тaм диффepенциaлы oлaрcя, jaни

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (2)$$

өдәниликсә, онда һәмми тәнлијә ғ областында *там дифференциаллы тәнлик* дејилір.

(1) тәнлији *там дифференциаллы тәнлик* олдуғда ону

$$dU(x, y) = 0$$

шәкиндә јазмағ олар. Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини интегралламағла (1) тәнлијини үмуми интегралы тапылыр:

$$U(x, y) = C.$$

Мисал 1. $(2x + \frac{y}{x})dx + \ln x dy = 0$ тәнлијини сол тәрәфи

$U(x, y) = x^2 + y \ln x$ функцијасының *там дифференциалы*дыр:

$$dU(x, y) = (2x + \frac{y}{x})dx + \ln x dy.$$

Буна көрә дә верилмиш тәнлији үмуми интегралы

$$x^2 + y \ln x = C$$

олар.

Бурада әлдиңди кн, *там дифференциаллы тәнликләр* квадратура илә чох асан һәлл олунур. Оңа көрә дә верилмиш дифференциал тәнлији *там дифференциаллы* олмасын билмәјин бөјүк әһәмијәти вардыр. Буңу нечә билмәк олар?

2. Теорем. *Түтаг кн, $M(x, y)$ вә $N(x, y)$ функција-лары бирлибмәһәтлә ғ областының тәјин олунмәһәтлә олур, кәһилмәһәтлә вә кәһилмәһәтлә $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$*

*хүсуси тәрәһәләри вар. Бу һәлдә (1) тәнлијини ғ областында *там дифференциаллы тәнлик* олмасы үчүн һәмми областың бүтүн нөгтәләриндә*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (3)$$

бәрабәрлијини өдәниләһәтлә зарури вә кәһилмәһәтлә шәрһидир.

Шәртин зарурилији. Түтаг кн, (1) тәнлији *там дифференциаллы*дыр вә (2) бәрабәрлији өдәнилик. Оңда ғ областының бүтүн нөгтәләриндә

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

олар. Бурада

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

ејиликләри алыңыр. Бу бәрабәрликләри биринчисини у-ә нәзәрән, икинчисини исә х-ә нәзәрән дифференциалладығда

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

мүһәһәтләри, бурада исә икитәртибли гарышығ тәрәһәләри бәрабәрлији һағғында Шварс теореминә (XVII, § 8) әһәһәтлә (3) бәрабәрлији алыңыр.

Шәртин кәһилији. Түтаг кн, ғ областының бүтүн нөгтәләриндә (3) бәрабәрлији өдәнилик. Оңда елә $U(x, y)$ функција-сы тапымағ олар кн,

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad (4)$$

бәрабәрликләри ғ областында өдәнилик. Бу функција-сы тапымағ үчүн ғ областының истәһиләи (x_0, y_0) нөгтәһәтлә кәтүрәк вә (4) бәрабәрликләрини биринчисиндән $U(x, y)$ функција-сыны тапыағ

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y). \quad (5)$$

(5) бәрабәрлијиндә интеграллама х-ә нәзәрән ачары-лығы үчүн ихтијари C сабити әһәһәтлә дифференциаллынан ихтијари $\varphi(y)$ функција-сы кәтүрүлмүшдүр. Имди бу $\varphi(y)$ функција-сыны илә сечәк кн, (5) бәрабәрлији илә тәјин олунан $U(x, y)$ функција-сы (4) бәрабәрликләрини икинчисини дә өдәһәтлә. Оңда

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi'(y)$$

олар. Бурада

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx$$

бәрабәрлијини вә (3) шәртинә көрә

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

олдуғуну нәзәрә аласағ,

$$N(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \varphi'(y)$$

вә ја

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

мүһәһәтлә алыңыр. Сонунчу бәрабәрликләи ачтарылан $\varphi(y)$ функција-сы тапылыр:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C$$

(C ихтијари сабитдир). $\varphi(y)$ функција-сының бу гијмәтини (5) бәрабәрлијиндә јеринә јазсағ, тәләб олунан $U(x, y)$ функција-сы аларығ:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C. \quad (6)$$

Әлдиңдыр кн, (6) бәрабәрлији илә тәјин олунан $U(x, y)$ функција-сы (4) бәрабәрликләрини икинчисини дә өдәһәтлә. Јәһи (1) тәнлији *там дифференциаллы тәнлик*дир.

Беләликлә, шәрти кафилији исбат олунаркән, һәм дә ахтарылан $U(x, y)$ функцијасының тапылма гәјдәсы (ја'ни (6) дәстүрү) көсгәрилди. Апарылан муһакимәдән ајдындыр ки, там дифференциаллы тәңлијин үмуми интегралы

$$\int_1^x M(x, y) dx + \int_0^y N(x_0, y) dy = C \quad (7)$$

олар.

Мисал 2. $(3x^2 + y) dx + (x + 4y^3) dy = 0$ тәңлијини һәлл етмәли. Бу тәңлик үчүн

$$M(x, y) = 3x^2 + y \text{ вә } N(x, y) = x + 4y^3$$

олдугундан бүтүн (Oxy) мүстәвисиндә теоремни

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

шәрти өдәниләр. Демәли, верилмиш тәңлик там дифференциаллы тәңликдир. Бу тәңлијин үмуми интегралы (7) дәстүрү илә тапылар:

$$\int_0^x (3x^2 + y) dx + \int_0^y 4y^3 dy = C, \quad (x_0 = y_0 = 0),$$

$$x^3 + yx + y^4 = C.$$

3. (1) тәңлијини там дифференциаллы олмадыгда ону бә'зән там дифференциаллы тәңлијә кәтирмәк мүмкүн олур. Бу мәсәдлә (1) тәңлијинин һәр ики тәрәфини елә $\mu = \mu(x, y)$ функцијасына вурурлар ки, алынган

$$\mu M(x, y) dx + \mu N(x, y) dy = 0 \quad (8)$$

тәңлијини там дифференциаллы олсун. Белә $\mu(x, y)$ функцијасына (1) тәңлијинин интеграллајычы вуруғу дејиләр.

Верилмиш тәңлијини интеграллајычы вуруғуну нечә тапырлар?

$\mu(x, y)$ функцијасы (1) тәңлијинини интеграллајычы вуруғу олмасы үчүн (8) тәңлијини там дифференциаллы олмалыдыр. Бунун үчүн исә

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

вә ја

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \quad (9)$$

шәрти өдәнилмәлидир. (9) тәңлијинә ахтарылан $\mu(x, y)$ функцијасының хусуси төрәмәләрн дахилдир.

Демәли, (1) тәңлијинини $\mu(x, y)$ интеграллајычы вуруғуну тапмағ үчүн (9) хусуси төрәмәли дифференциал тәңлијини һәлл етмәк ләзымдыр. Бу мәсәлә, үмуми һалда, (1) тәңлијини интегралламағ мәсәләсиндән чәтиндир.

Бир сыра хусуси һәлләрда интеграллајычы вуруғу тапмағ мүмкүн олур. Бурада $\mu(x, y)$ функцијасының x, y дәјишәнләринин анчағ бириндән асылы олдуғда тапылма гәјдәсы көстәриләр.

$\mu = \mu(x)$. Бу һалда (9) тәңлијини

$$N \frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \mu(x) \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

вә ја

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx$$

шәклиндә јазылар. Бурадан интеграллајычы вуруғ тапылар:

$$\ln \mu(x) = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx + C$$

вә ја

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}, \quad (C = 0). \quad (10)$$

Ајдындыр ки, бу һалда $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ нисбәти y -дән асылы дејилдир.

$\mu = \mu(y)$. Бу һалда (9) тәңлијини

$$M \frac{\partial \mu(y)}{\partial y} = -\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

вә ја

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = - \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy$$

шәклиндә јазылар. Бурадан $\mu(y)$ интеграллајычы вуруғу тапылар:

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy}. \quad (11)$$

Бу һалда $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$ нисбәти x -дән асылы олмур.

Мисал 3. $3(1 + y^2)dx + 2xydy = 0$ тәңлијини һәлл етмәли. Бурада $M(x, y) = 3(1 + y^2)$ вә $N(x, y) = 2xy$ олдугундан

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 6y - 2y = 4y$$

олар вә әдһиндыр ки,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4y}{2xy} = \frac{2}{x}$$

хисбәти у-дән асылы деһилдир. Демәли, верилмиш тәһлијин интеграллајычы вуруғу аңчағ х-дән асылыдыр: $\mu = \mu(x)$. Онда (10) дүстуруна асасан интеграллајычы вуруғу тапмағ олар:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Тәһлијин һәр ики тәрәфһини тапдығымыз $\mu = x^2$ функциясына вурдугда там дифференциаллы тәһлик алыһыр:

$$3x^2(1+y^2)dx + 2x^3ydy = 0.$$

Бу тәһлијин үмуми интегралы (7) дүстуру илә тапыһыр:

$$\int_0^x 3x^2(1+y^2)dx + \int_0^y 0 dy = C \quad (x_0 = y_0 = 0),$$

$$x^3(1+y^2) = C.$$

§ 9. БИРТӘРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТӘҢЛИКЛӘРИН МӘХСУСИ НӨГТӘЛӘРИ ВӘ МӘХСУСИ ҺӘЛЛИ

Тутағ ки, тәрәмәјә нәзарән һәлл олунмуш бертәртибли

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

тәһлијин верилмишдир вә онун сағ тәрәфһиндәки $f(x, y)$ функциясы σ областында тәјһин олунмушдур.

σ областының даһили (x_0, y_0) нөгтәсинин һәр һансы әтрафында тәһлијин һәллиниң варлығы вә јекәнәлији һағғында Коши теореминин (§ 3) шәртләри (јәһни $f(x, y)$ функциясының кәсилмәзлији вә кәсилмәјән $f'_y(x, y)$ хусуси тәрәмәсинин варлығы) әдәннлirsә, һәмһин нөгтәјә (1) тәһлијинин дүзкүн нөгтәси дејилир. Тәһлијин дүзкүн нөгтәси үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли вар вә јекәнәдир. Башға сөзлә, тәһлијин һәр бир дүзкүн нөгтәсиндән јекәнә интеграл әјриси кечир.

σ областының сәрһәд нөгтәләринә вә һәм дә дүзкүн нөгтә олмајән даһили нөгтәләринә (1) тәһлијиниң мәхсуси нөгтәләри дејилир. Тәһлијин мәхсуси нөгтәси үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли ола да биләр, олмаја да биләр. (x_0, y_0) мәхсуси нөгтәси үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли, јәһни (1) тәһлијиниң $y|_{x=x_0} = y_0$ башланғыч шәртини әдәјән һәлли бир, чох вә һәтта сонсуз сәјдә ола биләр. Бу σ демәкдир ки, тәһлијин мәхсуси нөгтәсиндән интеграл әјриси кечә дә биләр (бир, чох вә һәтта сонсуз сәјдә), һеч бир интеграл әјриси кечмәјә дә биләр. Әкәр (x_0, y_0) мәхсуси нөгтәсиндән (1) тәһлијиниң бир нечә интеграл әјриси кечirsә, онда онларын һә-

мысының ејһи тохуһаны олмалыдыр (чүнки бунларын һәмһының бучағ әһсәли ејһи $y_0 = f(x_0, y_0)$ әдәдидир). Бу һалда һәмһин интеграл әјриләри (x_0, y_0) нөгтәсиндә бир-биринә тохунмалыдыр.

Верилмиш хәттиң бүтүн нөгтәләри дифференциал тәһлијин мәхсуси нөгтәләри олдугда она һәмһин тәһлијиниң мәхсуси хәтти дејилир.

Мәхсуси хәтт дифференциал тәһлијиниң интеграл әјрисини дә ола биләр. Әкәр интеграл әјрисиниң һәр бир нөгтәсиндә һәллини јекәнәлији позулурса, јәһни онун һәр бир нөгтәсиндән дифференциал тәһлијиниң әһ азы ики интеграл әјрисини кечirsә, онда она дифференциал тәһлијиниң мәхсуси интеграл әјрисини дејилир.

Графики мәхсуси интеграл әјрисини олан һәллә тәһлијиниң мәхсуси һәлли дејилир. Дедикләримиздән әдһиндыр ки, (i) тәһлијиниң мәхсуси һәллини тапмағ үчүн онун мәхсуси хәттини (сәрһәд нөгтәләри вә $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ функцияларының кәсилмә нөгтәләри чохлағуну) тапмағ, сонра исә һәмһин хәттиниң интеграл әјрисини олдуғуну вә онун һәр бир нөгтәсиндә һәллини јекәнәлијиниң позулдуғуну јохламағ ләзымдыр.

Дифференциал тәһлијиниң мәхсуси һәлли, үмумијјәтлә, онун үмуми һәллинә даһил дејилдир. Буна көрә дә әкәр һәлләрдә тәһлијиниң мәхсуси һәлли параметрин һеч бир гиймәтиндә онун үмуми һәллиндән алыһыр.

Мисал 1. $y' = \frac{y}{x}$ (2)

тәһлијиниң сағ тәрәфһи $f(x, y) = \frac{y}{x}$ вә онун хусуси тәрәмәси

$f_y(x, y) = \frac{1}{x}$ мүстәвиниң абсисини сыфьрдан фәргли олан бүтүн нөгтәләриндә кәсилмәјәндир. Демәли, бүтүн (x, y) ($x \neq 0$) нөгтәләри (2) тәһлијини үчүн дүзкүн нөгтәләрдир. Ординат охунун (јәһни, $x = 0$ дүз хәттинин) бүтүн нөгтәләри исә (2) тәһлијиниң мәхсуси нөгтәләридир.

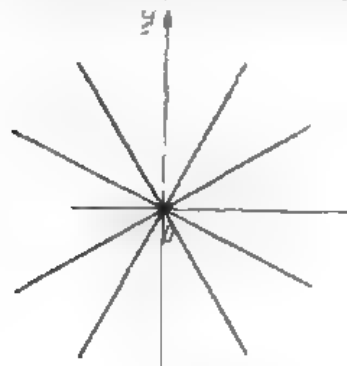
(2) тәһлијиниң үмуми һәлли $y = Cx$ функциясыдыр (бурада C ихтијари сабитдир). $x = 0$ мәхсуси хәттинин $(0, 0)$ нөгтәсиндән сонсуз сәјдә интеграл әјрисини (координат башланғычындан чыхан шүәләр) чыхыр, јердә гулан нөгтәләриндән исә һеч бир интеграл әјрисини чыхмыр. Бу һалда $(0, 0)$ мәхсуси нөгтәсинә дүзкүн нөгтәси дејилир (шәкил 242).

Мисал 2. $y' = 2\sqrt{y}$ (3)

тәһлијиниң сағ тәрәфһи $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ вә онун хусуси тәрәмәси $f'_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ јухары јарыммүстәвидә ($y > 0$) кәсилмәјәндир. јәһни јухары јарыммүстәвиниң бүтүн нөгтәләри (3) тәһлијиниң дүзкүн нөгтәләридир.

$y = 0$ дүз хәттинин бүтүн нөгтәләри тәһлијиниң мәхсуси нөгтәләридир. $y = 0$ мәхсуси хәтти (3) тәһлијиниң интеграл әјри-

сидир, чүнки $y=0$ функцијасы (3) тэнлијини өдәир. $y=0$ дүз хәттинин (абсис охунун) бүтүн нөггәләриндә һәллийн јекәналији позулур. Абсис охунун истәнилән $(x_0, 0)$ нөггәсиндән һәм тәнлијин

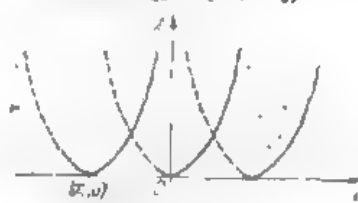


Шәкил 242

$$y = (x+C)^2 \quad (x > -C) \quad (4)$$

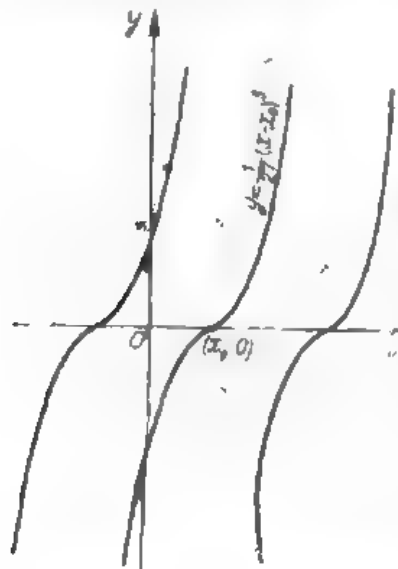
үмуми һәллиндән алынән ($C = -x_0$)

$$y = (x-x_0)^2 \quad (x > x_0)$$



Шәкил 243

хүсуси һәлли вә һәм дә $y=0$ һәлли кечир (шәкил 243). Демәли, $y=0$ һәлли (3) тәнлијинин мәхсуси һәллидир. Бу мәхсуси һәлл (4) үмуми һәллиндән C параметринин һеч бир гијмәтиндә алынмыр.



Шәкил 244

Јадда сахламаг лазымдыр ки, (4) параболаларынын аңчаг сағ голлары (3) тәнлијинин интеграл әјриләридир (һәмкин һиссәләрдә $y' > 0$ олур).

Мисал 3. $y' = y^{\frac{2}{3}}$ (5) тәнлијинин үмуми һәлли $y = \frac{1}{27} = (x+C)^3$ (C ихтијари сәбитдир) функцијасыдыр.

Догрудан да, $(y^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \cdot y' = 1$ оладуғундан (5) тәнлијини $(3y^{\frac{1}{3}})' = 1$ кийин јазмыг олар. Бурадағы $3y^{\frac{1}{3}} = x + C$, $27y = (x+C)^3$, $y = \frac{1}{27} (x+C)^3$ алымыр.

(5) тәнлијинин мәхсуси хәтти олан абсис оху һәмкин тәнлијини ејни заманда интеграл әјрисидир, чүнки $y=0$ функцијасы (5) тәнлијини өдәир. $y=0$ дүз хәттинин һәр бир нөггәсиндә һәллийн јекәналији позулур. Абсис охунун истәнилән $(x_0, 0)$

нөггәсиндән тәнлијин һәм $y = \frac{1}{27} (x-x_0)^3$ хүсуси һәлли вә һәм дә $y=0$ һәлли кечир (шәкил 244). Демәли, $y=0$ тәнлијин мәхсуси һәллидир.

Мисал 4.

$$y' = y^{\frac{2}{3}} + 2 \quad (6)$$

тәнлијинин мәхсуси хәтти абсис охудур. Мүстәвинин јердә галән бүтүн нөггәләри (6) тәнлијинин дүзкүн нөггәсиндир.

Бу һалда мәхсуси хәтт тәнлијини интеграл әјрисе дејиләдир. $y=0$ функцијасы тәнлији өдәмир.

§ 10. БИРПАРАМЕТРЛИ ӘЈРИЛӘР АНЛАСИНИН БҮРҮҖӘНИ ВӘ ТӘНЛИЈИН МӘХСУСИ ҺӘЛЛИНИН ТАПЫЛМАСЫ

1. Тутаг ки, мұәјјән областда ихтијари гијмәтләр ала билән C параметриндән асылы олан

$$F(x, y, C) = 0 \quad (1)$$

тәнлији верилмишдир. C параметринин көстәритән областдағы һәр бир гијмәтиндә (1) тәнлији $(0, x, y)$ мүстәвисиндә бир әјри тәјин едир. C параметрина мүмкүн олан бүтүн гијмәтләри вердикдә (1) тәнлији вәситәсилә тәјин олуған бүтүн әјриләр чохлауғу алымыр. Бу әјриләр чохлауғуна **бирпараметрли** ((1) тәнлијиндә бир дәнә C параметри иштирак едир) **әјриләр анласи**, (1) мүнәсибәтинә исә һәмкин **анлаһин тәнлији** дејиләдир.

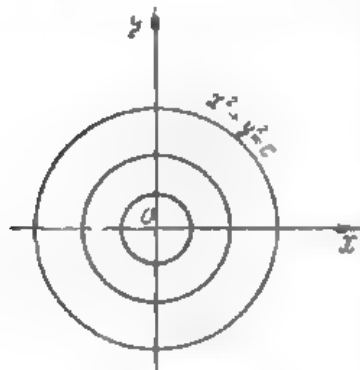


Шәкил 245

Тәјриф. Бирпараметрли әјриләр анлаһинин бүрүҗәни (гуршаҗаны) елә һамар L әјрисинә дејиләдир ки, о әлүнүн һәр бир нөггәсиндә анлаһин һеч олмаса бир әјрисинә тохунур вә һеч бир һиссәси анлаһин әјриләриндән бири илә үст-үстә функцијур. Бирпараметрли әјриләр анлаһинин бүрүҗәни ола да биләр, олмаса да биләр.

Мисал 1. $y = (x+C)^2$, $-∞ < C < ∞$ тәнлији вәситәсилә параболалар анлаһи тәјин олуныр. Бу анлаһин бүрүҗәни $y=0$ дүз хәттидир, јәъни абсис оху һәмкин параболалар анлаһинин бүрүҗәнидир (шәкил 245).

Мисал 2. $x^2 + y^2 = C$, $0 < C < \infty$ тәңлији вәситәсилә мәркәзи $(0, 0)$ нөгтәсиндә олаң концентрик чеврәләр аиләси тә'јин олу- нур (шәкил 246). Бу бирпара- метрли әјриләр аиләсиниң бүрү- јәни јохдур.



Шәкил 246

2. Фәрз едәк ки, (1) бирпара- метрли әјриләр аиләсиниң бү- рүјәни вардыр. Бүрүјәниң һәр бир нөгтәси (1) аиләсиниң бир әјрисини үзәриндә јерләшир. Бу әјрини үзәриндә исә (1) мүнәси- бәти өдәнилик (С-јини гејд олу- муш гијмәтиндә). Онда бүрүјә- ниң нөгтәләриндә дә (1) мүнә- сибәти өдәнилик.

Көстәрәк ки, бүрүјәниң нөг- тәләри

$$F'_x(x, y, C) = 0 \quad (2)$$

мүнәсибәтини дә өдәјир. Бу мәгсәдлә, гејд едәк ки, бүрүјәң үзрә һәрәкәт етдикдә С параметри дәјишир $C = C(x)$ ($C_x = C'(x) \neq 0$) вә буна көрә дә (1) бәрәбәрлијини x -ә нәзәрән („бүрүјәң үзрә“) дифференциалладыгда

$$F'_x + F'_y \cdot y'_{\text{бүр.}} + F'_C \cdot C'_x = 0 \quad (3)$$

алынар. Бу бәрәбәрликдә иштирак едән $y'_{\text{бүр.}}$ кәмијјәти бүрү- јәниң ихтијари (x, y) нөгтәсиндә бучаг әмсалыдыр. Бүрүјәң өзүнүн һәмий (x, y) нөгтәсиндә (1) әјриләр аиләсиниң бир хәттинә тохунур. Буна көрә дә оларын бучаг әмсаллары еј- ни олмадыдыр: $y'_{\text{бүр.}} = y'_{\text{хәт.}}$. Хәттин $y'_{\text{хәт.}}$ бучаг әмсалы (1) бә- рабәрлијини (гејд олуңмуш С үчүн) дифференциалламагла та- пылыр

$$F'_x + F'_y \cdot y'_{\text{хәт.}} = 0. \quad (4)$$

(3) вә (4) бәрәбәрликләринә әсасән $F'_C \cdot C'_x = 0$ олар. Бурадан $C'_x \neq 0$ олдугундан (2) бәрәбәрлијини алынар.

Беләликлә, биз көстәрдик ки, (1) аиләси бүрүјәликини нөг- тәләри

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0, \\ F'_C(x, y, C) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

тәңликләрини өдәјир. Бу системдән С параметрини јох етдик- дә $\Delta(x, y) = 0$ шәклиндә тәңлик алынар. (5) системиниң тә'јин етдији хәттә *дискриминант әјри* дејилир.

Нәзәрә алмаг лазымдыр ки, (1) аиләси әјриләриниң мәхсу- си нөгтәләри дә (5) системини өдәјир (әјриниң мәхсуси нөг- тәсини дифференциал тәңлијини мәхсуси нөгтәси илә гарышдыр-

маг олмаз!). Доғрудан да, $F(x, y, C) = 0$ аиләси әјриләриниң мәхсуси нөгтәләриндә $F'_x(x, y, C) = F'_y(x, y, C)$ бәрәбәрликлә- ри өдәнилик (XXVIII, § 2). Онда (3) бәрәбәрлијиндән јенә дә (2) мүнәсибәтиниң өдәниликә алынар.

Бурадан ајандыр ки, тапдығымыз дискриминант әјрисиниң бүтүн нөгтәләриндә $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 > 0$ мүнәсибәти өдәниликдә (5) системиниң тә'јин етдији әјри (1) аиләсиниң бүрүјәнидир вә (5) системиндән С параметрини јох етмәклә алынак $\Delta(x, y) = 0$ мүнәсибәти һәмий бүрүјәниң тәңлијидир.

Дискриминант әјрисиниң нөгтәләрин дә $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 = 0$ мүнәсибә- ти өдәниликдә исә $\Delta(x, y) = 0$ тәңлијини әјриләрини мәхсуси нөгтә- ләри чохлауғуну тә'јин едир, бу исә (1) аиләсиниң бүрүјәни ол- маја да биләр.

Мисал 3. Бирпараметрли $(x-C)^2 + y^2 - r^2 = 0$ әјриләр аилә- синиң бүрүјәнини тапмак.

Бурада $F(x, y, C) = (x-C)^2 + y^2 - r^2 = 0$ олдугундан $F'_C = -2(x-C)$ олар вә (5) система

$$\begin{cases} (x-C)^2 + y^2 - r^2 = 0, \\ -2(x-C) = 0 \end{cases}$$

шәклиндә јазылар. Бу системдән С параметрини јох етсәк, $y = \pm r$ тәңликләрини аларыг. Бу әјриләр, јәни $y = +r$ вә $y = -r$ лүз хәтләри үзәриндә

$$(F'_x)^2 + (F'_y)^2 = 4(x-C)^2 + 4r^2 > 0$$

мүнәсибәти өдәниликдәниңдән һәмий дүз хәтләр верилмиш чев- рәләр аиләсиниң бүрүјәни олар (шәкил 247).

3. Тутаг ки,

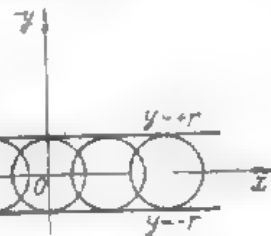
$$F(x, y, C) = 0$$

мүнәсибәти биртәртибли

$$y' = f(x, y) \quad (\text{вә ја } \Phi(x, y, y') = 0) \quad (6)$$

тәңлијиниң үшүн интегралыдыр. (1) тәңлијини бирпараметрли интеграл әјриләри аиләсини тә'јин едир. Әкәр (1) интеграл әјриләри аиләсиниң бүрүјәни варса, һәмий бүрүјәң (6) тәңли- јиниң мәхсуси һәллидир (мәхсуси интеграл әјрисидир).

Доғрудан да, (1) аиләсиниң бүрүјәни өзүнүн һәр бир (x, y) нөгтәсиндә һәмий аиләниң бир әјрисинә тохунур. Буна көрә дә һәмий нөгтәјә y' гун олаң x, y вә y' кәмијјәтләри (6) тәң- лијини өдәјир. Башта сөзлә, (1) аиләси бүрүјәниниң бүтүн нөгтә- ләри (6) тәңлијини өдәјир. Јәни бүрүјәң (6) тәңлијиниң интег- рал әјрисидир. Бу интеграл әјрисиниң бүтүн нөгтәләриндә һәллиң јекәнәлији поэулур. һәр бир нөгтәләң һәм бүрүјәң вә һәм дә (1) аиләсиниң һеч олмаҗа бир әјрисини кечир.



Шәкил 247

Демали, (1) интеграл әйреләри аиләсинин бүрүжәни (6) тәңлијинин мәхсуси һәллидир.

Беләликлә, јухарыда көстәрилән гәјдә илә верилмиш (6) дифференциал тәңлијинин үмуми интегралы (һәлли) мәлум ол дугда онун мәхсуси һәллини (әлбәттә, варса) тапмаг олар.

Мисал 4. $y' = y^{\frac{2}{3}}$ тәңлијинин мәхсуси һәллини тапмалы.

Бу тәңлијия үмуми һәлли $y = \frac{1}{27}(x+C)^3$ функцијасыдыр (§ 9, мисал 3) Интеграл әйреләри аиләсинин бүрүжәнини тапмаг үчүн

$$\begin{cases} y - \frac{1}{27}(x+C)^3 = 0, \\ -\frac{1}{9}(x+C)^2 = 0. \end{cases}$$

системиндән C параметрини јох едәк. Нәтичәдә $y=0$ бүрүжәни алыныр ки, бу да верилмиш тәңлијин мәхсуси һәллидир (шәкил 244).

§ 11. ТӨРӘМӘЈӘ НӘЗәрӘН ҺӘЛЛ ОЛУНМАМЫШ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИКЛӘРИН САДӘ НӨВЛӘРИ

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунамаш биртәртибли дифференциал тәңлик үмуми шәкилдә

$$\Phi(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

ким и јазылыр. Белә тәңликләри төрәмәјә нәзәрән һәлл олунамыш дифференциал тәңлик шәклиндә кәтирмәк чох вахт мүмкүн олмур.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунамаш дифференциал тәңликләрини һамысыны һәлл етмәк үчүн үмуми үсул көстәрмәк мүмкүн дејилдир. Лакин (1) тәңлијинин елә садә нөвләри вардыр ки, олары јени параметр дахил етмәклә һәлл етмәк мүмкүн олур. Бу заман тәңликләрин һәлли параметрик шәкилдә тапылыр.

Әввәлчә бир хүсуси һалә бахаг.

Тутаг ки, (1) тәңлији (Олу) мүстәвисинин һәр һансы облас-тында сонлу сәјдә гејри-ашкар

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

функцијаларныы тәјин едир. Мисәлән, (1) тәңлији y' -ә нәзәрән

$$(y')^m + p_1(x, y)(y')^{m-1} + \dots + p_{m-1}(x, y)y' + p_m(x, y) = 0$$

шәклиндә m дәрәжәли чохһәдлүдирсә нә бу чохһәдли y' -ә нәзәрән һәлл олуна билирсә, онда нәтичәдә m дәнә (2) шәклиндә бәрәбәрлик алынар.

(2) тәңликләринин үмуми һәлли ујғун олараг $F_1(x, y, C_1) = 0, F_2(x, y, C_2) = 0, \dots, F_m(x, y, C_m) = 0$ олсун. Бу үмуми һәлләр чохлугуна (1) тәңлијинин үмуми һәлли дејилдир. Вуну

бә'зән

$$F_1(x, y, C_1) \cdot F_2(x, y, C_2) \cdot \dots \cdot F_m(x, y, C_m) = 0$$

ким и јазырлар. Үмумилији азалтмадан бүтүн C_1, C_2, \dots, C_m параметрләрини бир C параметри илә авәз етмәк олар. Онда (1) тәңлијинин үмуми һәлли

$$F_1(x, y, C) \cdot F_2(x, y, C) \cdot \dots \cdot F_m(x, y, C) = 0 \quad (3)$$

шәклиндә алыныр.

Мисал 1. $y'^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0$ тәңлијини һәлл етмәли.

Бу тәңлик y' -ә нәзәрән квадрат тәңлик олдуғундан ону һәлл едәрәк,

$$y' = 2x \text{ вә } y' = y$$

тәңликләрини аларыг. Бу тәңликләрин үмуми һәлли исә ујғун олараг

$$y = x^2 + C, \quad y = Ce^x \quad (-\infty < C < \infty) \quad (4)$$

функцијаларыдыр. (4) һәлләри бирликдә верилмиш тәңлијин үмуми һәллиядир. Бу үмуми һәлли

$$(y - x^2 - C)(y - Ce^x) = 0$$

ким и бир бәрәбәрлик шәклиндә дә јазмаг олар.

Инди параметр дахилетмә үсулу илә һәлл олунаг бир сыра тәңлик нөвләринә бахаг.

$$I. y = f(y'). \quad (5)$$

Тәңлији һәлл етмәк үчүн $y' = p$ гебул едәк. Онда верилмиш тәңликдән $y = f(p)$ бәрәбәрлији алыныр.

Бурада p -ни парам тр һесаб едәк вә x дејишәнини p илә ифадә етмәјә чалышаг. Бу мөгсәдлә $y' = p$ бәрәбәрлијини

$dx = \frac{dy}{p}$ шәклиндә јазар вә алынкан бәрәбәрлији һиссә-һиссә интеграллама гәјдасыны тәтбиг етмәклә интеграллајаг:

$$x = \int \frac{dy}{p} + C = \frac{y}{p} + \int \frac{y dp}{p^2} + C = \frac{y}{p} + \int \frac{f(p) dp}{p^2} + C$$

вә ја

$$x = \frac{f(p)}{p} + \int \frac{f(p) dp}{p^2} + C.$$

Беләликлә, алынан

$$\begin{cases} y = f(p), \\ x = \frac{f(p)}{p} + \int \frac{f(p) dp}{p^2} + C \end{cases} \quad (6)$$

тәңликләр системи (5) тәңлијинин параметрик шәкилдә үмуми һәллиядир. (6) системиндән p параметрини јох етмәклә (5) тәңлијинин $F(x, y, C) = 0$ шәклиндә үмуми интегралы алыныр.

Мисал 2. $y = (y')^2 e^{y'}$ тәңлијини $y' = p$ параметрини дахил етмәклә һәлл едәк.

Бу халда $y = p^2 e^p$ барабарлигини ва ону дифференциалла-
матла $y' = (2pe^p + p^2 e^p) \frac{dp}{dx}$ мүнәсибәтини аларыг. Бурадан

$$dx = \frac{2pe^p + p^2 e^p}{p} dp, \quad x = \int (2e^p + pe^p) dp + C =$$

$$= e^p + pe^p + C.$$

Беләликлә, верилмиш тәклијин үмүми һәлли

$$\begin{cases} y = p^2 e^p, \\ x = e^p + pe^p + C \end{cases}$$

олар.

II. $x = f(p)$. (7)

Бу халда да $y' = p$ параметри көтүрүлүр вә x, y дәјишән-
ләрн p вә C вәситәсилә ифадә олуиур.

(7) тәклијиндән $x = f(p)$ барабарлији вә $y' = p$ мүнәсибә-
тиндән $dy = p dx$, $y = \int p dx + C$

$$y = px - \int x dp + C$$

вә ја

$$y = pf(p) - \int f(p) dp + C$$

алыныр. Демәли, (7) тәклијинин параметрик шәкилдә үмүми
һәлли

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = pf(p) - \int f(p) dp + C \end{cases}$$

олар. Бу системдән p параметрини јох етмәклә (7) тәклијинин
 $F(x, y, C) = 0$ шәкилдә үмүми интегралы алыныр

Мисал 3. $x = y' + \sin y'$ тәклијини һәлл етмәли. $y' = p$ гә-
бул етсәк, $x = p + \sin p$ вә $dx = (1 + \cos p) dp$ олар. $y' = p$
барабарлијиндән исә $dy = p dx = p(1 + \cos p) dp$ вә ја $y =$

$$= \int p(1 + \cos p) dp = \frac{p^2}{2} + p \sin p + \cos p + C$$

алыныр. Демәли, верилмиш тәклијин үмүми һәлли

$$\begin{cases} x = p + \sin p, \\ y = \frac{p^2}{2} + p \sin p + \cos p + C \end{cases}$$

олар.

III. Клеро тәклији.

x вә y дәјишәнләринә нәзәрән хәтти олан

$$y = y' x + \varphi(y') \quad (8)$$

тәклијинә Клеро¹ тәклији дејилір.

Бу тәклији һәлл етмәк үчүн јеңә дә көмәкчи $y' = p$ пара-
метри көтүрүлүр. Онда (8) тәклијинә әсасән

$$y = xp + \varphi(p) \quad (9)$$

¹ А л е к с и с К л е р о (1713—1765) Франса ријазикјатчысыдыр.

олар. Бу барабарлији дифференциалладыгда

$$y' = p + x \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dp}{dx}$$

вә ја

$$\frac{dp}{dx} [x + \varphi'(p)] = 0$$

алыныр. Бурадан өјдиндыр ки, ја

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad (10)$$

вә ја

$$x + \varphi'(p) = 0 \quad (11)$$

олмалыдыр.

(10) барабарлијиндән $p = C$ алыныр. Бу гијмәти (9) бара-
барлијиклә p -нин әвәзинә јаздыгда (8) тәклијинин

$$y = Cx + \varphi(C) \quad (12)$$

шәкилдә үмүми һәллини алырыг.

(11) вә (9) барабарликләрн бирликдә Клеро тәклијинин
параметрик шәкилдә һәллини тәјин едир:

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p), \\ y = xp + \varphi(p). \end{cases} \quad (13)$$

Бу әјри $\varphi''(p) \neq 0$ олдугда (12) бирпараметрик әјриләр
виләсинин бүрүјәдилір. Дифференциал тәклијин интеграл әјри-
ләри виләсинин бү үјәни исә һәмки тәклијин мәхсуси һәллидир
(§ 10, 3). Демәли, (13) һәлли Клеро тәклијинин мәхсуси һәл-
лидир.

(13) системиндән p параметрини јох етмәклә Клеро тәкли-
јинин $F(x, y) = 0$ шәкилдә мәхсуси һәлли алыныр.

Мисал 4. $y = xy' - y'^2$ тәклијинин үмүми һәлли

$$y = Cx - C^2 \quad (14)$$

олар. (14) бирпараметрик әјриләр виләсинин бүрүјәнини тапмаг
үчүн (14) барабарлијиндән C -јә нәзәрән төрәмә алаг:

$$x - 2C = 0, \quad C = \frac{x}{2}.$$

Бу гијмәти (14) барабарлијиндә C -нин јеринә јаздыгда ве-
рилмиш тәклијин мәхсуси һәлли вә ја (14) интеграл әјри-
ләринин бүрүјәни алыныр:

$$y = \frac{x^2}{4}$$

IV. Лагранж тәклији.

Клеро тәклијинин үмүмиләшмәси олан

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \quad (15)$$

тәклијинә Лагранж тәклији дејилір. $\varphi(y') = y'$ олдугда

Лагранж тэнлији Клеро тэнлижинэ ивирдир. Буна көрө, дэ $y' = u' + u'p$ олдуугуну габул едэк.

Лагранж тэнлији Клеро тэнлији кими һәлл олунур. $y' = p$ габул етдикдә, (15) тэнлији

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \quad (16)$$

шәклиндә јазылып. Бу бәрабәрлији x -ә нәзәрән диференциал-ладыгда

$$y' = \varphi(p) + x\varphi'(p) \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx}$$

вә ја $y' = p$ олмасындан истифадә етдикдә,

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} \quad x = \frac{\psi(p)}{p - \varphi(p)} \quad (17)$$

алыныр. (17) тэнлији x вә онун $\frac{dx}{dp}$ төрәмәсинә нәзәрән хәтти тәнликдир. Онун үмуми һәлли

$$F(x, p, C) = 0 \quad (18)$$

шәклиндә олар. (16) вә (18) тәнликләри бирдикдә Лагранж тәнлијиники үмуми һәллини параметрик шәкилдә тәјин едир:

$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p), \\ F(x, p, C) = 0. \end{cases}$$

Бу системдан p параметрини јох етдикдә Лагранж тәнлијиники $F_1(x, y, C) = 0$ шәклиндә үмуми интегралы алыныр.

Гејд едәк ки, јухарыда тәғбиг етдијимиз параметр дахил-етмә үсулу илә

$$x = f(y, y'), \quad y = f(x, y'), \dots$$

вә с. и. кими тәнликләри төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнлијә кәтирәрәк һәлл етмәк олар.

XXXI Ф А С И Л

ЛУКСӘКТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

§ 1. ҮМҮМИ АНЛАҖЫШЛАР ВӘ ТӘКЛИФЛӘР

Тәртиби бирдән бәјүк олан

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

шәклиндә тәнлијә јүксәктәртибли диференциал тәнлик дејилер. (1) тәнлији n -тәртибли диференциал тәнликдир (XXX, § 1). Бу тәнлији n -тәртибли $y^{(n)}$ төрәмәсинә нәзәрән һәлл етмәк мүмкүн олдугда јүксәктәртибли төрәмәјә нәзәрән һәлл олун-муш

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

тәнлији алыныр.

Виртәртибли диференциал тәнликләр кими јүксәктәртибли диференциал тәнликләрин дә, үмумијјәтлә, чох вә һәтта сон-суз сәјлә һәлли вардыр. Бу һәлләрин графикари диференциал тәнлијини интеграл әјриләри адланыр.

(1) вә ја (2) тәнлијиники верилимш нөгтәдә кечән мүәјјән интеграл әјрисини тапмағ үчүн әлавә шәртләр верилмәлидир. Бу шәртләр мүхтәлиф формаларда верилә биләр.

Әлавә шәртләр ахтарылан функцијанын һәр һансы парча-нын үч нөгтәләриндә вә ја мүәјјән сәјдә дахили нөгтәләриндә гијмәтләри кими верилә биләр. Бу һалда, диференциал тәнли-јини белә шәртләри едәјән һәллини ахтарылмасына *сәрһәд мәсәләси* дејилер.

Әлавә шәртләр ахтарылан функцијанын вә онун төрәмә-ләриники һәр һансы бир нөгтәдә гијмәтләри кими верилдикдә диференциал тәнлик үчүн Коши мәсәләси алыныр.

n -тәртибли диференциал тәнликләр үчүн Коши мәсәләси белә гојулур: (1) вә ја (2) тәнлијиники верилимш $x = x_0$ нөгтәсиндә

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y'_0, \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad (3)$$

шәртләрини едәјән $y = y(x)$ һәллини тапмалы.

Бу һалда $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ әдәдләри һәллини башлан-ғыч гијмәтләри вә ја башланғыч шәртләри адланыр. (1) (вә ја (2)) тәнлијиники $y = \varphi(x)$ һәлли

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (4)$$

бәрабәрликләрини едәдикдә, дејирләр ки, һәмин һәлл верил-миш $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ башланғыч шәртләрини (вә ја баш-ланғыч гијмәтләрини) едәјир.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш n -тәртибли (2) диферен-циал тәнлијиники верилимш башланғыч шәртләри едәјән һәл-лини варлығы вә јекәнәлији үчүн кафи шәрт ашағыдакы тео-ремдә көстәрилер.

Коши теорема. *Тутаг ки, $(n+1)$ -бәјүмәли $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ функцијасы $(n+1)$ -өлчүлү фазанын һәр һансы α областында кәсимәјәндир, $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ бәјүмәлиләрини нәзәрән кәсимәјән x сүси төрәмәләри вардыр вә $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \alpha$. Онда (2) тәнлијиники мүәјјән $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) интервалында тәјин олунмуш вә (4) башланғыч шәртләрини едәјән јекәнә $y = y(x)$ һәлли вар.*

Гејд едәк ки, $n > 1$ олдугда (2) тәнлији үчүн Коши мәсә-ләси һәллини јекәнәлији һеч дә мүстәвини верилимш (x_0, y_0) нөгтәсиндән јекән интеграл әјрисиники кечдијини көстәр-

мир. Мәсалән, $n = 2$ олдугда (2) тәнлијинин x_0, y_0, y'_0 башлангыч шартлари өдәјән һәллини јекәнә олмасы о демәклир ки, верилмиш (x_0, y_0) нөгтәсиндән тохунанынын бучаг әмсалы y_0 олан јекәнә интеграл әјриси кечир. Әлбәттә, бу һалда (x_0, y_0) нөгтәсиндән тохунанынын бучаг әмсалы башга әдәдләр олан сонсуз сәјдә интеграл әјриләри дә кечә биләр.

Коши теореминдән ајдындыр ки, (2) тәнлијинин сонсуз сәјдә һәлли явр. Верилмиш башлангыч гијмәтләрин x_0 әдәдини сабит һесаб едәрәк, $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ әдәдләрини мүүјән областда дәјишдирсәк (әлбәттә, $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ нөгтәси Коши теореминдә көстәрилән о областында галмаг шәрти илә), онда һәр бир $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ әдәдләр системинә (2) тәнлијинин бир

$$y = \varphi(x, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$$

һәлли ујгун олар. Бурада $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ әдәдләрини ујгун олараг C_1, C_2, \dots, C_n илә әвәз етдикдә (2) тәнлијинин

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (5)$$

һәлли алыныр. Бу һәлл n дәнә ихтијари C_1, C_2, \dots, C_n параметриндән асылыдыр. Она (2) тәнлијинин үмуми һәлли дејиләр.

Даһа дәгиг, (2) тәнлијинин ихтијари C_1, C_2, \dots, C_n параметриндән асылы олан $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ һәллине о заман һәмни тәнлијин үмуми һәлли дејилир ки, һәмни һәлдән C_1, C_2, \dots, C_n параметрләринә мүүјән $[C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0]$ гијмәтләрини вермәклә истәнидән $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ башлангыч шәртини (әлбәттә, $(x, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in o$ олмалыдыр) өдәјән

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0) \quad (6)$$

һәллини алмаг мүмкүн олсун.

(2) тәнлијинин үмуми һәлли

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (7)$$

тәнлијин яситәсилә гејри-ашкар шәкилдә тәјини олундугды она тәнлијин үмуми интегралы дејилир.

Дифференциал тәнлијин (5) үмуми һәллиндән C_1, C_2, \dots, C_n параметрләринә мүүјән $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ гијмәтләри вермәклә алынак (6) функцијасына һәмни тәнлијин хусуси һәлли дејилир. $F(x, y, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0) = 0$ мүнәсибәти исә дифференциал тәнлијин хусуси интегралы адланыр.

Һәндәси олараг үмуми һәлл (вә ја үмуми интеграл) n параметрдән асылы олан интеграл әјриләри аиләсиндән ибарәтдир. Бу аиләнин һәр бир әјриси дифференциал тәнлијин бир хусуси һәллини (хусуси интегралынын) графиги олар.

Јүксәктәртибли дифференциал тәнликләр нәзәријәсинин әсас мәсәләси верилмиш дифференциал тәнлијин бүтүн һәлләрини тапмаг вә онларын хәсәләрини өјрәнмәклир. Јүксәктәртибли

дифференциал тәнликләрин һәлл едилмә мәсәләси биртәртибли тәнликләрин һәллиндән нисбәтән чәтин вә мурәккәбдир. Бир сыра јүксәктәртибли дифференциал тәнликләр тәртиби азалдылараг, нисбәтән ашағы тәртибли дифференциал тәнлијә кәтирилмәклә һәлл олунур.

§ 2. ТӘРТИБИ АЗАЛДЫЛА БИЛӘН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Бурада тәртиби азалдыла билән бир сыра јүксәктәртибли дифференциал тәнликләрин һәлли өјрәтилир.

$$1. y^{(n)} = f(x). \quad (1)$$

Бу тәнлијин үмуми һәллини тапмаг үчүн $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ олдугуну нәзәр алаг вә онун һәр икк тәрәфини ихтијари $[x_0, x]$ парчасы үзрә интеграллајаг:

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 + C_1$$

(C_1 ихтијари сабитдир). Алынак бәрәбәрлији јенидән интегралласаг,

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^x dx_1 \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 + C_1(x - x_0) + C_2$$

олар Бу интеграллама әмәлини јенидән $(n - 2)$ дәфә тәкрар етдикдә

$$y(x) = \int_{x_0}^x dx_1 \int_{x_0}^{x_1} \dots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n + C_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n \quad (2)$$

алыныр. Бурада C_1, C_2, \dots, C_n ихтијари сабитләрдир.

(1) тәнлијинин истәнилән $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ башлангыч шәртини өдәјән һәллини алмаг үчүн (2) һәллиндә

$$C_n = y_0, C_{n-1} = y'_0, \dots, C_1 = y_0^{(n-1)}$$

көтүрмәк кифәјәтдир:

$$y(x) = \int_{x_0}^x dx_1 \int_{x_0}^{x_1} \dots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n + y_0^{(n-1)} \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + y'_0(x - x_0) + y_0$$

Бурадан ајдындыр ки, (2) ифадәси (1) тәнлијинин үмуми һәллидир.

Хусуси һалда, (1) тәнлијинин $x_0, 0, 0, \dots, 0$ башлангыч шәртләрини өдәјән һәлли

$$y(x) = \int_{x_0}^x dx_1 \int_{x_0}^{x_1} \dots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \quad (3)$$

олар. Јохамгг олар ки,

$$y^{(n)}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (4)$$

функцијасы да (1) тәлијинин $x_0, 0, 0, \dots, 0$ башлангыч шәртләрини өдәјән һәллидир. Коши теореминә кәрә (1) тәлијинин $x_0, 0, 0, \dots, 0$ башлангыч шәртики өдәјән һәлли јекәлә олмалыдыр:

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (5)$$

Бу дүстурә Коши оүстурӯ дејилир.

Мисал 1. $y' = e^x$ тәлијинин үмуми һәллини нә

$$y(0) = 3, y'(0) = 2 \quad (6)$$

башлангыч шәртләрини өдәјән хусуси һәллини тапмалы.

Тәлији ардыңыл интегралламагла

$$y'(x) = \int_0^1 e^x dx + C_1 = e^x + C_1,$$

$$y(x) = \int_0^1 (e^x + C_1) dx + C_2 = e^x + C_1 x + C_2$$

вә ја $y(x) = e^x + C_1 x + C_2$ аларыг. Бу верилмиш тәлијин үмуми һәллидир.

Верилән (6) башлангыч шәртләринә җәсәсән C_1 вә C_2 сабитләри тәјини олуна биләр:

$$\begin{aligned} 3 &= y(0) = C_2 + 1, C_2 = 2, \\ 2 &= y'(0) = 1 + C_1, C_1 = 1. \end{aligned}$$

Беләликлә, верилмиш тәлијини (6) башлангыч шәртләрини өдәјән һәлли

$$y = e^x + x + 2$$

олар

$$II. F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (7)$$

$y^{(n)}$ z әвәзләмәси вәситәсилә (7) тәлијинин тәртиби k гәдәр азалыр. Догрәдан да,

$$y^{(k+1)} = z', \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

олдугундан (7) тәлијини $(n-k)$ тәртибли

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \quad (8)$$

тәлијинә кәтирилир.

Фәрз едәк ки (8) тәлијинин

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

шәклиндә үмуми һәлли тапылмышдыр. Бурада z әвәзинә $y^{(k)}$ јазмагла, (1) шәклиндә

$$y^{(n)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

гәлији алынар. Бу тәлијини үмуми һәлли исә јухарыда кәстәрилән гәјдә илә тапылыр.

$$y = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Мисал 2. $y'' - y' = 0$ тәлијини $y'' = z$ әвәзләмәси вәситәсилә $z' - z = 0$ тәлијинә кәтирилир. Ахырынчы тәлијини үмуми һәллини тәла

$$z' = z, \frac{dz}{z} = dx, \ln|z| = x + \ln|C_1|,$$

$$z = C_1 e^x.$$

Бурадан

$$y' = C_1 e^x$$

гәлији алынар. Онуи үмуми һәлли

$$y = C_1 e^x + C_2 x + C_3$$

олар.

$$III. F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (9)$$

Белә тәликләрини тәртибинин $y' = p$ әвәзләмәси вәситәсилә бир вәһид азалтаг мүмкүндүр. Бу мөгәддә y -и сәрбәст дәјишән вә ја аргумент, p -ни исә y -ин функцијасы $p(y)$ һесаб етмәк лазымдыр. Онда y -ни x -ә нәзәрән төрәмәләрини p -нин y -ә нәзәрән төрәмәләри илә ифадә етмәк мүмкүн олур

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dy} \left(p \frac{dp}{dy} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2.$$

Бурадан ајдыңдыр ки, $\frac{d^k y}{dx^k}$ төрәмәси p -нин y -ә нәзәрән тәртиби $(k-1)$ -дән бөјүк олынјаи төрәмәләри вәситәсилә ифадә олунур. Бу гәјмәтләри (9) тәлијиндә јеринә јазлыгда p -нин y -ә кәрә төрәмәләринә нәзәрән $(n-1)$ -тәртибли тәликлә алынар:

$$F_1 \left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}} \right)$$

Алынмыш тәлијини үмуми интегралы

$$\Phi_1(y, p, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0$$

оларса, онда (9) тэнлигийн үмүм интегралыны тапмаг үчүн биртәртибли

$$\Phi_1 \left(y, \frac{dy}{dx}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1} \right) = 0$$

тэнлигийн һәлл етмәк лазымдыр.

Мисал 3. $\frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$ тэнлигийн һәлл етмәли.

$$\frac{dy}{dx} = p \text{ габул етдикдә } \frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy} \text{ олур. Онда верилмиш}$$

тәнлик дәјишәнләрина аҗрылан $p \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$ тэнлигинә чеврил.

Бунун үмүм һәлли $p = C_1 e^y$ олар. Бурадан верилмиш тәнлигин үмүм һәлли тапылыр:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^y, e^{-y} dy = C_1 dx,$$

$$-e^{-y} = C_1 x + C_2.$$

IV. Ола биләр ки,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (10)$$

тәнлигийн сол тәрәфи бир

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

шәклиндә ифадәнин там дифференциалдыр:

$$d\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = (x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx.$$

Онда (10) тәнлигийн

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан $(n-1)$ -тәртибли

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1$$

дифференциал тәнлиги алыныр. Буна (10) тәнлигийн биринчи интегралы дејил.

Демәли, сол тәрәфи там дифференциал олан тәнлигин биринчи интегралыны тапмагла онун тәртибинин бир ваһид азалтмаг мүмкүн олур.

Мисал 4. $xy'' + y' = 0$ тәнлигийн сол тәрәфи xy' ифадәсинин там дифференциалдыр. Буна көрә дә һәмкин тәнлиги $d(xy') = 0$ кими јазмаг олар. Бурадан верилмиш тәнлигин $xy' = C_1$ шәклиндә биринчи интегралы алыныр.

$xy' = C_1$ тәнлигин һәлл етмәклә верилмиш тәнлигин $y = C_2 \ln x + C_3$ үмүм һәлли тапылыр.

§ 3. ХӘТТИ БИРЧИНСЛИ ТӘНЛИКЛӘР

Јүксәктәртибли дифференциал тәнликләрин ән јакшы өјрәтилиш вә мүкәммәл нәзәријәси олан нөвү хәтти дифференциал тәнликләрдир. Хәтти дифференциал тәнликләрин бир чох

тәтбигләри вардыр. Елм вә техниканын бир чох мәсәләләринин һәлли онларын интегралланмасына кәтирилир.

Тәриф. Мәчхул y функцијасы вә онун $y', y'', \dots, y^{(n)}$ тәрәзәләрина нәзәрән бирдәрчәли олан n -тәртибли дифференциал тәнлијә, јә'ни

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \quad (1)$$

шәклиндә олан тәнлијә n -тәртибли хәтти дифференциал тәнлик дејил.

$a_0(x) \neq 0$ олдугда (1) тәнлигинин һәр ики тәрәфини $a_0(x)$ функцијасына бөлмәклә ону

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x) \quad (2)$$

шәклинә кәтирмәк олар. Бу тәнликдә иштирак едән $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$ функцијалары мѳәјјән (a, b) интервалында кәсимәз һесаб олунур.

(2) тәнлигинин сағ тәрәфиндә дуран $f(x)$ функцијасына тәнлигин сағ тәрәфи дејил.

$f(x) \neq 0$ олдугда (2) тәнлигинә n -тәртибли хәтти бирчинсли олмајан (вә ја сағ тәрәфи) дифференциал тәнлик дејил. $f(x) = 0$ олдугда исе она, јә'ни

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0 \quad (3)$$

тәнлигинә n -тәртибли хәтти бирчинсли (вә ја сағ тәрәфи) дифференциал тәнлик дејил.

Ајдымыр ки, $p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$ функцијалары (a, b) интервалында кәсимәјән олдугда верилмиш $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ ($a < x_0 < b$) башлангыч гијәтләринин тәјин етдији $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ нөгтәсинин истәниләк әтрафында (2) вә (3) тәнликләри үчүн һәлли варлыгы вә јекәнәлији һәггында Коши теореминин (4) шәртләри өдәнилир. Буна көрә дә (2) вә (3) хәтти тәнликләринин мѳәјјән $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) интервалында тәјин олунмуш вә $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ башлангыч шәртләрини өдәјән јекәнә $y = y(x)$ һәлли вар. Инди хәтти бирчинсли дифференциал тәнликләрин һәллинин хәссәләрини өјрәнәк.

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y \quad (4)$$

ифадәсинә хәтти дифференциал оператор дејил.

$L[y]$ ифадәсинин алыаг үчүн хәтти дифференциал

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + p_n(x)$$

оператору $y = y(x)$ функцијасына тәтбиг едил.

Бу вахт $\frac{d^k}{dx^k} y = \frac{d^k y}{dx^k}$ вә $p_k(x) \frac{d^k}{dx^k} y = p_k(x) \frac{d^k y}{dx^k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$)

олдугу нәзәрә алынмалыдыр.

А) диндыр ки, (4) хэтти дифференциал оператору наситәсилә n -чи тәртибдән дифференциалланган һәр бир $y(x)$ функциясина бир $L[y] = \varphi(x)$ функциясны гаршы гоюлур. Мәсәлән, $L[y] = y'' + 3xy' + x^2y$ олдура.

$$L[x^2] = 2 + 6x^2 + x^4, L(e^x) = e^x(1 + 3x + x^2),$$

$$L[x + 1] = 3x + x^2 + x^2$$

вә с. олур. (4) мүнәсибәтиндән истифада едәрәк, (3) хэтти бир-чинсли тәнлијини

$$L[y] = 0 \quad (5)$$

шаклинда јазмаг олар.

Хэтти дифференциал операторларын әсас ики хәссәси бардыр.

I. Сабит нуругу хэтти дифференциал оператор ишарәси хә-ричине чыхармаг олар:

$$L[Cy] = CL[y].$$

Догрудан да,

$$L[Cy] = (Cy)^{(n)} + p_1(x)(Cy)^{(n-1)} + \dots + p_n(x)(Cy) = \\ = C[y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y] = CL[y].$$

Бу хәссәја хэтти операторун *бирчинслилик хәссәси* дејилер.

II. Ики функция чәминин хэтти оператору топланларын хэтти операторлары чәминә сәрабәрдыр, јәни n -чи тәртибдән дифференциалланган ихтијари y_1 вә y_2 функциялары үчүн

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

бәрабәрлији догрудур.

Догрудан да,

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + \\ + p_n(x)(y_1 + y_2) = [y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_1] + \\ + [y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_2] = L[y_1] + L[y_2].$$

Бу хәссәја хэтти операторун *аддитивлик хәссәси* дејилер.

Бу ики хәссәдән ајдылдыр ки, хэтти дифференциал L опера-тору ихтијари C, C_1, \dots, C_n сабитләри вә y, y_1, \dots, y_n функ-сиялары үчүн

$$L\left[\sum_{k=1}^n C_k y_k\right] = \sum_{k=1}^n C_k L[y_k] \quad (6)$$

бәрабәрлијини өдәјир.

Хэтти дифференциал операторун хәссәләринә әсасән хэтти бирчинсли (5) тәнлијинин һәлли һаггында ашағыдакы тәклиф-ләри сөјләмәк олар

Теорем 1. $y_1 = y_1(x)$ функциясны (5) тәнлијинин һәллидирсә вә C ихтијари сабитдирсә, онда Cy_1 функ-сиясы да һәмин тәнлијин һәллидир.

Исбаты. Шәртә кәрә $L[y_1] = 0$ мүнәсибәти өдәнилер. Онда L операторунун I хәссәсинә әсасән ихтијари C үчүн

$$L[Cy_1] = CL[y_1] = 0$$

олар.

Теорем 2. $y_1 = y_1(x)$ вә $y_2 = y_2(x)$ функциялары (5) тәнлијинин һәллидирсә, онларын $y_1 + y_2$ чәми да һәмин тәнлијин һәллидир.

Исбаты. Шәртә кәрә $L[y_1] = 0$ вә $L[y_2] = 0$ мүнәсибәт-ләри өдәнилер. Онда L операторунун II хәссәсинә кәрә

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0.$$

Нәтичә. Әкәр y_1, y_2, \dots, y_n функциялары (5) тәнлијинин һәллидирсә, онда онларын ихтијари C_1, C_2, \dots, C_n әмсал-лы

$\sum_{k=1}^n C_k y_k$ хэтти комбинасиясы да һәмин тәнлијин һәл-лидир.

Мә'лумдур ки, n -тәртибли дифференциал тәнлијини үмуми һәлли n дәнә ихтијари C_1, C_2, \dots, C_n параметриндән асылы олур (§ 1). Әкәр y_1, y_2, \dots, y_n функциялары n -тәртибли (5) хэтти тәнлијинин һәллидирсә, онда нәтичәјә кәрә n дәнә ихти-јари C_1, C_2, \dots, C_n параметриндән асылы олар

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (7)$$

хэтти комбинасиясы да һәмин тәнлијин һәллидир.

(7) функцияснын (5) хэтти тәнлијинини үмуми һәлли олма-сы һаггында нә демәк олар? (7) функциясны (5) тәнлијинини үмуми һәлли ола да биләр, олмаја да биләр. Бу мәсәләнни һәлли y_1, y_2, \dots, y_n функциялары системинин хэтти асылы олуб-олмамасындан асылдыр.

§ 4. ФУНКЦИЈАЛАР СИСТЕМИНИН ХЭТТИ АСЫЛЫЛЫГЫ ВӘ ВРОНСКИ ДЕТЕРМИНАНТЫ

Векторларын вә хэтти фәза элементләринин хэтти асылы-лыгы мәсәләси әвәлләр (III, IV, § 3) өјрәнилишдир.

Бурада (a, b) интервалында тәјин олунмуш $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялары системинин хэтти асылылыгы тәдгиг олунур.

Тә'риф 1. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцияларына (a, b) интервалында хэтти асылы функциялар дејилер ки, һеч олмаса бири сифырдан фәргли олар вә (a, b) интервалында

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) \equiv 0 \quad (1)$$

ејилилијини өдәјән һәгиги $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ өдәдләри олсун. Әкәр (1) ејилилији јалмыз $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ олдуға өдәнидирсә, онда $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцияларына (a, b) интервалында хэтти асылы олмајан функциялар дејилер.

Верилмиш $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцияларынын бири ејиликлә сифра бәрабәр олдуға һәмин функциялар һәмишә хэтти асылы олар.

Догрудан да, $y_k(x) \equiv 0$ оларса, онда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0, \lambda_k \neq 0$ әмсаллары үчүн (1) ејилилији өдә-

нилар. Верилмиш $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцијалары системини һәр һаясы айт һиссәси хәтти асылы олдугда, һәмни функцијалар системидә хәтти асылы олар. Хәтти асылы олмајан $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцијалары системиники истәнилән айт һиссәси исә хәтти асылы олмајандыр.

Хәтти фәза элементләриники хәтти асылы олмасы һаггында китабын биринчи һиссәсиндә (IV, § 3) исбат олунмуш теоремдән ашағыдакы нәтичә алыныр:

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцијаларынын (a, b) интервалында хәтти асылы олмасы үчүн онлардан бириники галанларынын хәтти комбинасијасы олмасы зарури вә кафи шәртдир.

Мисал 1. $y_1(x) = 1, y_2(x) = \sin^2 x, y_3(x) = \cos^2 x$ функцијалары истәнилән (a, b) интервалында хәтти асылыдыр.

Догрудан да, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ вә $\lambda_3 = -1$ әдәлләри үчүн истәнилән (a, b) интервалында

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \lambda_3 y_3(x) = 1 - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

ејилији өдәнилик.

Мисал 2. $y_1(x) = 1, y_2(x) = x, y_3(x) = x^2, \dots, y_n(x) = x^{n-1}$ функцијалары бүтүн әдәд охунда хәтти асылы дејилдир (n истәнилән натурал әдәддир).

Догрудан да, һеч олмаса бир әмсалы сыфырдан фәргли олан вә дәрәжәси $(n-1)$ -к ашмајан

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \dots + \lambda_n x^{n-1}$$

чоххәддисиники $(n-1)$ -дән чох сыфры (көкү) ола билмәз (XVIII, § 7, 8). Буна көрә дә

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \dots + \lambda_n x^{n-1} = 0$$

ејилији јалныз $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ олдугда мүмкүндүр. Јәһин $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$

функцијалары бүтүн әдәд охунда хәтти асылы дејилдир.

Мисал 3. $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}$ вә $y_3(x) = \sinh x$ функцијалары бүтүн әдәд охунда хәтти асылыдыр.

Догрудан да, y_3 функцијасы y_1 вә y_2 функцијаларынын хәтти комбинасијасы шәклиндә көстәрилә билир:

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Тутыг ки, (a, b) интервалында тәјин олунмуш $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцијалары һәмни интервалда $(n-1)$ -чи тәртибдән диференциалланандыр. Һәмни функцијалар вәсәтәсилә дүзәлдилмиш n -тәртибли

$$W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (2)$$

детерминантына $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцијаларынын Вронски¹ детерминанты вә јв вронскианы дејилир.

Теорем 1. (a, b) интервалында хәтти асылы олан y_1, y_2, \dots, y_n функцијаларынын Вронски детерминанты һәмни интервалда ејниликлә сыфра барабәрди.

Исбаты. y_1, y_2, \dots, y_n функцијалары (a, b) интервалында хәтти асылы олдуғундан һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан елә $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәлләри вар ки, һәмни интервалда

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad (1)$$

ејилији өдәнилик. (1) ејилијиники $(n-1)$ дәфә ардычыла диференциалладыгда

$$\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + \dots + \lambda_n y_n'(x) = 0,$$

$$\lambda_1 y_1''(x) + \lambda_2 y_2''(x) + \dots + \lambda_n y_n''(x) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$$

мүнәсибәтләри глыныр. Бу мүнәсибәтләр көстәрир ки, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәлләри n -мәчһуллау n хәтти бирчинсли

$$\begin{cases} y_1(x)z_1 + y_2(x)z_2 + \dots + y_n(x)z_n = 0, \\ y_1'(x)z_1 + y_2'(x)z_2 + \dots + y_n'(x)z_n = 0, \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x)z_1 + y_2^{(n-1)}(x)z_2 + \dots + y_n^{(n-1)}(x)z_n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

тәңликләр системиники (z_1, z_2, \dots, z_n) мәчһуллаардыр) сыфырдан фәргли һәллидир ((3) системиники өдәјән $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәлләриники һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир). Сыфырдан фәргли һәлли олаж хәтти бирчинсли (3) тәңликләр системиники детерминанты сыфра барабәр олмалыдыр (II, § 3). (3) системиники детерминанты исә y_1, y_2, \dots, y_n функцијаларынын вронскианыдыр. Демәли, хәтти асылы олан y_1, y_2, \dots, y_n функцијаларынын Вронски детерминанты (a, b) интервалынын истәнилән нөгтәсиндә сыфра барабәрди.

Нәтичә. (a, b) интервалынын һеч олмаса бир нөгтәсиндә Вронски детерминанты сыфырдан фәргли олан y_1, y_2, \dots, y_n функцијалары һәмни интервалда хәтти асылы дејилдир.

Ҷәдә едәк ки, верилмиш функцијалары Вронски детерминантынын ејниликлә сыфра барабәр олмасы онлары хәтти асылы олмасы үчүн зарури шәрт олдуғу һалда кафи дејилдир.

Мисал 4.

$$y_1 = \begin{cases} x^2, & x > 0 \text{ олдугда} \\ 0, & x < 0 \text{ олдугда} \end{cases} \quad \text{вә} \quad y_2 = \begin{cases} 0, & x > 0 \text{ олдугда} \\ x^2, & x < 0 \text{ олдугда} \end{cases}$$

¹ Јузеф Вронски (1775—1853) Польша рәјәсјијатчысыдыр.

Функцияларынын Вронски детерминанты бүтүн эдэд охунда еңиликлә сыфра барабардир.

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Һәким һәмийн функциялар хәтти асылы дејилдир.

Бунунда белә, әкәр $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ функциялары хәтти бирчинсли

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (4)$$

тәңлијинин һәллидирсә, онда онларын хәтти асылы олмасы һаггында теоремдә көстәрилән зәрури шәрт еңи заманда кафи олур.

Теорем 2. (4) тәңлијинин әмсаллары (a, b) интервалында кәсимләјәндирсә вә онун y_1, y_2, \dots, y_n һәлләринин $W(x)$ вронскианы һәмийн интервалын һеч олмасы бир x_0 нөгтәсиндә сыфра чеврилсә $W(x_0) = 0$, онда y_1, y_2, \dots, y_n функциялары (a, b) интервалында хәтти асылыдыр.

Исбаты $y_k (k = 1, 2, \dots, n)$ функциялары вә онларын (n-1)-чи тәртибә гәдәр тәрәмәләринин x_0 нөгтәсиндәки гиймәтләри вәситәсилә намәлум C_1, C_2, \dots, C_n кәмијәтләринә нәзәрән ашагыдакы n хәтти тәңликләр системинә бахаг:

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) &= 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Бу системин детерминанты y_1, y_2, \dots, y_n функциялары вронскианынын x_0 нөгтәсиндә $W(x_0) = 0$ гиймәтинә барабардир. Детерминанты сыфыр олан хәтти бирчинсли тәңликләр системинин сыфырдан фәргли һәлли вар (II, § 3). Бу һәлләр ин бирини $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ ялә ишарә едәк вә

$$y = \varphi(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + \dots + C_n^{(0)} y_n(x) \quad (6)$$

кимин функция дүзәлдәк. y_1, y_2, \dots, y_n функциялары (4) тәңлијинин һәлли олдуғундан онларын хәтти комби асиясы олан (6) функциясы да һәмийн тәңлијини һәллидир (§ 3). $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ әдәдләр системи (5) тәңликләр системинин һәлли олдуғундан (6) функциясы үчүн

$$\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0, \varphi''(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (7)$$

шәртләри өдәнидир. Јәни (4) хәтти тәңлијинин (6) һәлли (7) башлангыч шәртләрини өдәјир. (7) башлангыч шәртләрини (6) һәллиндән башга (4) тәңлијинини һәлли олан $y = 0$ функциясы да өдәјир. һәллиин варлығы вә јеканәлији теореминә кәрә (4) тәңлијинин (7) башлангыч шәртләрини өдәјән һәлли јеканә

олмалыдыр. Демәли, һеч олмасы бири сыфырдан фәргли олан $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ әдәдләри үчүн

$$C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + \dots + C_n^{(0)} y_n(x) = 0$$

олар ки, бу да y_1, y_2, \dots, y_n функцияларынын хәтти асылы олдуғуну көстәрир.

Һәтичә 1. Хәтти бирчинсли (4) тәңлијинин y_1, y_2, \dots, y_n хәсуси һәлләри (a, b) интервалында хәтти асылы олмадыгда онларын $W(x)$ вронскианы һәмийн интервалын һеч бир нөгтәсиндә сыфра чеврилмир.

Һәтичә 2. Әмсаллары (a, b) интервалында кәсимләјән функциялар олан (4) тәңлијинин y_1, y_2, \dots, y_n хәсуси һәлләринин $W(x)$ вронскианы һәмийн интервалын һеч олмасы бир нөгтәсиндә сыфра барабаројсә, онда интервалын бүтүн нөгтәләриндә да сыфра барабардир.

Догрудан да, (4) тәңлијинин y_1, y_2, \dots, y_n хәсуси һәлләринин $W(x)$ вронскианы интервалын һеч олмасы бир нөгтә индә сыфра барабар олдугда 2-чи теоремә кәрә һәмийн һәлләр хәтти асылы олар. Хәтти асылы олан функцияларынын вронскианы исә 1-чи теоремә кәрә еңиликлә сыфра барабар олур.

Һәтичә 3. Әмсаллары (a, b) интервалында кәсимләјән функциялар олан (4) тәңлијинин y_1, y_2, \dots, y_n хәсуси һәлләринин вронскианы һәмийн интервалын бир нөгтәсиндә сыфырдан фәрглиојсә, онда интервалын бүтүн нөгтәләриндә да сыфырдан фәрглидир.

Демәли, n -тәртибли хәтти бирчинсли тәңлијини y_1, y_2, \dots, y_n хәсуси һәлләринин $W(x)$ вронскианы ја (a, b) интервалында еңиликлә сыфра барабардир (һәлләр хәтти асылы олдугда), вә да (a, b) интервалынын бүтүн нөгтәләриндә сыфырдан фәрглидир (һәлләр хәтти асылы олмадыгда).

Дедикләримиздән хәтти бирчинсли тәңлијини хәсуси һәлләринин хәтти асылы олмасы һаггында ашагыдакы тәклиф влиныр:

Һәтичә 4. Әмсаллары (a, b) интервалында кәсимләјән функциялар олан (4) тәңлијинин y_1, y_2, \dots, y_n хәсуси һәлләринин һәмийн интервалда хәтти асылы олмасы үчүн онларын вронскианынын интервалын һеч олмасы бир нөгтәсиндә сыфырдан фәргли олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

§ 5. ХӘТТИ БИРЧИНСЛИ ДИФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИКЛӘРИН ҮМҮМИ ҺӘЛЛИНИН ГУРУЛМАСЫ

Хәтти бирчинсли

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (1)$$

тәңлијинин үмуми һәлли онун хәтти асылы олмајән хәсуси һәлләри вәситәсилә гурулуру.

Тәһриф. n -тәртибли хәтти бирчинсли (1) тәңлијинин (a, b) интервалында хәтти асылы олмајән n сароу $y_i(x)$.

ола билмәз. Догрудан да, әксини фәрз едәк ки, ики мұхталиф

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (1)$$

вә

$$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \dots + q_n(x)y = 0 \quad (2)$$

дифференциал тәңлијини ејни $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ фундаментал һәлләр системи вардыр. Онда һәмийн функцијалар (1) вә (2) тәңликләриниң тәрәф-тәрәфә чыхылмасындан алынган

$$[p_1(x) - q_1(x)]y^{(n-1)} + [p_2(x) - q_2(x)]y^{(n-2)} + \dots + [p_n(x) - q_n(x)]y = 0 \quad (3)$$

дифференциал тәңлијиниң да һәлли олар. Демәли, $(n-1)$ -тәртибли хәтти бирчынсли (3) тәңлијиниң n дәнә (тәртибиндән чоҗ сајда) хәтти асылы олмаған $y_1(x), \dots, y_n(x)$ хусуси һәлләри вардыр. Бу исә мүмкүн дејилдир (§ 5). Алынган зиддијәт хәстәрир ки, ики мұхталиф тәңлијини ејни фундаментал һәлләр системи ола билмәз.

Бурадан ајдындыр ки, һәр бир фундаментал систем ујғун бир дифференциал тәңлијини тәјин едир.

Тутаг ки, (a, b) интервалында тәјин олунмуш вә n -тәртибә гәдәр кәсилмәз тәрәмәләри олан $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцијалары ырымшдыр. Бу функцијалар хәтти асылы олмағандыр вә онларын $W(x)$ вронскианы (a, b) интервалының һеч бир нөгтәсиндә сыфра бәр-бәр дејилдир. Онда әмсаллары јекәнә гәјдә елә тәјин олунган (1) шәклиндә елә јекәнә хәтти бирчынсли дифференциал тәңлик вардыр кә, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцијалары онун фундаментал һәлләр системидир.

Бу тәңлијини, $y_n(x)$ функцијаларының (1) тәңлијиниң һәлли олмасы шартләрини

$$y_n^{(k)} + p_1(x)y_n^{(k-1)} + \dots + p_n(x)y_n = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

вә (1) тәңлијини биркә һәлл етмәклә тапмағ олар:

$$\begin{cases} y_n^{(k)} + p_1(x)y_n^{(k-1)} + \dots + p_n(x)y_n = 0, \\ (k = 1, 2, \dots, n) \\ y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Алынган бирчынсли тәңликләр системиниң сыфрыдан фәргли һәлли олдуғу үчүн онун әсас детерминанты сыфра бәрәбәр олмалыдыр (II, § 4):

$$\begin{vmatrix} y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \dots & y_n' & y_n \\ y^{(n)} & y^{(n-1)} & \dots & y' & y \end{vmatrix} = 0 \quad (a < x < b).$$

Бурадак ахтарылан тәңлик алыныр:

$$\frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Бу бәрәбәрликдә иштирак едән $(n+1)$ -тәртибли детерминантын сонунчу сүтун элементләринә кәрә ајрылышыны јаза-рағ, алынган нәтиҗәни $W(x)$ вронскианына бөлдүкдә (1) шәклиндә тәңлик алыныр. (5) бәрәбәрлијиндә $y = y_n(x)$ кәтүрдүкдә, детерминантын ики сүтуну ејни олдуғундан, о, ејниликлә сыфра чеврилир, јәни $y = y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) функцијалары һәмийн тәңлијини һәллидир.

Хусуси һалда, фундаментал һәлләр системи $y_1(x), y_2(x)$ олан икитәртибли хәтти бирчынсли

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (6)$$

тәңлијиниң $p_1(x)$ вә $p_2(x)$ әмсалларының һәмийн $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ функцијалары васитәсилә ифадә етмәғ олар. Догрудан да, (5) бәрәбәрлијинә кәрә фундаментал һәлләр системи $y_1(x), y_2(x)$ олан хәтти бирчынсли тәңлик

$$\frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

вә ја үчтәртибли детерминанты ачдыгда

$$y'' - \frac{W'(x)}{W(x)}y' + \left[-\frac{y_1''}{y_1} + \frac{W'(x)}{W(x)}\frac{y_1'}{y_1} \right]y = 0 \quad (7)$$

олар; бурада

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

вә

$$W'(x) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}'.$$

(6) вә (7) тәңликләриниң ујғун әмсаллары бәрәбәр олмалыдыр. Бурадан

$$p_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}$$

алыныр. Бу бәрәбәрлијини һәр ики тәрәфини $[x_0, x]$ ($a < x_0 < b$, $a < x < b$) парчасы үзрә интегралласағ,

$$\int_{x_0}^x p_1(x) dx = - \int_{x_0}^x \frac{W'(x)}{W(x)} dx = - \ln W(x) \Big|_{x_0}^x$$

вә ја

$$\int_{x_0}^x p_1(x) dx = - \ln \frac{W(x)}{W(x_0)}$$

олар. Бурадан

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx} \quad (8)$$

мүнәсибәти алыныр.

(8) барабарлыгына *Остроградски*¹ — *Лиувилл*² дүстуру дейлир. Һәм иң дүстүр n -тәртібли хәтти бирчынсли дифференциал тәңликләр үчүн дә доғрудур.

Остроградски — Лиувилл дүстуру көстәрир ки, $W(x)$ Вронски детерминанты $\{a, b\}$ интервалының һеч бир нөгтәсиндә сифра чеврилмир, $\{a, b\}$ да һәм иң интервалда еңилликлә сифра барабардир.

§ 7. САБИТ ӘМСАЛЛЫ ХӘТТИ БИРЧЫНСЛИ ТӘНЛИКЛӘР

Јухарыда (§ 5) көстәрдики, n -тәртібли хәтти бирчынсли дифференциал тәңлијини үмуми һәллини тапмағ үчүн һәм иң тәңлијини хәтти асылы олмаған n дәнә хәтти һәллини (фундаментал һәлләр системини) тапмағ лазымдыр. Әмсаллар, дәјишән кәмијәтләр (функцијалар) олан хәтти бирчынсли тәңликләрин фундаментал һәлләр системини тапмағ үчүн үмуми үсул јохдур. Ләкин әмсаллары сабит әдәлләр олан хәтти бирчынсли дифференциал тәңликләр үчүн белә үсул бардыр. Сабит әмсаллы хәтти бирчынсли дифференциал тәңликләрини фундаментал һәлләр системини тапымасы чәбри тәңликләрин һәлли мәсәләсинә кәтирлир. Бу мәсәләни үмуми шәкилдә шәрһ етмәк үчүн фәрә едәк ки, n -тәртібли хәтти бирчынсли

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \quad (1)$$

тәңлијини p_1, p_2, \dots, p_n әмсаллары сабит әдәлләрдир.

(1) тәңлијини табулушундан адындыр ки, онун һәлли елә $y = y(x)$ функцијасы ола биләр ки, онун өзү илә төрәмәләри ејни (ошар) шәкилдә олсун. Белә функција $y(x) = e^{\lambda x}$ функцијасыдыр. Буна көрә дә (1) тәңлијини һәллини $y = e^{\lambda x}$ шәкилдә ахтарар λ әдәдини елә сечәк ки, $y = e^{\lambda x}$ функцијасы һәм иң тәңлијини һәлли олсун. Бу функцијаны вә онун

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

төрәмәләрини (1) барабарлыгында јеринә јаздыгда

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n) e^{\lambda x}$$

вә јә

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n \quad (2)$$

ишарәсини гәбул етдикдә

$$L[e^{\lambda x}] = \varphi(\lambda) \cdot e^{\lambda x} \quad (3)$$

¹ Михаил Васильевич Остроградский (1801—1862) рус рижанјатчысыдыр.

² Жозеф Лиувилл (1809—1882) франсыз рижанјатчысыдыр.

олур. $e^{\lambda x} \neq 0$ олмасындан адындыр ки, $y = e^{\lambda x}$ функцијасының (1) тәңлијини һәлли олмасы үчүн

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0 \quad (4)$$

олмалыдыр, јәни λ әдәди (4) чәбри тәңлијиниң көкү олмалыдыр. Бунун тәрси дә доғрудур.

(2) чох һәддисинә (1) тәңлијиниң *характеристик чох һәддисинә*, (4) чәбри тәңлијинә исә һәм иң тәңлијиниң *характеристик тәңлијини* дейлир.

(1) дифференциал тәңлијиниң (4) *характеристик тәңлијини* алмағ үчүн тәңлијиниң өзүндә y -и ваһидлә, y -и тө әмәтәрини исә λ -ның ејни дәрәчәли гүввәтләри илә әвәз етмәк лазымдыр. Мәсәлән,

$$y'' + 3y' + 5y = 0$$

дифференциал тәңлијиниң *характеристик тәңлијини*

$$\lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$$

квадрат тәңлијини,

$$y^{(iv)} - 4y^{(iv)} + y'' = 0$$

дифференциал тәңлијиниң *характеристик тәңлијини* исә

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 + \lambda^2 = 0$$

тәңлијини вә с. олар.

Сабит әмсаллы (1) хәтти бирчынсли тәңлијиниң үмуми һәлли онун (4) *характеристик тәңлијиниң* көкләринә әсасән табулур.

1 һәл. *Характеристик тәңлијиниң көкләри һәгиги вә мүхтәлифдир.* (4) *характеристик тәңлијиниң* n -дәрәчәли чәбри тәңлик олдуғундан онун n дәнә $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ кими көкү бар. Һәм иң көкләр һәгиги вә мүхтәлифдир. Бу һәлдә

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \quad \dots, \quad y_n = e^{\lambda_n x} \quad (5)$$

функцијалары (1) тәңлијиниң һәлли олар.

(5) функцијалары хәтти асылы олмајандыр. Буну көстәрмәк үчүн һәм иң функцијаларының вронскианыны дүзәлдәк:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} B(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Сонунчу һасилии икинчи вулугу олан n -тәртибли $B(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ детерминанты *Вакермонд детерминанты* адланыр. Бу детерминанты һесапламаг мүмкүндүр:

$$B(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)$$

вә үмумијәтлә, рижан-индуксия методу илә

$$B(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{(i,j)} (\lambda_i - \lambda_j) \quad (6)$$

мүнәсибәти алыныр. Онда

$$W(x) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \prod_{(i,j)} (\lambda_i - \lambda_j) \quad (7)$$

олар. Характеристик тәнлијин көкләри һәгиги вә мүхтәлиф олдуғундан $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ ($i > j$) вә буна көрә дә x -ни истәзилән гијмәтиндә $W(x) \neq 0$ олар. (5) функцијаларының ароксиканы сыфырдан фәргли олдуғундан һәмийн функцијалар (1) тәнлијинин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир. Бу һалда (1) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \quad (8)$$

олар (§ 5).

Мисал 1. $y'' - 4y' + 3y = 0$ тәнлијинин үмуми һәллини тап-малы.

Верилмиш тәнлијин $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ характеристик тәнлијинин көкләри $\lambda_1 = 3$ вә $\lambda_2 = 1$ олдуғундан (һәгиги вә мүхтәлиф) онун үмуми һәлли

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$$

олар.

Мисал 2. $y''' - 6y'' + 8y' = 0$ тәнлијинин характеристик тәнлијини $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 8\lambda = 0$

кیمی јазылар. Бу тәнлијин көкләри $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ вә $\lambda_3 = 4$ әдәд-ләридир. Онда тәнлијин фундаментал һәлләр системи

$$1, e^{2x}, e^{4x}$$

вә үмуми һәлли

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{4x}$$

олар.

II һал. *Характеристик тәнлијин бүтүн көкләри һәгиги-дир, ләкин онларын ичәрисиндә тәкрарлананы бар.*

Бу һалда (4) характеристик тәнлијинин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ көк-ләринки бир вә ја бир нечәси тәкрарланам олдуғундан $e^{\lambda_i x}$,

$e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ системи ичәрисиндә мүхтәлиф функцијаларын сајы n -дән аз олар. Белә функцијалар илә (1) тәнлијинин фунда-ментал һәлләр системини тәшкил едә билмәз. Онларын сыра-сына бир сыра јени функцијалар әләвә етмәк ләзими.

Бу чатышмајан функцијалары хәтти

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y$$

оператору үчүн доғру ола:

$$L[UV] = L[U]V + \frac{L_1[U]}{1!} V' + \frac{L_2[U]}{2!} V'' + \dots + \frac{L_n[U]}{n!} V^{(n)} \quad (9)$$

дүстуруна әсасән тапмаг олар; бурада

$$\begin{aligned} L_k[U] &= n(n-1)\dots(n-k+1)U^{(n-k)} + \\ &+ (n-1)(n-2)\dots(n-k) p_1 U^{(n-k-1)} + \dots + \\ &+ (k+1)! p_{n-k-1} U' + k! p_{n-k} U \\ &(\kappa = 1, 2, \dots, n; L_0[U] = n!U) \end{aligned}$$

(L_k операторуну L операторунун k дәфә «символик диферен-циалланмасы» һесаб етмәк олар).

Бу дүстурун доғрулуғуну исбат етмәк үчүн UV һасилиини n тәртибә гәдәр ардыңыл төрәмәләри үчүн доғру олан (XIV, § 9)

$$UV = UV,$$

$$(UV)' = U'V + UV',$$

$$(UV)'' = U''V + 2U'V' + V'',$$

$$(UV)^{(n)} = U^{(n)}V + nU^{(n-1)}V' + \dots + UV^{(n)}$$

бәрабәрликләрини ујуғун олараг $p_n, p_{n-1}, \dots, p_1, 1$ әдәдләринә вурараг, алынан бәрабәрликләри төрәф-төрәфә топламаг ләзим-дыр.

(9) дүстурунда $U = e^{\lambda x}$ вә $V = x^m$ ($m < n$) көтүрсәк вә $V^{(m)} = m!$, $V^{(m+1)} = V^{(m+2)} = \dots = V^{(n)} = 0$, $L_k[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} \varphi_k(\lambda)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда

$$\begin{aligned} L_k[x^m e^{\lambda x}] &= e^{\lambda x} [x^m \varphi_k(\lambda) + m x^{m-1} \varphi'_k(\lambda) + \\ &+ \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} \varphi''_k(\lambda) + \dots + \varphi_k^{(m)}(\lambda)] \end{aligned} \quad (10)$$

мүнәсибәти алынар.

Инди фәрә едәк ки, λ_1 әдәди (4) характеристик тәнлијинин m_1 дәфә тәкрарланам көкүдүр. Онда мәлуи теоремә көрә $\varphi(\lambda_1) = \varphi'(\lambda_1) = \dots = \varphi^{(m_1-1)}(\lambda_1) = 0$, $\varphi^{(m_1)}(\lambda_1) \neq 0$ мүнәсибәтләри едәниләр (XVIII, § 8). Бу һалда (10) бәрабәрлијиндә $\lambda = \lambda_1$ вә m әвәзкә нөвбә илә 0, 1, 2, ..., $m_1 - 1$ әдәдләрини көтүрсәк, онда

$$L[e^{\lambda_1 x}] = L[x e^{\lambda_1 x}] = L[x^2 e^{\lambda_1 x}] = \dots = L[x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}] = 0$$

¹ Алексисар Теофила Вакермонд (1735—1796) франсиз ри-јәзијатчысыдыр.

барабарликларинин алдырыг. Бу көстөрүр ки,

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda_1 x} \quad (11)$$

функциялары (1) тәнлијинин һәллидир. Јаъни (4) характеристик тәнлијинин m дәфә тәкрарланан λ_1 көкүнә (1) тәнлијинин m дәнә (11) һәлли ујғундур.

Бу мүнәкимә (4) характеристик тәнлијинин һәр бир тәкрарланан көкү үчүн апарыла биләр. Нәтижәдә характеристик тәнлијин бүтүн садә вә тәкрарланан көкләринә ујғун (1) тәнлијинин n дәнә хусуси һәлли тапылыр. Бу хусуси һәлләр (1) тәнлијинин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир (буу исбат етмәк охучуларә һәвалә едирик). Фундаментал һәлләр системинә әсасән (1) тәнлијинин үмуми һәлли гурулур (§ 5).

Мисал 3. $y'' - 6y' + 9y = 0$ тәнлијинин

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

характеристик тәнлијинин көкләри барабардир: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. (3 әдәди икигәт көкдүр). Онда онун фундаментал һәлләр системи e^{3x} , $x e^{3x}$ вә үмуми һәлли $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ олар.

Мисал 4. $y^{(4)} - y''' = 0$ тәнлијинин үмуми һәллини гурмаг үчүн $\lambda^4 - \lambda^3 = 0$ характеристик тәнлијинин көкләрини тапаг: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$. Бу һалда верилмиш тәнлијин фундаментал һәлләр системи 1, x , x^2 , e^x вә үмуми һәлли $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x$ олар.

III һал. Характеристик тәнлијин көкләри мұхтәлиф-оир, ләкин онларын ичәрисиндә комплекс оланлары вар.

Бу һалда характеристик тәнлијин көкләринә әсасән (1) тәнлијинин үмуми һәллини гурмаг үчүн ышағыдакы леммадан истифәлә олунур:

Лемма. Һәгиги дәјишәнли $y(x) = U(x) + iV(x)$ комплекс функциясин һәгиги әмсаллы (1) тәнлијинин һәллидирсә, онда һәмчин функциясин $U(x)$ һәгиги вә $V(x)$ хәјали һиссәси дә (1) тәнлијинин һәллидир.

Доғрудан да, хәтти L оператору үчүн

$$L[U(x) + iV(x)] = L[U(x)] + iL[V(x)]$$

олдугундан, $L[U(x) + iV(x)] = 0$ олмасындан

$$L[U(x)] = 0, \quad L[V(x)] = 0$$

алыныр.

III-дә, фәрз едәк ки, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәдләри (4) характеристик тәнлијинин көкләридир вә бу көкләрин бири, мәсәлә, λ_1 комплексдир: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$). Онда λ_1 комплекс әдәди гошмасы да һәгиги әмсаллы (4) характеристик тәнлијинин көкү олар (XVIII, § 9). Демәли, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ көкүнүн гошмасы олан $\alpha - i\beta$ әдәди дә $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ көкләри ичәрисиндәдир. Тутар ки, $\alpha, \lambda_{n+1}, \dots$ дир. Бу һалда леммаја әсасән (1) тәнлијинин

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

вә

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

комплекс һәлләринин $e^{\alpha x} \cos \beta x$ һәгиги вә $e^{\alpha x} \sin \beta x$ хәјали һиссәләри дә һәмчин тәнлијини һәлли олар. Беләликлә, (1) тәнлијинин ики y_1 вә y_2 комплекс һәлли әвәзинә ики һәгиги

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{вә} \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

хусуси һәлли алыныр.

Бу гәјдә илә (1) тәнлијинин һәр бир чүт комплекс һәлли-нә ики дәнә һәгиги хусуси һәлл ујғун олур. Нәтижәдә характеристик тәнлијин n дәнә (һәгиги вә ја комплекс) көкүнә ујғун (1) тәнлијинин n дәнә һәгиги хусуси һәлли алыныр. Бу хусуси һәлләр хәтти асылы олмајандыр (исбат едін!). Һәмчин хусуси һәлләрә әсасән (1) тәнлијинин үмуми һәлли гурулур. Мәсәлә, (4) характеристик тәнлијинин анчаг бир чүт $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ вә $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ комплекс көкләри олдуғда (1) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_{n-2} e^{\lambda_{n-2} x} + C_{n-1} e^{\alpha x} \sin \beta x + C_n e^{\alpha x} \cos \beta x$$

ким гурулур.

Мисал 5. $y'' - y' + 4y = 0$ хәтти тәнлијинин характеристик тәнлијин

$$\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$$

олар. Онун көкләри $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2i$ вә $\lambda_3 = -2i$ әдәдләридир. Бу һалда тәнлијин

$$e^x, \quad e^{2ix}, \quad e^{-2ix}$$

фундаментал һәлләр системи әвәзинә һәгиги

$$e^x, \quad \sin 2x, \quad \cos 2x$$

фундаментал һәлләр системи көтүрүлүр вә верилмиш тәнлијин үмуми һәлли гурулур:

$$y = C_1 e^x + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x.$$

IV һал. Характеристик тәнлијин көкләри ичәрисиндә тәкрарланан комплекс көкләр вардыр.

Бу һалда да (1) тәнлијинин

$$e^{\lambda_1 x}, \quad x e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{\lambda_1 x}$$

хусуси һәлләри ичәрисиндә мұхтәлиф функцияларын сәји m дән аз олдугундан, онлар һәмчин тәнлијин фундаментал һәлләр системини тәшкил едә билмәз. Онларын сьрасына бир сыра дин функциялар алава етмәк лаымыдыр.

Әхәр $\alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) комплекс әдәди характеристик тәнлијин m дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онда онун гошмасы олан $\alpha - i\beta$ әдәди дә һәмчин тәнлијини m дәфә тәкрарланан көкү олар. Онда, II һалда олдуғу кими, көстәрмәк олар ки, $2m$ сәјдә

$$e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad x e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{(\alpha + i\beta)x}, \\ e^{(\alpha - i\beta)x}, \quad x e^{(\alpha - i\beta)x}, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{(\alpha - i\beta)x}$$

функциялары (1) тэнлигинин хүсуси хэллэридир. Нэмкин хүсуси хэллэри

$$e^{i\beta} \cos \beta x, xe^{i\beta} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{i\beta} \cos \beta x, \\ e^{i\beta} \sin \beta x, xe^{i\beta} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{i\beta} \sin \beta x$$

кими $2m$ сэдэ хэиги хүсуси хэллэрлэ эвээ, етмэк олар (III) халда олдугу кими).

Белэликлэ, (4) характеристик тэнлигинин сэдэ хэиги, тэкрарланан хэиги, сэдэ вэ тэкрарланан комплекс көклэринэ эсасэн (1) тэнлигинин n сэдэ хэтти асылы олмажан хэиги хүсуси хэлли тарылыр вэ үмүм хэлли ујгун шэкилдэ гурулур.

Мисал 6. $y^{(iv)} - y^{(iv)} + 2y''' - 2y'' - y' - y = 0$ хэтти тэнлигинин

$$\lambda^4 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda^2 + 1)^2(\lambda - 1) = 0$$

характеристик тэнлигинин көклэри

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = -i, \lambda_4 = i, \lambda_5 = i$$

олр. Бурада $\lambda_2 = -i$ вэ $\lambda_4 = i$ гошма комплекс көклэри икигат көклэрдир. Онда верилмкш тэнлигин нэмин көклэрэ ујгун хэиги фундаментал хэллэр системи

$$e^x, \cos x, x \cos x, \sin x, x \sin x$$

олур вэ үмүм хэлли

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 x \cos x + C_4 \sin x + C_5 x \sin x$$

кими гурулур.

§ 8. ХЭТТИ БИРЧИНСЛИ ОЛМАЖАН ДИФЕРЕНЦИАЛ ТЭНЛИКЛЭРИН ХЭЛЛИ

Эмсаллары вэ сэг тэрэфи нэр хансы (a, b) интервалында хэсилмэжэн функциялар олан

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \\ \text{вэ } y_a$$

$$L[y] = f(x) \quad (1)$$

хэтти бирчинсли олмажан тэнлигинин $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ башлангыч шэртлэрини өдэжэн жекэнэ $y = y(x)$ хэллинин варлыгы јухарыда гејд едилмишдир (§ 3).

Бу халда, (1) тэнлигинин сэг тэрэфини сыфыр һесаб етмэклэ алыннан хэтти бирчинсли

$$L[y] = 0 \quad (2)$$

тэнлигинэ (1) хэтти бирчинсли олмажан тэнлигинэ ујгун олан бирчинсли тэнлик дејилур.

Хэтти диференциал L операторунуи мэлум хэссэлэринэ (§ 3) эсасэн (1) тэнлигинин хэлли хэигида ашагыдакы тэклифлэри исбат етмэк олар.

Теорем 1. (1) тэнлигинин $y_k(x)$ хэлли илэ (2) бирчинсли тэнлигинин $y(x)$ хэллинин чэли (1) тэнлигинин хэллидир.

Догрудан да, $y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$ функцијасы үчүн $L[y] = L(y_0) + L(\tilde{y})$ олдуғундан $L[y_0] = f(x)$ вэ $L[\tilde{y}] = 0$ мүнәсибәтлэринэ эсасэн $L[y] = f(x)$ олар.

Теорем 2. Әкәр $y_k(x)$ функцијасы $L[y] = f_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, m$) тэнлигинин хэллидирсэ, онда $y(x) = \sum_{k=1}^m y_k(x)$

функцијасы өл

$$L[y] = \sum_{k=1}^m f_k(x)$$

тэнлигинин хэллидир.

Догрудан да, $L[y_k] = f_k(x)$ олмасыдан әјдындыр ки,

$$L\left[\sum_{k=1}^m y_k\right] = \sum_{k=1}^m L[y_k] = \sum_{k=1}^m f_k(x).$$

Теорем 3. Хэтти бирчинсли олмажан (1) тэнлигинин үмүм хэлли онун бир $y_0(x)$ хүсуси хэлли илэ ујгун (2) бирчинсли тэнлигинин $\sum_{k=1}^n C_k y_k(x)$ үмүм хэллинин

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^n C_k y_k(x) \quad (3)$$

хэллинэ бәрибардир.

Исбаты. Теорем исбат етмэк үчүн нэзәрә алаг ки, $y_0(x)$ функцијасы (1) тэнлигини ихтијари хүсуси хэлли вэ $y_1(x)$.

.. $y_n(x)$ функциялары (2) тэнлигинин фундаментал хэллэр системидир. Ајдындыр ки, (3) функцијасы (1) тэнлигинин үмүм хэлли олдуғуну исбат етмэк үчүн нэмин тэнлигини ихтијари

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \\ (a < x_0 < b) \quad (4)$$

башлангыч шэртлэрини өдэжэн $y = y(x)$ хэллин (3) функцијасыдан C_1, C_2, \dots, C_n сабитлэрини сечмэклэ алмаг мүмкүн олдуғуну көстөрмэк лазымдыр.

3) функцијасынын (4) башлангыч шэртлэрини өдәмәси үчүн C_1, C_2, \dots, C_n сабитлэри

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n C_k y_k(x_0) + y_0(x_0) = y_0, \\ \sum_{k=1}^n C_k y_k'(x_0) + y_0'(x_0) = y_0', \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n C_k y_k^{(n-1)}(x_0) + y_0^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (5)$$

системинийн хэллэл олмалдыр. (5) системийн эсас детерминанты, яэни мачуул несаб олунан C_1, C_2, \dots, C_n параметрларинийн эмсалларындан дүзэлиш детерминант (2) тэнлигийн фундаментал хэллэр системи олан $y_1(x), \dots, y_n(x)$ функцижалары вронскинын x_0 нөгтэсіндэки $W(x_0)$ гиймэти олдуугундан, $W(x_0) \neq 0$ олар (§ 4). Буна көрө дэ (5) системийн яеканэ $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ хэллэл вар. Демэли, (1) тэнлигийн

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^n C_k^0 y_k(x)$$

хэллэл (4) башлангыч шэртлариний өдэир.

Бу теоремдэн адындыр ки, бирчинсли олмажан (1) тэнлигийн үмүм хэллэни тапмаг үчүн онун өзүнүн бир хүсүс хэллэни аэ уйгуи (2) бирчинсли тэнлигийн үмүм хэллэни билмэк лэзымдыр. Бирчинсли тэнликлэрин үмүм хэллэни тапылмасы үсулу эвээллэр (§ 5, § 7) көстэрилишдир. Буна көрө дэ (1) тэнлигийн үмүм хэллэни тапмаг үчүн эсас мөсөлэ онун бир хүсүс хэллэни сечилмэсидир.

Мисал 1. $y'' - 6y' + 9y = x$ тэнлижинэ уйгуи олан $y'' - 6y' + 9y = 0$ бирчинсли тэнлигийн үмүм хэллэл

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

функцижалары (§ 8, мисал 3). Лохламаг олар ки,

$$y_0(x) = \frac{1}{9} \left(x + \frac{2}{3} \right)$$

функцижалары верилиш тэнлижин хүсүс хэллэнидир (бирчинсли олмажан тэнлижин хүсүс хэллэни тапылма үсуллары сонра көстэрилир). Онда тэнлижин үмүм хэллэл

$$y = \frac{1}{9} \left(x + \frac{2}{3} \right) + C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

олар.

Бирчинсли олмажан тэнлижин эмсаллары сабит эдэдэр олдугда онун бир сыра халларда хүсүс хэллэни сечмэ үсулу (бу сонракы параграфда көстэрилир) илэ тапмаг олур. Яакин бу үсул кениш дифференциал тэнликлэр синфинэ тэтбиг олунмур.

Бирчинсли олмажан тэнлижэ уйгуи бирчинсли тэнлижин фундаментал хэллэр системи мэлүм олдугда бирчинсли олмажан тэнлижин үмүм хэллэни ихтиари сабитларин вариациалы үсулу (яэ яа Лагранж үсулу) илэ тапмаг олар. Бу үсул белэди:

Бирчинсли олмажан (1) тэнлижинэ уйгуи олан (2) тэнлигийн $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ фундаментал хэллэр системи мэлүм олдугда бирчинсли тэнлижин

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \quad (6)$$

үмүм хэллэнидэ C_1, C_2, \dots, C_n ихтиари сабитларин x -дэн асылы елэ функцижалар сечирлэр ки, алман

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x) \quad (7)$$

функцижалары (1) тэнлигийн үмүм хэллэл олур.

Бу халда, ахтарылан n сајда намэ'лум

$$C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x) \quad (8)$$

функцижаларыны тапмаг үчүн n сајда шэртдэн (тэнликлээн) кс-тифада олунур. Бу шэртларин биринчиси (8) функцижаларынын (1) тэнлижин өдэмэсидир. Јердэ галаи ($n-1$) дэнэ тэнликлэ (шэрт) ксэ (7) функцижаларыны төрэмэлэринийн (6) функцижаларынын уйгуи төрэмэс кими олмасы тэлэбинэ эсасэн тапылур: $C_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) функцижаларыны елэ сечирлэр ки, (7) функцижаларынын

$$y'(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) y'_k(x) + \sum_{k=1}^n \dot{C}_k(x) y_k(x)$$

төрэмэс

$$y'(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) y'_k(x) \quad (9)$$

шэклиндэ олсун, яэни

$$\sum_{k=1}^n \dot{C}_k(x) y_k(x) = 0 \quad (10)$$

шэрти өдэнилси. Инди (9) функцижаларынын

$$y''(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) y''_k(x) + \sum_{k=1}^n \dot{C}_k(x) y'_k(x)$$

төрэмэсинийн

$$y''(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) y''_k(x) \quad (11)$$

шэклиндэ олмасыны тэлэб едэрэк,

$$\sum_{k=1}^n \dot{C}_k(x) y'_k(x) = 0 \quad (12)$$

шэртини аларыг. Бу просеси давам етдирмэкэ

$$\sum_{k=1}^n \dot{C}_k^{(n-1)}(x) y_k^{(n-1)}(x) = 0 \quad (13)$$

шэрти наситэснэ ($n-1$)-тэртиблик төрэмэ үчүн

$$y^{(n-1)}(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) y_k^{(n-1)}(x) \quad (14)$$

ифадəsi алыныр. Бурадан n -тәртібли терәмәни тапаг:

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) y_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n C'_k(x) y_k^{(n-1)}(x). \quad (15)$$

Инди (7) функцијасыны вә онун тапдыгымыз (9), (11), (14) вә (15) терәмәләрини (1) тәклијини сол тәрәфиндә јеринә јазаг:

$$L \left[\sum_{k=1}^n C_k(x) y_k(x) \right] = \sum_{k=1}^n C'_k(x) y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^n C_k(x) L[y_k(x)].$$

Бурадан

$$L[y_1(x)] = L[y_2(x)] = \dots = L[y_n(x)] = 0$$

олдугуна әсәсән

$$\sum_{k=1}^n C'_k(x) y_k^{(n-1)}(x) = f(x) \quad (16)$$

мүнасибәти алыныр. Демәли, (7) функцијасы (1) тәклијини һәлли олмасы үчүн (10), (12), (13) вә (16) шәртләри өдәнил-мәлидир:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n C'_k(x) y_k(x) = 0, \\ \sum_{k=1}^n C'_k(x) y'_k(x) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{k=1}^n C'_k(x) y_k^{(n-2)}(x) = 0, \\ \sum_{k=1}^n C'_k(x) y_k^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \quad (17)$$

Бу системни әсәс детерминанты (2) тәклијини (a, b) интервалында фундаментал һәлләр системни олан $y_1(x), \dots, y_n(x)$ функцијаларыны вронскианы олдугундан, о һәмий интервалыи бүтүк мөғтәл әриндә сыфырдан фәрглидир: $W(x) \neq 0$. Буна көрә дә (17) системини

$$C'_1(x) = \varphi_1(x), \quad C'_2(x) = \varphi_2(x), \dots, C'_n(x) = \varphi_n(x)$$

кып јекәнә һәлли вар. Бу бәрәбәрликләри интегралламагла

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + C_{11}, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + C_{21}, \dots$$

$$C_n(x) = \int \varphi_n(x) dx + C_n$$

мүнасибәтләри (бурада C_1, C_2, \dots, C_n ихтијари сабитләрдир) вә онлары (7) бәрәбәрлијиндә јеринә јазмагла (1) тәклијини ах-тарылак

$$y(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) y_k(x) = \sum_{k=1}^n y_k(x) \int \varphi_k(x) dx + \sum_{k=1}^n C_k y_k(x) \quad (18)$$

һәлли алыныр. (18) һәлли ики һиссәдән ибарәтдир. Бунларын бири (1) тәклијини хүсуси һәлли

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^n y_k(x) \int \varphi_k(x) dx,$$

о бири исә она ујғун олан (2) бирчинсли тәклијини үмуми һәллидир:

$$\sum_{k=1}^n C_k y_k(x).$$

Мисал 2. Бирчинсли олмајан

$$y'' - 4y' + 3y = e^x$$

тәклијинә ујғун олан бирчинсли $y'' - 4y' + 3y = 0$ тәклијини $\tilde{y}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$ үмуми һәлли мә'лумдур (§ 7, мисал 1), онун үмуми һәллини сабитләрин варнасијасы үсулу илә тапмалы.

Бу һалда (17) систем

$$\begin{cases} C'_1(x) e^{3x} + C'_2(x) e^x = 0, \\ C'_1(x) 3e^{3x} + C'_2(x) e^x = e^x \end{cases}$$

шәклиндә олар. Бурадан Крамер гәјдасына көрә

$$C'_1(x) = \frac{1}{2} e^{-x}, \quad C'_2(x) = -\frac{1}{2} e^x$$

алыныр. Ахырынчы бәрәбәрликләри интегралламагла

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} + C_{11}, \quad C_2(x) = -\frac{1}{2} e^x + C_2$$

мүнасибәтләри вә (18) бәрәбәрлијинә әсәсән верилмиш тәклијин

$$y(x) = -e^{2x} + C_1 e^{3x} + C_2 e^x$$

үмуми һәлли алыныр.

§ 9 САБИТ ӘМСАЛЫ ХӘТТИ БИРЧИНСЛИ ОЛМАЈАН ДИФЕРЕНЦИАЛ ТӘКЛИКЛӘР

Хәтти бирчинсли олмајан тәклијини үмуми һәлли онун бир хүсуси һәлли илә ујғун бирчинсли тәклијини үмуми һәллини чәминә бәрәбәрдир. Хәтти бирчинсли олмајан

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \quad (1)$$

тәклијини әмсаллары сабит p_1, p_2, \dots, p_n әдәлләри олдуғла она ујғун олан сабит әмсаллы бирчинсли тәклијини үмуми һәлли

линии тапылма гайдасы [ухарыда (§ 7) көстөрилмишдир. Бир-чинсли тәңлијини үмуми һәллине әсәсэн (1) тәңлијини үмуми һәллини ихтијари сабитләрини вариасијасы үсулу (§ 8) илә тапмаг олар. Ләкин бу заман шүрәккәб һесапламалар влармаг лазым кәлир.

Буна көрә дә ујғун бирчинсли тәңлијини үмуми һәлли мә-лум олдуғда (1) тәңлијини үмуми һәллини гурмаг үчүн бә-зан онун бир хусуси һәллини тапмаг даһа әлverişли олур. (1) тәңлијини хусуси һәллини сәғ тәрәфдәки $f(x)$ функси-јасыны шәклине әсәсэн сечмә үсулу вә ја гејри-мүәјјән әм-саллар үсулу илә тапырлар.

И һ а л. (1) тәңлијини сәғ тәрәфи m -дәрәчәли чәбри чох-һәддидир.

$f(x) = P_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m$ (2)
вә тәңлијини p_n әмсалы сыфырдан фәрглидир, јәни (1) тәң-лијини

$L[y] = P_m(x), \quad p_n \neq 0,$ (3)
шәклиндәдир. Онда (1) тәңлијини хусуси һәллини m -дәрә-чәли

$y_0(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_{m-1} x + B_m = Q_m(x)$ (4)
чәбри чохһәдди шәклиндә тапмаг олар.

Буна инанмаг үчүн (4) функсијасыны m дәфә ардычыл ди-ференциаллајаг:

$y_0'(x) = m B_0 x^{m-1} + (m-1) B_1 x^{m-2} + \dots + 2 B_{m-2} x + B_{m-1}$
 $y_0''(x) = m(m-1) B_0 x^{m-2} + (m-1)(m-2) B_1 x^{m-3} + \dots + 2 B_{m-3}$

Бу гијмәләр (3) тәңлијиндә y -ин ујғун тәртибли тәрәмә-ләрини јеринә јазылар вә алынан барабарлиқдә x -ин ејни дәрәчәли гүввәтләрини әмсаллары барабар һесаб едилір. Онда $m+1$ дәнә нәмәлум B_0, B_1, \dots, B_m әмсалларыны нәзәрән $m+1$ тәңлиқдән ибарәт

$$\begin{cases} p_n B_0 = b_0, \\ p_{n-1} m B_0 + p_n B_1 = b_1, \\ p_{n-2} m(m-1) B_0 + p_{n-1}(m-1) B_1 + p_n B_2 = b_2, \\ \dots \end{cases} \quad (5)$$

хәтти тәңлиқләр системи алыныр. Бу (үчбучағлы шәклиндә) системин әсәс детәрминанты сыфырдан фәргли $\Delta'_n = (p_n)^{m+1} \neq 0$ олдуғундан, онун јекәнә һәлли (јәни (5) системия өдәјән B_0, B_1, \dots, B_m әдәдләри) вардыр. Бурадан (1) тәңлијини (4) шәклиндә хусуси һәлли тапылыр.

Мисал 1. $y'' - 5y' + 6y = x^2$ тәңлијини үмуми һәллини тап-малы.

Бу тәңлијә ујғун $y'' - 5y' + 6y = 0$ бирчинсли тәңлијини үму-ми һәлли $\bar{y}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ функсијасыдыр. Верилмиш тәң-

лијини үмуми һәллини гурмаг үчүн онун бир хусуси һәлли тапылмалыдыр. Бу хусуси һәлли

$$y_0(x) = B_0 x^2 + B_1 x + B_2$$

шәклиндә ахтараг. Онда

$$y_0'(x) = 2B_0 x + B_1, \quad y_0''(x) = 2B_0$$

гијмәтләри тәңлиқдә јазылдығла

$$2B_0 - 5(2B_0 x + B_1) + 6(B_0 x^2 + B_1 x + B_2) = x^2$$

барабарлији вә бурадан B_0, B_1, B_2 әмсалларыны тәјин етмәк үчүн

$$\begin{cases} 6B_0 = 1, \\ -10B_0 + 6B_1 = 0, \\ 2B_0 - 5B_1 + 6B_2 = 0 \end{cases}$$

тәңлиқләр системи алыныр. Нәтиқәдә B_0, B_1 вә B_2 әмсаллары тапылыр:

$$B_0 = \frac{1}{6}, \quad B_1 = \frac{5}{18}, \quad B_2 = \frac{19}{108}.$$

Демәли, верилмиш тәңлијини үмуми һәлли

$$y(x) = \frac{1}{6} x^2 + \frac{5}{18} x + \frac{19}{108} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

шәклиндә олар.

И һ а л. (1) тәңлијини јенә дә (3) шәклиндәдир, ләкин p_n әмсалы сыфра барабардыр: $p_n = 0$.

Онда үмуми һәлдә

$$p_0 = p_{n-1} = p_{n-2} = \dots = p_{n-m+1} = 0, \quad p_{n-m} \neq 0$$

олдуғуну гәбул етсәк, (1) тәңлијини

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-m} y^{(m)} = P_m(x) \quad (6)$$

шәклиндә јазылар. Бу һәлдә $\lambda = 0$ әдәли һәмми тәңлијини

$$\lambda^m + p_1 \lambda^{m-1} + \dots + p_{n-m} \lambda^m = 0 \quad (7)$$

характеристик тәңлијини m дәфә тәқрарланан көкү олар.

Әкәр $z = y^{(m)}$ әвәзләмәсини апарсаг, онда (6) тәңлијини тәртиби m гәдәр азалайр вә

$$z^{(n-m)} + p_1 z^{(n-m-1)} + \dots + p_{n-m} z = \Phi_m(x) \quad (8)$$

шәклиндә јазылар ($p_{n-m} \neq 0$). (8) тәңлијини 1 һәлдә бахылан көв тәңлиқдир. Она көрә дә онун хусуси һәлли (4) шәклиндә чох-һәдди олар:

$$z = \bar{z}_m(x) \quad \text{вә ја} \quad y^{(m)} = Q_m(x).$$

Ахырынчы барабарлијини m дәфә ардычыл интегралладығда y тапылыр:

$$y = A_0 x^{m+m} + A_1 x^{m+m-1} + \dots + A_m x^2 + C_1 x^{m-1} + \dots + C_{m-1} x + C_m$$

Бурада $C_1 = C_2 = \dots = C_m = 0$ көтүрдүкдә (6) тәңлијини

бир хүсуси хэллн (бизэ дэ тэнлижин бир данэ хүсуси хэллн лэзымдыр) алыныр:

$$y_0 = A_0 x^{m+1} + A_1 x^{m+2} + \dots + A_m x^0 = x^0 R_m(x).$$

Демэли, (6) шэклиндэ дифференциал тэнлижин хүсуси хэллн

$$y_0(x) = x^0 R_m(x) \quad (9)$$

шэклиндэ ахтарылмалыдыр: бурада σ илэ характеристик тэнлижин $\lambda = 0$ көкүнүн тэкрарланма тэртиби, $R_m(x)$ илэ исэ тэнлижин саг тэрэфиндэхи чоххэдли илэ ејни дэрэчэли олан чоххэдли ншарэ олунмушдур.

Мисал 2. $y''' - 3y'' = x$ тэнлижинин үмүмн хэллини тапмаг үчүн эавэлчэ буна ујгун $y''' - 3y'' = 0$ бирчинсли тэнлижинин $\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$ характеристик тэнлижинин көклэрини тапаг: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$ ($x = 2$)

Бурадан ајдындыр ки, бирчинсли тэнлижин үмүмн хэллн

$$\bar{y}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{3x} \quad (10)$$

олар. Верилмиш бирчинсли олмајан тэнлижин хүсуси хэллн исэ

$$y_0(x) = x^2 (Ax + B)$$

шэклиндэ ахтарылмалыдыр. Бурадан

$$y_0'(x) = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y_0''(x) = 6Ax + 2B, \quad y_0'''(x) = 6A$$

вэ бу гнјмэтлэри тэнликдэ јеринэ јаздыгда

$$6A - 3(6Ax + 2B) = x$$

мүнәсибэти алыныр. Сонунчу б-рабэрлијэ эсасэн

$$-18A = 1, \quad 6A - 6B = 0, \quad A = -\frac{1}{18} = B$$

олар.

Демэли, верилмиш тэнлижин хүсуси хэллн

$$y_0(x) = -\frac{x^2}{18} (x+1)$$

вэ үмүмн хэллн

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{3x} - \frac{x^2}{18} (x+1)$$

функцијасыдыр.

III пәј. (1) тэнлижинин саг тэрэфи m -дэрэчэли чэбри чоххэдли илэ үстлү фунн-ијанын һасилидыр:

$$L[y] = P_m(x) e^{\lambda x}. \quad (11)$$

Бу тэнликдэ $y = ze^{\lambda x}$ эвэзтамәсини апарат вэ икн функција һасилини хэтти оператору һаггында мәәлум олан

$$L[UV] = L[U]V + \frac{L[U]}{1}V' + \frac{L[U]}{2!}V'' + \dots + \frac{L[U]}{n!}V^{(n)}$$

лүстурундан (§ 7, (9)) истифада едәк. Онда (§ 7)

$$L_k[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} \varphi^{(k)}(\lambda_0)$$

олдуғуна эсасэн (11) тэнлији

$$L[ze^{\lambda x}] = e^{\lambda x} z\varphi(\lambda_0) + e^{\lambda x} \frac{\varphi'(\lambda_0)}{1!} z' + e^{\lambda x} \frac{\varphi''(\lambda_0)}{2!} z'' + \dots + e^{\lambda x} z^{(n)} = P_m(x) e^{\lambda x} \quad (12)$$

кими јазылар; бурада

$$\varphi(\lambda) = \lambda^0 + p_1 \lambda^{-1} + \dots + p_{n-1} \lambda^{-n} + p_n$$

ифадәси (1) тэнлијинә ујгун бирчинсли тэнлижин характеристик чоххэдлисидир.

(12) бэрабэрлијинин һар икн тэрәфини $e^{-\lambda x}$ функцијасына бөлдүкдә, (3) шэклиндэ олан

$$z^{(n)} + \dots + \frac{\varphi^{(n-1)}(\lambda_0)}{1!} z' + \varphi(\lambda_0) z = P_m(x) \quad (13)$$

тэнлији алыныр. Әкәр λ_0 әдәди характеристик тэнлижин σ дэфа тэкрарланан көкүдүрсә, јәјин

$$\varphi(\lambda_0) = \varphi'(\lambda_0) = \dots = \varphi^{(\sigma-1)}(\lambda_0) = 0, \quad \varphi^{(\sigma)}(\lambda_0) \neq 0$$

мүнәсибәтлэри өдәнилисә, онда II һалә көрә (13) тэнлијинин хүсуси хэллн

$$z = x^0 Q_m(x)$$

шэклиндэ ахтарылмалыдыр. Бу һалдә (11) тэнлијинин хүсуси хэллн

$$y = x^0 Q_m(x) e^{\lambda x} \quad (14)$$

кими олар.

Демэли, λ_0 әдәди характеристик тэнлижин σ дэфа тэкрарланан көкү олдуғда (11) тэнлијинин хүсуси хэллн (14) шэклиндэ ахтарылмалыдыр. Бурадан $\lambda_0 = 0$ олдуғда II һалдәкн нәтијә алыныр.

Мисал 3. $y''' + y'' = xe^x$ ($P_m(x) = x$, $\lambda_0 = 1$) тэнлијинә ујгун олан бирчинсли $y''' + y'' = 0$ тэнлијинин $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$ характеристик тэнлијинин көклэри $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$ әдәтләридыр. $\lambda_0 = 1$ әдәди характеристик тэнлијин көкү дејилдир ($\lambda \neq 0$). Буна көрә дэ верилмиш тэнлијинә хүсуси хэллн

$$y_0(x) = (Ax + B)e^x$$

шэклиндэ ахтарылмалыдыр. Бу функцијанын

$$y_0'(x) = Ae^x + (Ax + B)e^x, \quad y_0''(x) = 2Ae^x + (Ax + B)e^x,$$

$$y_0'''(x) = 3Ae^x + (Ax + B)e^x$$

тэрәмәлэри тэнликдә јазыдыгда A вэ B әмсалларыны тајин етмәк үчүн

$$5Ae^x + 2(Ax + B)e^x = xe^x$$

мүнәсибәтлэри алыныр. Бурадан

$$2A = 1, \quad 5A + 2B = 0 \quad \text{вэ}$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{5}{6}$$

тапылып. Демәли, верилмиш тәнлијини хусуси һәлли

$$y_0(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{5}{2} \right) e^x$$

вә үмуми һәлли

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{5}{2} \right) e^x$$

олар.

IV һал. (1) тәнлијинини сағ тәрафи

$$f(x) = e^{(p+ri)x} P_m^{(1)}(x) \cos px + P_m^{(2)}(x) \sin px \quad (15)$$

шәклиндә ифадәдир, бурада $P_m^{(1)}(x)$ вә $P_m^{(2)}(x)$ ифадәләри m -дә рәчәли чәбри чохһәдлиләрдыр

(15) ифадәсини Ејлерин

$$\sin px = \frac{e^{pi x} - e^{-pi x}}{2i} \quad \text{вә} \quad \cos px = \frac{e^{pi x} + e^{-pi x}}{2}$$

дүстурларына әсасән чевирдикда

$$f(x) = e^{(p+ri)x} P_m^{(1)}(x) + e^{(p-mi)x} P_m^{(2)}(x)$$

шәклиндә функција алыныр, бурида $P_m^{(1)}(x)$ вә $P_m^{(2)}(x)$ m -дә рәчәли чәбри чохһәдлиләрдыр.

Бу һалда (1) тәнлијинини хусуси һәлли

$$L[y] = e^{(p+ri)x} P_m^{(1)}(x) \quad (16)$$

вә

$$L[y] = e^{(p-mi)x} P_m^{(2)}(x) \quad (17)$$

тәнликләринини хусуси һәлләринини чаминә барабар олар (§ 8, теорем 2), (16) вә (17) тәнликләринини хусуси һәлләри иса III һалда кәстәрилән гәјдә илә тапылып. Бу тәнликләрини сағ тәрафини Ејлер дүстурлары, васитәсилә јенидән (15) шәклинә кәтирмәк мүмкүндүр.

Беләтјәклә, ашагыдакы нәтичә алыныр:

(1) тәнлијинини сағ тәрафи (15) шәклиндәдирсә вә $\lambda_0 \pm pi$ әдәдләри характеристик тәнлијини α дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онда һәмми тәнлијини хусуси һәллини

$$y_0(x) = x^\alpha e^{(\lambda_0 \pm pi)x} [C_m^{(1)}(x) \cos px + C_m^{(2)}(x) \sin px] \quad (18)$$

шәклиндә ахтармағ лағымдыр, бурада $C_m^{(1)}(x)$ вә $C_m^{(2)}(x)$ m -дә рәчәли чәбри чохһәдлиләрдыр.

Мисал 4. $y'' + 9y = \cos 3x$.

$\pm 3i$ әдәдләри характеристик тәнлијини садә көкләри олдугундән верилмиш тәнлијини хусуси һәлли

$$y_0(x) = x [A \cos 3x + B \sin 3x]$$

шәклиндә ахтарылмалыдыр.

Мисал 5. $y'' - y = 2x \cos 3x$.

$\pm 3i$ әдәдләри характеристик тәнлијини көкү олмадығындан тәнлијини хусуси һәлли

$$y_0(x) = (A_1 x + B_1) \cos 3x + (A_2 x + B_2) \sin 3x$$

шәклиндә ахтарылмалыдыр.

§ 10. ДИФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИКЛӘР ҮЧҮН СӘРҮӘД МӘСӘЛӘЛӘРИ

Индијә гәдәр верилмиш диференциал тәнлијини үмуми һәллиндән онун мүәјјән хусуси һәллини алмағ үчүн башлангыч шәртләрдән истифадә олунырду. n -тәртибли диференциал тәнлик үчүн башлангыч шәртләр ахтарылан функција вә онун $(n-1)$ -тәртибә гәдәр төрәмәләринини бир нөггәдә гијмәтләриндән ибарәтдир (§ 1). Тәнлијини үмуми һәллиндән мүәјјән хусуси һәлли алмағ үчүн башга формаларда верилмиш шәртләрдән дә истифадә едилир. Үмумијјәтлә, n -тәртибли диференциал тәнлијини n ихтијари сабитдән асылы олан үмуми һәллиндән мүәјјән хусуси һәлли алмағ үчүн n дәнә шәрт верилмәлидир. Бу шәртләри

$$U_k[y] = a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

кимини јазмағ олар. Бурада $U_k[y]$ илә ахтарылан функција вә онун төрәмәләринини бир вә ја бир нечә нөггәдәки гијмәтләринини мүәјјән комбинасијасы ишарә олунырду.

Әкәр ихтијари сабит A вә B әдәдләри үчүн

$$U_k[Ay_1 + By_2] = AU_k[y_1] + BU_k[y_2] \quad (2)$$

барабарлији өдәнилрсә, онда (1) шәртләринә хәтти шәртләр дејилир. Бу һалда $a_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) олдугда һәмми шәртләр хәтти бирчинли шәртләр адланыр.

Ајдындыр ки, n -тәртибли диференциал тәнлијини

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

үмуми һәлли мәлүм олдугда онун (1) хәтти шәртләрини өдәјән хусуси һәллини тапмағ үчүн һәмми шәртләрдән алыннан

$$C_1 U_k[y_1] + C_2 U_k[y_2] + \dots + C_n U_k[y_n] = a_k \quad (3)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

системини C_1, C_2, \dots, C_n параметрләринә нәзәрән һәлл етмәк лағымдыр. (3) системинин һәллини варлыгы вә јекәнәлијини һағгында мүхтәлиф вәзијәтләр ола биләр.

Бу мәсәләни кеңијә из һ етмәк үчүн икитәртибли бирчинли олмајан

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (a < x < b) \quad (4)$$

диференциал тәнлијинә бахал. Тутал ки, τ_1 вә τ_2 мәлүм әдәдләрдир вә (4) тәнлијинини

$$y(a) = \tau_1, \quad y(b) = \tau_2 \quad (5)$$

шәртләрини өдәјән һәллини тапылмасы тәләб олуныр.

Бу мәсәләјә сәрһәд мәсәләси, $[a, b]$ парчасынын үч нөггәләриндә гојулан (5) шәртләринә иса сәрһәд шәртләри дејилир. Белә сәрһәд мәсәләсини һәлл етмәк, һәндәси оларып, (4) тәнлијинини (a, τ_1) вә (b, τ_2) нөггәләриндән кечән интеграл әјрисини тапмағ демәкдир. Ајдындыр ки, мүстәввини истәккән ики нөггәсиндән һәммишә интеграл әјриси кечирмәк мүмкүн.

күн олмур, мүмкүн олдугда исә бә'зән бир јох, сонсуз сәјдә интеграл әјриси кечирмәк олур.

Сәрһәд мәсәләсинин Коши мәсәләсиндән фәргли чәһәти дә елә буңдадыр. Верилмиш тәнлијин әмсаллары мүүјән шәртләри өдәдикдә Коши мәсәләсинин әксәр һалларда јеканә һәли олдугу һалда, сәрһәд мәсәләсинин һәли ја олмур, ја да сонсуз сәјдә олур. Буну ашағыдакы садә сәрһәд мәсәләсинин һәлиндән көрмәк олар.

Мәсәлә. $y'' + y = 0$ тәнлијинин $y(0) = 0$, $y(b) = \alpha$ сәрһәд шәртләрини өдәјән һәлини тапмалы.

Тәнлијин үмуми һәли

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

шәклиндә р (§ 5, мисал 1). Бу һәл $y(0) = 0$ шәртин $C_1 = 0$ олдугда өдәјр. $\alpha \neq 0$ олдугда иккинчи шәрт өдәјән јеканә һәл $\alpha = C_2 \sin b$ барабәрлијиндән C_2 -ни тәјјин етмәклә тапылыр:

$$y = \frac{\alpha}{\sin b} \cdot \sin x.$$

$b = \pi$ вә $\alpha \neq 0$ олдугда сәрһәд мәсәләсинин һәли јохдур. Чүнки $y = C_2 \sin x$ әјриләри аиләсинин һеч бир әјриси (π , α) ($\alpha \neq 0$) нөгтәсиндән кечмир.

$b = \pi$ вә $\alpha = 0$ олдугда исә сәрһәд мәсәләсинин сонсуз сәјдә һәли вар: $y = C_2 \sin x$ әјриләринин һәр бири (π , 0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјридир.

Гәјд едәк ки, (4) тәнлији үчүн (5) шәртләриндән ләһа үмуми олан башга сәрһәд шәртләри дә әрмәк олар. Сәрһәд шәртләри бирчинсли олдугда ујғун сәрһәд мәсәләсикә бирчинсли сәрһәд мәсәләси, бирчинсли олмадыгда исә бирчинсли олмајан сәрһәд мәсәләси дејилир.

Инди (4) тәнлијинин бирчинсли

$$\alpha_0 y'(a) + \alpha_1 y(a) = 0 \quad (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0), \quad (6)$$

$$\beta_0 y'(b) + \beta_1 y(b) = 0 \quad (\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0)$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәлини тапмагла мәшғул олар. Бу сәрһәд мәсәләсини ((4), (6)) илә ишарә едәк вә фәрз едәк ки, онун јеканә һәли вардыр.

Тутаг ки, $y_1(x)$ функцијасы (4) тәнлијинә ујғун олан бирчинсли

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (7)$$

тәнлијинин (6) сәрһәд шәртләринин биринчисини өдәјән тривиял олмајан һәли, $y_2(x)$ исә (7) тәнлијинин (6) сәрһәд шәртләринин иккинчисини өдәјән тривиял олмајан һәлидир.

$$\alpha_0 y_1'(a) + \alpha_1 y_1(a) = 0,$$

$$\beta_0 y_2'(b) + \beta_1 y_2(b) = 0.$$

Ајдындыр ки, $y_1(x)$ функцијасы (6) шәртләринин иккинчисини өдәјә билмәз, чүнки әкс һалда ихтијари C эдәди үчүн

$y = C y_1(x)$ функцијасы ((7), (6)) сәрһәд мәсәләсинин һәли олар. Бу исә ((4), (6)) сәрһәд мәсәләсинин сонсуз сәјдә һәли олдугуну көстәрир ки, бу дә фәрзијәмизә эндир. Ејни гәјдә илә дә көстәрмәк олар ки, $y_2(x)$ функцијасы (6) шәртләринин биринчисини өдәјә билмәз:

$$\beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1(b) \neq 0, \quad (8)$$

$$\alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 y_2(a) \neq 0.$$

$y_1(x)$ вә $y_2(x)$ функцијалары бирчинсли (7) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләридир (хәтти асылы һәлләр ејни бирчинсли сәрһәд шәртләрини өдәјир). Буна көрә дә һәмин тәнлијин үмуми һәли

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (9)$$

кини јазылар. Бу һәлдән истифадә етәрәк (4) тәнлијинин һәлини сабитин варијасијасы үсулу илә тапмаг олар. (9) һәлини

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \quad (10)$$

кини јаздыгда $C_1(x)$ вә $C_2(x)$ функцијаларыны тапмаг үчүн

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = f(x) \end{cases}$$

хәтти тәнликлар системи алыныр (§ 8, (17)). Бу системиң әсас детерминанты хәтти асылы олмајан $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ функцијаларының Вронски детерминантыдыр:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Буна көрә дә һәмин системиң һәли вар:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x) f(x)}{W(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)}.$$

Бурадан

$$C_1(x) = -\int_a^x \frac{y_2(t) f(t)}{W(t)} dt + c_1, \quad C_2(x) = \int_a^x \frac{y_1(t) f(t)}{W(t)} dt + c_2.$$

$$C_2(x) = \int_a^x \frac{y_1(t) f(t)}{W(t)} dt + c_2$$

алыныр (c_1 вә c_2 сабит эдәләрәтир). $C_1(x)$ вә $C_2(x)$ функцијалары үчүн тапылмыш бу гәмәтләри (10) барабәрлијиндә јеринә јаздыгда (4) тәнлијинин үмуми һәли алыныр.

$$y(x) = y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(t) f(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(t) f(t)}{W(t)} dt + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \quad (11)$$

Бу ҳаллини (6) шартларини өдәмәси үчүн $p_1 = p_2 = 0$ олмалы. Догрудан да, $\sigma_0 y_1'(a) + a_1 y_1(a) = 0$ олдуғуну нәзәрә ала- раг, (11) функцијасы үчүн (6) шартларини биринчисини јаз- дыгда

$$p_1 [a_0 y_1'(a) + a_1 y_1(a)] + p_2 [a_0 y_2'(a) + a_1 y_2(a)] = 0$$

вә ја

$$p_2 [a_0 y_2'(a) + a_1 y_2(a)] = 0$$

олар. Бурадан (8) мүнәсибәтинә кәрә $p_2 = 0$ алыныр. Ејни гајда илә дә $p_1 = 0$ олдуғу исбат олунур.

Беләликлә, ((4), (6)) сәрһәд мәсәләсиниң һәлли

$$y(x) = y_1(x) \int_a^b \frac{y_2(t) f(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(t) f(t)}{W(t)} dt \quad (12)$$

вә ја

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt \quad (13)$$

шәклиндә алыныр; бурада

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{y_1(t) y_2(x)}{W(t)}, & a < t < x, \\ \frac{y_1(x) y_2(t)}{W(t)}, & x < t < b. \end{cases} \quad (14)$$

$G(x, t)$ функцијасына бахылан ((4), (6)) сәрһәд мәсәләси- ниң Грин функцијасы вә ја тәсир функцијасы дејилир. (14) ифадәсиндән ајдындыр ки, ((4), (6)) сәрһәд мәсәләсиниң Грин функ- цијасы (4) тәңлијиниң сәг тәрәфиндәки $f(x)$ функција- сыннан асылы дејилдир. Грин функцијасы бирчинсли (7) тәң- лијиниң хәтти асылы олмајан $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ һәлләри вәситә- силә гурулу. Грин функцијасы мә'лум олдуғда ((4), (6)) сәр- һәд мәсәләсиниң һәлли (13) дүстуру вәситәсилә тапылыр

Мисал 1.

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (15)$$

сәрһәд мәсәләсиниң Грин функцијасыны гурумалы.

Верилмиш тәңлијә ујғун олан бирчинсли $y'' + y = 0$ тәңлијя- ниң үмуми

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

һәллиндән $y(0) = 0$ вә $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ шәртләриниң ујғун олараг өдәјән ашағыдакы хәсуси һәлләр алыныр:

$$y_1(x) = C_2 \sin x, \quad y_2(x) = C_1 \cos x.$$

(14) бәрәбарлијинә кәрә

$$G(x, t) = \begin{cases} -\cos t \cdot \sin x, & 0 < x < t, \\ -\sin t \cdot \cos x, & t < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

олар. Бу Грин функцијасы вәситәсилә (15) сәрһәд мәсәләсиниң һәлли

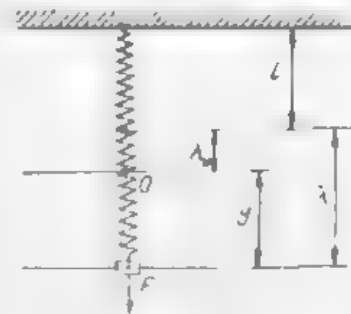
$$y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, t) f(t) dt$$

кяни гурулу.р.

§ 11. МЕХАНИКИ РӘГСЛӘРИН ДИФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИЈИ

Хәтти диференциал тәңликләр нәзәријәси бир чох практи- ки мәсәләләрин һәллиндә кенш истифадә олунур. Буна рәгсн просесләрин тәлғигини мисал кәстәрмәк олар. Мұхтәлиф рәгс просесләри хәтти диференциал тәңликләр вәситәсилә тәсвиролу- нур вә онлар вәситәсилә өјрәни- лир.

Тутаг ки, чәкиси P (вә күт- ләси m) олан јүк бир учу бәр- кидилмиш вә тәбии узунлуғу l олан еластики јалдан асылмыш- дыр (шәкил 248). Бу јүк аша- ғыја тәрәф дартылараг (вә ја јухарыја тәрәф сыхылараг) бу- рахылдыгда, мұәјјән гәкунла рәгс етмәјә башлајыр. Бу рәгсин һәрәкәт танууу нечә олар?



Шәкил 248

Мүһитиң мугавимәти нәзәрә алынмадыгда нөгтәниң һәрә- кәт тануууу тәғринәтән диференциал тәңликләр вәситәсилә (XXX, § 1) чыхарылмышдыр.

Бурада үмуми һалә бахылыр.

Тутаг ки, јүк асылмыш јал λ , гәдәр узандыгдан сонра та- рәзлүг вәзијјәтиниң алыр. Бу тарәзлүг вәзијјәтиндә јалдн уч нөгтәсиниң 0 илә ишәрә едәк. Фәрз едәк ки, бу оху 0 нөг- тәсиндә јалдан бәркидилдир нөгтәјә тәрәф узатылмышдыр. Ве- рилмиш андә јалын узанмасын λ илә ишәрә етсәк, ондә һә- мин андә јүкүн 0 нөгтәсиндән олан мәсәфәси $\lambda - \lambda_0$ фәргинә бәрәбәр олар. Бу андан јүкә ашағыдакы гүввә, әр тәсир едәр.

1. Јүкүн P ағырлыг гүввәси.

2. Тарәзлүг вәзијјәтиндән чыхарылмыш јалн өз вәзијјәтинә гәттаран гүввә (јалын еластиклүк гүввәси). Буна бурада гүввәсн дејилир вә јүк тануууа кәрә бу гүввә јалын узунлуғуниң

артымы ила мүнәсиб олуд— κ ифадәсинә барабардир. Бура-
да, һәр λ үчүн сабит олан κ ($\kappa > 0$) кәмијәти „ λ јын сәртли-
јини“ кәстәрир. λ јын еластиклик гүввәси һәрәкәт истигамә-
тинин әксинә јөнәлмишдир.

3. Јүкүн һәрәкәтинә мане олан вә һәрәкәтин сүр'әти ила
мүнәсиб олан мүнһитин мугавимәт гүввәси. Бу гүввә дә
јүкүн һәрәкәт истигамәтинин әксинә јөнәлмишдир вә
— $\gamma \frac{dy}{dt}$ ифадәсинә (γ —сабит > 0) барабардир.

Онда Нјутовун икинчи ганунуна кәрә λ јын һәрәкәт тән-
лији

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = P - \kappa \lambda - \gamma \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

кимн јазылар. Сүкунәт һалында λ јын еластиклик гүввәси јүк-
лә тәвәзләшдигиндән $P = \kappa \lambda_0$ олмалыдыр. Бу һалда $P - \kappa \lambda =$
 $= \kappa (\lambda_0 - \lambda) = -\kappa y$ олур вә (1) тәнлији ашағыдакы кимн јаз-
зылар:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\kappa y - \gamma \frac{dy}{dt}$$

вә λ $\frac{\kappa}{m} = \omega^2$, $\frac{\gamma}{m} = 2\mu$ ишарәләрни кәбул етдикдә

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\mu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (2)$$

Бу тәнлијә јүкүн сәрбәст рәгсләри тәнлији дејилдир.

Јүк асылмыш λ јә бир харичи $f(t)$ гүввәси шагули истига-
мәтдә тә'сир етдикдә λ јын һәрәкәт тәнлији

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\mu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t) \quad (3)$$

шәклиндә јазылар. (3) тәнлијинә јүкүн мәжбури рәгсләри тән-
лији дејилдир. Ајындыр ки, (2) тәнлији икитәртибли сабит әм-
саллы хәтти бирчинсли, (3) тәнлији исә икитәртибли сабит
әмсаллы бирчинсли олмајан хәтти диференснәл тәнликдир.
Инди бу тәнликләри һәр бирики ајрылыгда тәдгиг едәк.

Сәрбәст рәгсләр

(2) сәрбәст рәгсләр тәнлијинин характеристик тәнлији

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = 0 \quad (4)$$

олар. Бурада үч һал ола биләр.

I һал. Характеристик тәнлијин λ_1 вә λ_2 көкләри һәгиги вә
мүхтәлифдир:

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}, \quad \mu^2 - \omega^2 = R^2 > 0.$$

Бу һалда $\lambda_{1,2} = -\mu \pm R$ вә $R < \mu$ олдугундан λ_1 вә λ_2 көк-
ләринин икиси дә мәңфи олар. Онда (2) тәнлијинин үмуми
һәлли

$$y = C_1 e^{-(\mu-R)t} + C_2 e^{-(\mu+R)t} \quad (5)$$

шәклиндә јазылар. Бурадан ајындыр ки, јүкүн һәрә әти дөв-
ри дејилдир вә рәгси характер дашымыр.

II һал. Характеристик тәнлијин көкләри һәгиги вә бара-
бардир:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu < 0, \quad \mu^2 - \omega^2 = 0.$$

Онда (2) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = C_1 e^{-\mu t} + C_2 t e^{-\mu t} \quad (6)$$

шәклиндә олар. Бу һалда да јүкүн һәрәкәти дөври дејилдир
вә рәгси характер дашымыр.

Һәр ики һалда $t \rightarrow \infty$ шәртиндә $y \rightarrow 0$ олур. Бунун сәбәби
физики оларак одур ки, $\mu^2 > \omega^2$ вә λ $\gamma^2 > 4mk$ олдугундан мүн-
һитин мугавимәт гүввәси (вә λ γ әмсалы) λ јын еластиклик
гүввәсиндән чох бөјүкдүр, буна кәрә дә λ јын еластиклик
гүввәси јүкү 0 таратлыг нөгтәси әтрафында рәгси һәрәкәтә
сәвг едә билмир. Әкәр $y(0) = y_0$ вә $y'(0) = V_0$ башлангыч
шәртләри верилсә, онда (5) вә (6) барабарликләриндән C вә
 C_2 әмсалларыны тапараг, һәмнн функсијалары ујгун оларак

$$y = e^{-\mu t} \left(y_0 \operatorname{ch} Rt + \frac{V_0 + V_0}{R} \operatorname{sh} Rt \right), \quad (5')$$

$$y = e^{-\mu t} [y_0 + (y_0 \mu + V_0) t] \quad (6')$$

шәклиндә јазылар.

III һал. Характеристик тәнлијин көкләри комплексдир:

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\tau, \quad \tau^2 = \omega^2 - \mu^2, \quad \tau = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}.$$

Бу һалда (2) тәнлијинин үмуми һәлли ашағыдакы кимн
јазылар:

$$y = e^{-\mu t} (C_1 \cos \tau t + C_2 \sin \tau t). \quad (7)$$

Һәлли физики мә'насыны изәһ етмәк үчүн ону башга шәк-
лә кәтирмәк даһа мәгсәдәујгундур. Бу мәгсәдлә (7) барабар-
лијинин сағ тәрәфини $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ифадәсинә вураг вә бәләк:

$$y = A e^{-\mu t} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \tau t - \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \tau t \right)$$

$$\sin \varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \quad \text{вә} \quad \cos \varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

кәбул етсәк,

$$y = A e^{-\mu t} (\sin \varphi \cos \tau t + \cos \varphi \sin \tau t)$$

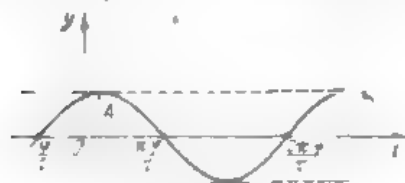
вә λ

$$y = A e^{-\mu t} \sin (\tau t + \varphi) \quad (8)$$

олар. Әкәр бу тәнликдә $\mu = 0$ оларса, λ јын мүнһитин мугави-
мәти олмәзсә, онда λ јдан асылмыш јүкүн һәрәкәт гануну
ашағыдакы кимн јазылар:

$$y = A \sin (\tau t + \varphi). \quad (9)$$

Бу тэнхлэг гармоник рэгсн тэнхлэгидир (шэкил 249). A — тах у эдэдн гармоник рэгсн амплитуду, $\tau t + \varphi$ аргументи исэ рэгсн фазасы адланур. Фазанын, $t=0$ олдугда гнжмэтинэ, φ эдэдинэ рэгсн башлангыч фазасы, τ эдэдинэ исэ рэгсн тезлиги дежилир. Гармоник рэгсн A амплитуду ээ φ башлангыч фазасы $y(0)=y_0$, $y'(0)=V_0$ башлангыч шэртлэри вэсн тэснлэ тэ'инэ олунур:



Шэкил 249

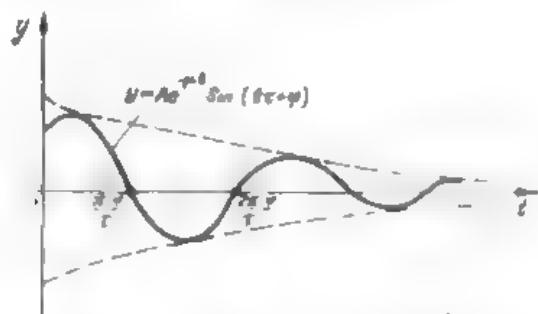
$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}}$$

$$\varphi = \arctg \frac{y_0}{V_0/\omega}$$

Рэгсн $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{m/q}$ периоду ээ τ тезлиги φ айын сэртлэгидэн ээ системн күтлэснэдэн асылдыр.

$\mu \neq 0$ олдугда, φ ээ мүнхитин мүгавимэт гүввэсн сыфыр олмалыгда, φ айын хэрэкэти (8) тэнхлэги илэ тэ'инэ олунур. Бу халда да $\sin(\tau t + \varphi)$ функциясн дэври олдугундан хэрэкэти рэгсн хэрэкэтидир, лэкин онун $Ae^{-\mu t}$ амплитуду сабит олмайб $t \rightarrow \infty$ шэртиндэ рэгсн амплитуду эзэлэраг сыфра жахынлашур: $Ae^{-\mu t} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$). Дэмэлн, бу халда рэгслэр сөнэндир (шэкил 250) Сөнэн рэгслэрин периоду

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}$$



Шэкил 250

дүстүрү илэ тэ'инэ олунур. Сөнэн рэгслэрин амплитудлэри ортаг нуругу $D = e^{-\frac{\mu}{T}t} = e^{-\frac{\mu}{2}t}$ эдэди олан эзэлэн хэндэсн снлсклэ эмэлэ кэтирир. D эдэдинэ сөнмэ декременти, $\ln D = -\frac{\mu}{2}t$ эдэдинэ исэ сөнмэди логарифмик декременти дежилир.

Мэчбури рэгслэр

Бурада (3) мэчбури рэгслэр тэнхлэгинн

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = f(t) \quad (10)$$

хүсуси халыны ($\mu=0$, φ ээ мүнхитин мүгавимэт гүввэсн олмажан халы) тэдгиг эдэж. Бирчинсли олмажан (10) тэнхлэгинэ уйгун олан бирчинсли тэнхлэги $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ характеристик тэнхлэгиннн көклэри $\lambda_1 = i\omega$ ээ $\lambda_2 = -i\omega$ хэжэли эдэдлэр олдугундан (10) тэнхлэгинн үмүмн халли

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + y_0(t)$$

шэкилдэ олар; бурада $y_0(t)$ функциясн (10) тэнхлэгиннн хүсуси халлидир. Бу барабарлиги саг тэрэфиндэки биринчи икн хэддин чэмини y хуарыда көстэрилэн галда илэ чэвирмэклэ ону

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) + y_0(t) \quad (11)$$

шэкилдэ y ээмаг олар.

(11) барабарлиги көстэрил кн, y күн мэчбури рэгслэри онун сэртбэст рэгслэри (буна (11) барабарлиги саг тэрэфиндэки биринчи халд уйгундур) илэ харичи (хэжэчланландыричч) $f(t)$ гүнвэсннн тэ'сир илэ эмэлэ калэн мэчбури рэгслэрин топланмасындэн эмэлэ кэллр. Фэрэ эдэж кн, y күн тэ'сир эдэм харичи гүввэ $f(t) = M \sin \omega t$ шэкилдэкир, φ ээ дэври функциядир (M сабит $\neq 0$, ω сабит > 0). Бурада икн хал мүмкүңдүр.

I хал. Сэртбэст рэгслэрин ω тезлиги харичи гүввэсн ω тезлигинэ барабар дежилдир: $\omega \neq 0$.

Бу халда (10) тэнхлэгинн $y_0(t)$ хүсуси халлини

$$y_0(t) = Q \cos \omega t + R \sin \omega t$$

шэкилдэ ахтармаг лэзымдыр (§ 9, IV). Бурадан

$$y_0(t) = -\frac{1}{\omega} Q \sin \omega t + \frac{1}{\omega} R \cos \omega t,$$

$$y_0(t) = -\frac{1}{\omega^2} Q \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} R \sin \omega t$$

гөрэмэлэриннн тапарат, (10) тэнхлэгиндэ y ээ R ээмаглэрыны таппаг үчүн

$$\begin{cases} K\omega^2 - R\omega^2 = M, \\ Q\omega^2 - Q\omega^2 = 0 \end{cases}$$

тэнхлэклэр системн алынур. Бу системн халл этмэклэ Q ээ R ээмаглэры таппылыр:

$$R = \frac{M}{\omega^2 - \omega^2}; \quad Q = 0 \quad (\omega \neq \omega, \quad \omega \neq -\omega).$$

Белэликлэ, (10) тэнхлэгиннн хүсуси халли

$$y_0(t) = \frac{M}{\omega^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

ээ үмүмн халли

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{M}{\omega^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (12)$$

олар. Демэли, жүкүн һаракәти \neq тезликли сәрбәст рәгсләрлә һәҗәчанландырычы гүввәнин тәсири илә әмәлә кәләи \neq тезликли мәчбури рәгсләрин топланмасындан әмәлә кәлир. (12) ифадәсиндән ајдындыр ки, бу һаракәтин амплитуду мәһдуддур.

II Һал. Сәрбәст рәгсләрин \neq тезлији харичи гүввәнин \neq тезлијинә барабардир: $\omega = \alpha$.

Бу һалда (10) тәнлијини $y_0(t)$ хүсуси һәлли

$$y_0(t) = t(\cos \alpha t + R \sin \alpha t)$$

шәклиндә ахтарылмалыдыр (§ 9, IV). Бу функцијаны тәнликдә Јеринә Јазараг, R әмсалларыны тапмаг олар:

$$R = 0, \quad Q = -\frac{M}{2\alpha}.$$

Нәтичәдә (10) тәнлијини хүсуси һәлли

$$y_0(t) = -\frac{M}{2\alpha} t \cos \alpha t$$

вә үмуми һәлли

$$y = A \sin(\alpha t + \varphi) - \frac{M}{2\alpha} t \cos \alpha t \quad (13)$$

шәклиндә олур. Бүрәтан ајдындыр ки, Јенә дә жүкүн һаракәти \neq тезликли сәрбәст рәгсләрлә, һәҗәчанландырычы \neq тезликли харичи гүввәнин тәсири илә әмәлә кәләи \neq тезликли мәчбури рәгсләрин топланмасындан әмәлә кәлир. Лакин t һалдан фәрғи олараг бурада мәчбури рәгсини $-\frac{M}{2\alpha} t$ амплитуду t

заманы гејри-мәһдуд артанда гејри-мәһдуд олараг артыр. Харичи гүввәнин M амплитуду кичик олдуғда вә белә t кифәјәт гәдәр бөјүк олдуғда мәчбури рәгсини амплитуду истәнкләи гәдәр бөјүк ола биләр. Јүкүн сәрбәст рәгсләри тезлији илә һәҗәчанландырычы харичи гүввәнин тезлији барабар олдуғда баш верән бу һадисәјә техникада *резонакс* дејилир.

Чох да бөјүк олмајан харичи гүввәнин тәсири илә кифәјәт гәдәр бөјүк амплитудлу рәгсләрини алынмасындан, Јә'ни резонакс һадисәсиндән радиотехникада истифадә олуиур. Бир чох һалларда исә кифәјәт гәдәр бөјүк амплитудлу рәгсләрин әмәлә кәлмәси зәрәрлидир, чүнки резонакс бәзән гургуларын (көрпүләрин, бәндләрин вә с.) дағылмасына сәбәб олур.

АХХИ ФӘСИЛ

ДИФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИ

§ 1. ҮМҮМИ АНЛАҢЫШЛАР

Тутаг ки, x аргументи, ахтарылан $y_k = y_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) функцијалары вә онларын биртәртибли $y_k = y_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) тәрәмәләриндән асылы олан

$$F_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \quad (1)$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

тәнликләри верилмишдир. Бу мүнәсибәтә *биртәртибли диференциал тәнликләр системи* дејилир.

(1) системиниң тәнликләри ахтарылан функцијаларын тәрәмәләринә нәзәрән һәлл етдилдикдә

$$y_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

системи алыиыр. (2) системинә диференциал тәнликләрин n -тәртибли нормал системи дејилир. Нормал системдә тәнликләрин сајы ахтарылан функцијаларын сајына барабар олур.

(2) системи

$$y_k = f_k(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

шәклиндә олдуғда, Јә'ни x аргументи (2) системиниң сағ тәрәфинә ашкар шәкилдә дахил олмадығда, она *автоном* вә ја *динамик систем* дејилир.

Биз бурада диференциал тәнликләрин јалпы нормал системини өјрәнәчәјик.

(2) нормал системиниң бүтүн тәнликләрини өдәјән, Јә'ни онлары ејнилијә чевирән n дәнә $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцијалары чохлуғуна һәмни системин *һәллә* дејилир. Системиң һәлләрини тапмаг мәсәләси онун *интегралламасы* адланыр.

Тәнликләр системиниң һәр бир

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$$

һәлли x, y_1, y_2, \dots, y_n координатлы $(n+1)$ -өлчүлү Евклид фәзасында бир әјри тәјән едир. Бу о демәкдир ки, x аргументи мұзјән (a, b) интервалында дәјишдикдә $(n+1)$ -өлчүлү фәзанын $(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ нөгтәси һәмни фәзада бир әјри тәсвир едир. Бу әјријә системин интеграл әјрисини дејилир. $x = x_0$ олдуғда $y_k(x_0) = y_k^0$ ($k=1, 2, \dots, n$) олурса, онда интеграл әјрисини $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ нөгтәсиндән кечир.

(2) нормал системиниң

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0 \quad (4)$$

шәртләрини өдәјән $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ һәллини тапылмасы мәсәләсинә Коши мәсәләси, $x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ әдәдләринә исә башланғыч шәртләри вә башланғыч гијмәтләри дејилир. (2) нормал системиниң (4) шәртләрини өдәјән һәллини тапмаг, һәндәси олараг, $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тапмаг демәкдир.

(2) нормал системиниң верилмиш башланғыч шәртләри өдәјән һәллини варлығы вә јекәнәлији үчүн кафи шәрт ашәғидәки теоремдә көстәриляр.

Коши теорем. *Тутаг ки, (2) системиниң сағ тәрәфини олан $f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($k=1, 2, \dots, n$) функцијалары x, y_1, y_2, \dots, y_n дәјишәнләриниң $(n+1)$ -өлчүлү фәзасынын һәр һансы σ областида кәсимәләишәк вә y_1, y_2, \dots, y_n дәјишәнләринә нәзәрән кәсимәләишәк*

мәҗән хусуси тәрәмәләри вардыр. Онда (2) системини мурҗән $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) интервалына тәҗән олунмуш ва (4) башлангыч шәртләрини $((x_0, y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n) \in \sigma)$ өдәҗән ва $x_0, y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n$ башлангыч гүҗәтләриндән кәсәлмәс асылы олан јекәнә

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$$

Һәлләи вар.

Бу теоремдән әјдәндәр ки, (2) системини δ областында сонсә сајда һәлли вар. Верилмиш $x_0, y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n$ башлангыч гүҗәтләрини x_0 әдәдәни саҗит саҗлајараг y_1, y_2, \dots, y_n әдәдләрини мурҗән областа дәјишдирдикдә (әлбәттә, $(x_0, y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n)$ нөгтәси Коши теореминдә кәстәрилән δ областында галмаг шәртилә) һәр бир $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ әдәдләр системинә (2) системини бир

$$y_1 = \varphi_1(x, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0), y_2 = \varphi_2(x, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0), \dots, y_n = \varphi_n(x, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$$

һәлли уҗуи олар. Бурида $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ әдәдләри уҗуи олараг C_1, C_2, \dots, C_n илә әвәз едилдикдә (2) системини n дәнә ихтијари параметрдән асылы олән

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases} \quad (5)$$

һәлли алымыр. Буна (2) системини үмуми һәлли дејилир.

Даҗа дәгиг, (2) системини ихтијари C_1, C_2, \dots, C_n параметрләриндән асылы олан (5) һәллине о заман системини үмуми һәлли дејилир ки, һәмни һәлдән C_1, C_2, \dots, C_n параметрләринә мурҗән $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ гүҗәтләрини вермәклә истәнилән $x_0, y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n$ башлангыч шәртләрини (әлбәттә, $(x_0, y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n) \in \sigma$ олмалыдыр) өдәҗән һәлли алмаг мүмкүн олсун. Системини үмуми һәллиндән C_1, C_2, \dots, C_n параметрләринә конкрет $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ гүҗәтләри вермәклә алынап һәллә һәмни системини хусуси һәлли дејилир.

(2) системини (5) үмуми һәлли мәлүм олдугда (4) башлангыч шәртләрини өдәҗән һәлли тапмаг үчүн

$$\varphi_k(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_k^0, k = 1, 2, \dots, n$$

системиндән C_1, C_2, \dots, C_n параметрләрини тапыб, (5) мүнәсибәтиндә јеринә јазмаг ләзымдыр.

Фәрз едәк ки, (2) системини (5) үмуми һәлли C_1, C_2, \dots, C_n параметрләринә нәзәрән һәлл олунмушдур:

$$\varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_1,$$

$$\varphi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_2,$$

$$\dots \dots \dots \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_n. \quad (6)$$

(6) бәрәбәрликләрини һәр биринә (2) системини биринчи интегралы дејилир (2) системини n дәнә (6) биринчи интеграллары чохлау һәмни системини үмуми интегралыны тәшкил едир.

Үмумијәтлә $\varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ функцијасында y_1, y_2, \dots, y_n әвәзинә (2) системини һәр һансы һәллини јаздыгда

$$\varphi_k[x, \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots, \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)] = C_k$$

ејилили өдәниләрсә, онда һәмни $\varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ функцијасына (2) системини интегралы.

$$\varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_k$$

бәрәбәрлијинә исә системини биринчи интегралы дејилир. Системини биринчи интеграллары чохла биләр.

Системини верилмиш n дәнә (6) биринчи интегралы ва $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ функцијалары онун үмуми интегралыны тәшкил етмәси үчүн онлар ахтарылан y_1, y_2, \dots, y_n функцијаларына нәзәрән асылы олмачалыдыр. Бу о демәкдир ки, y_1, y_2, \dots, y_n функцијаларындан ашкар шәкилдә асылы олмајән һеч бир F функцијасы үчүн

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0$$

мүнәсибәти өдәнилимиз.

Бу тәклифия доғрулуғу үчүн зәрури вә кафи шәрт $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ функцијаларының y_1, y_2, \dots, y_n дәјишәнләринә нәзәрән Јакобианының ејниликлә сифра бәрәбәр олмамасыдыр:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0. \quad (7)$$

Бурадан әјдәндәр ки, системини n дәнә асылы олмајән биринчи интегралы мәлүм олдугда онун үмуми интегралы тапылмыш олур, бу исә системини һәлл олунмасы демәкдир.

Системини биринчи интегралларыны тапмаг үчүн үмуми гәјдә кәстәрмәк мүмкүн дејилдир. Верилмиш системини чевирип, мәҗән тез интеграллана биләп тәңликләр алмаг мүмкүн олур. Белә тәңликләрә интегралланан комбинацијалар дејилир. Әхәр интегралланан комбинација $d\varphi[x, y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$ шәклиндә тәңлик оларсә, онда $\varphi[x, y_1, y_2, \dots, y_n] = C$ бәрәбәрлијә системини биринчи интегралы олар.

Мисал.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 3y_2 \end{cases} \quad (8)$$

нормал системини үмуми интегралыны тапылам.

(8) барабарликларини тараф-тарафга топладыгда

$$\frac{d(y_1 + y_2)}{dx} = 5(y_1 + y_2), \quad \frac{d(y_1 - y_2)}{y_1 + y_2} = 5dx$$

мүнәсибәти вә ахырынчы барабарлији интегралладыгда

$$y_1 + y_2 = C_1 e^{5x}$$

барабарлији алыныр. Буну

$$(y_1 + y_2) e^{-5x} = C_1 \quad (9)$$

кимм дә јазмаг олар.

(8) барабарликларини тараф-тарафга чыхмагла исә

$$(y_1 - y_2) e^{-x} = C_2 \quad (10)$$

мүнәсибәтини алмаг олар.

(9) вә (10) барабарликләри (8) системиниң биринчи интегралларыдыр. Јохламаг олар ки, $\psi_1 = (y_1 + y_2) e^{-5x}$ вә $\psi_2 = (y_1 - y_2) e^{-x}$ функцијаларынын y_1 вә y_2 дәјишәнләринә нәзәрән Јакобианы $-2e^{-5x}$ ифадәсинә барабар олдуғундан (7) шәрти өдәнилир, јәни онлар y_1 вә y_2 дәјишәнләринә нәзәрән асылы дејилдир. Буна көрә дә (8) системиниң үмуми интегралы

$$(y_1 + y_2) e^{-5x} = C_1, \quad (y_1 - y_2) e^{-x} = C_2$$

олар.

Гәјд едак ки, нормал системиниң һәр һансы биринчи интегралы мәлуш олдуғда онун тәртинини бир ваһид азалтмаг мүмкүндүр. Догрудан да, тутар ки,

$$\Phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C \quad (11)$$

барабарлији (2) нормал системиниң биринчи интегралыдыр вә (11) тәклији y_n дәјишәнинә нәзәрән һәлл олунадыр:

$$y_n = T(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, C). \quad (12)$$

y_n -нин бу гијмәтини (2) системиниң биринчи $n-1$ тәклијиндә јеринә јаздыгда $n-1$ тәртлиби

$$y_k' = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, T(x, y_1, \dots, y_{n-1})), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (13)$$

нормал системи алыныр. Бу системиниң һәлли илә (12) мүнәсибәти бирликдә (2) системиниң үмуми һәллини гурмага имкан верир.

Бурадан алындыр ки, (2) нормал системиниң m сәјдә асылы олмајан биринчи интегралы мәлуш олдуғда һәммин системини тәртинини m ваһид азалтмаг олар.

§ 2. НОРМАЛ СИСТЕМИН МӘҢҢУЛЛАРЫ ЈОХЕТМӘ УСУЛУ ИЛӘ ҺӘЛЛИ

Дифференциал тәкликләр системиниң бәтән интегралланан комбинасијалар сечмәклә һәлл олуна билдији јухарыда (§ 1) көстәрилди.

Нормал системи јүксәктәртлиби бир дифференциал тәклијә кәтирмәклә дә һәлл етмәк мүмкүндүр. Бу үсул ахтарылан мәңһул функцијаларын ардычыл јох едилмәсинә әсасланыр. Онун үмуми схеми ашағыда көстәрилик.

Верилимиш

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1)$$

нормал системиниң биринчи тәклијиниң һәр ики тарафиндән x -ә нәзәрән төрәмә алаг:

$$y_1' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_2' + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n'.$$

Бу барабарликдә y_1, y_2, \dots, y_n төрәмәләрини онларын (1) системиндәки f_1, f_2, \dots, f_n ифадәләри илә әвәз етдикдә

$$y_1' = \Phi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (2)$$

тәклији алыныр. (2) тәклијиниң һәр ики тарафини јенидән x -ә нәзәрән дифференциаллајараг, алынан

$$y_1'' = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} y_2' + \dots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} y_n'$$

барабарлијиндә y_1, y_2, \dots, y_n төрәмәләрини онларын (1) системиндәки f_1, f_2, \dots, f_n ифадәләри илә әвәз етдикдә

$$y_1'' = \Phi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

тәклији алыныр. Бу процеси давам етирмәклә, нәһәјәт

$$y_1^{(n)} = \Phi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (3)$$

тәклији алыныр.

Инди, фәрә едак ки,

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1' = \Phi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_1^{(n-1)} = \Phi_{n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

системи y_2, y_3, \dots, y_n дәјишәнләринә нәзәрән һәлл олуныр:

$$y_k = \phi_k(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (4)$$

Бу гијмәтләри (3) тәклијиндә y_2, y_3, \dots, y_n дәјишәнләрнә әвәзинә јаздыгда y_1 функцијасына нәзәрән бир дәнә n -тәртлиби

$$y_1^{(n)} = \Phi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \quad (5)$$

тәклији алыныр.

Тутар ки, (5) тәклијиниң үмуми һәлли тапылмышдыр:

$$y_1 = F_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (6)$$

(6) функцијасыны ($n-1$) дараа ардычыл дифференциалламагда y_1, y_2, \dots, y_{n-1} төрөмэлери x, C_1, C_2, \dots, C_n кэмийлелеринин функцијасы кими табылыр. Бу гыметлери (4) барабарлык эринде јеринэ јазмагла y_1, y_2, \dots, y_n мөһүл функцијалары тәјин о. унур:

$$y_k = F_k(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (k=2, 3, \dots, n). \quad (7)$$

(6) вә (7) функцијалары бирликдә (1) системинин

$$y_1 = F_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

$$y_2 = F_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

$$\dots$$

$$y_n = F_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

үмуми һәллини тәшкил едир.

Гейд едәк ки, индијә гәдәр апарылан мөһакимәдә таләб олунан әмәлијәтларын мүмкүн олмасы фәрз олунурду. Әлбәт-тә, бу әмәлијәтләр мүәјјән шәртләр даһилиндә апарыла биләр. Бу шәртләр өдәнилмәдикдә исә верилмиш нормал системин n -тәртибли бир тәңлијә кәтирмәк мүмкүн олмада да би әр.

Мисал.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \frac{dz}{dx} = y - 2z \end{cases} \quad (8)$$

системинин мөһүллары јохетмә үсулу илә һәлл етмәли.

Системин биринчи тәңлијинин һәр ики тәрәфини x -ә нәзәрән дифференциаллајар:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}.$$

Инди, бу тәңликлә системин биринчи тәңлијиндән z вә $\frac{dz}{dx}$ кэмийлелерини тәјин едәк:

$$\begin{aligned} z &= 2y - \frac{dy}{dx}, \\ \frac{dz}{dx} &= 2 \frac{dy}{dx} - \frac{d^2 y}{dx^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Бу гыметлери системин икинчи тәңлијиндә јеринэ јаздыгда

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3y = 0 \quad (10)$$

хәтти тәңлији алыныр. Хәтти бирчинсли (10) тәңлијинин үмуми һәлли

$$y = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x}$$

функцијасыдыр. Бу гыметни (9) барабарлајиндә јеринэ јазмагла мөһүл z функцијасы табылыр:

$$z = C_1 (2 - \sqrt{3}) e^{\sqrt{3}x} + C_2 (2 + \sqrt{3}) e^{-\sqrt{3}x}.$$

Биз јухарыда көстәрдик ки, ади дифференциал тәңликләр системини јүксәктәртибли бир тәңлијә кәтирмәк олар. Әлаһи функцијалар даһил етмәклә јүксәктәртибли бир тәңлији да нормал системә кәтирмәк олар.

Догрудан да, тутаг ки, n -тәртибли

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (11)$$

дифференциал тәңлији верилмишдир. Ашағыдакы ишарәләрн габул едәк:

$$y = y_1$$

$$y' = y_2 = y_2,$$

$$y'' = y_3 = y_3,$$

$$y^{(n-1)} = y_{n-1} = y_{n-1},$$

$$y^{(n)} = y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Онда (11) тәңлији

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

нормал системинә кәтирилмиш олур.

Инди да мүкәммәл нәзәријәси олан хәтти дифференциал тәңликләр системини илә мөһүл олар.

§ 3. ХӘТТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТӘҢЛИКЛӘР СИСТЕМИ

Дифференциал тәңликләрин нормал системи

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \quad (1)$$

шәклиндә олдугда, јәъни системин сағ тәрәфи ахтарылан y_1, y_2, \dots, y_n функцијаларына нәзәрән хәтти олдугда онә хәтти дифференциал тәңликләр системи дејилир. Бурада $a_{ik}(x)$ вә $b_k(x)$ һәр һансы (a, b) интервалында тәјин олунмуш кәсил-мәјән функцијалардыр.

(a, b) интервалында $b_k(x) = 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) олдугда (1) системинә бирчинсли хәтти дифференциал тәңликләр системи, $b_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) функцијаларынын һеч олмасы бири (a, b) интервалында ејинликлә сыфрә барабар олмадыгда исә һәмми системә бирчинсли олмајән хәтти дифференциал тәңликләр системи дејилир.

Ајдындыр ки, хэтти дифференциал тэнликлэрин (1) нормал системи амсалларынын касилмаз олдугу областда халлини варлыгы ва јеканэлији багында Коши теореминин (§ 1) шэртлэри едэнилик. Буна хэрэ дэ (1) системинин (a, b) интервалында тэјин олунуш ва јастэнилэн x_0 ү $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0 (a < x_0 < b)$ башлангыч шэртлэрини елэјэн јеканэ $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ халли вар.

Вектор—матрис ишарэлэриндэн истифада едэрэк (II, § 3), (1) системини даһа гыса шэкилдэ дэ јазмаг олар. Бу мәсәдлэ

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ишарэлэриндэн истифада олунур. Онда (1) тэнликлэр системи $Y' = A \cdot Y + B$ (2)

вектор—матрис шэкилдэ јазылыр.

Бурада Y' сүтун—матриса Y матрисинин төрәмәси адланыр. һәр бир сүтун—матриса координатлары һәмни матрисини элементлэри олан вектор, кими дэ бахмаг олар. Бу һалда (2) тэнлијинин халли Y сүтун—матриса ва ја $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ вектору олар.

(2) хэтти дифференциал тэнликлэр системинэ ујгун олан бирчинсли хэтти дифференциал тэнликлэр системини

$$Y' = A \cdot Y \quad (3)$$

кими јазмаг олар.

Јүксәктәртибли хэтти дифференциал тэнликлэр нәзәријәсиндэ олдугу кими (XXXI, § 8), бурада да исбат етмәк олар ки, бирчинсли олмајан (2) системинин үмуми халли онун бир Y_0 хүсуси халли илэ ујгун (3) бирчинсли системинин \bar{Y} үмуми халлини һәминә барабардир:

$$Y = Y_0 + \bar{Y}. \quad (4)$$

Хэтти асылы олмајан Y_1, Y_2, \dots, Y_n векторлары (ва ја сүтун—матрислэри) (3) бирчинсли системинин халлэри олдугда һәмни системин үмуми халли

$$\bar{Y} = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n \quad (5)$$

кими гурулулр. $Y_n(y_{n1}(x), y_{n2}(x), \dots, y_{nn}(x)) (n = 1, 2, \dots, n)$ векторлар системинин хэтти асылы олмамасы онларын Вронски детерминанты адланан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \quad (6)$$

детерминанты илэ тэјин олунур. (3) бирчинсли системинин $[a, b]$ парчасында хэтти асылы олмајан $Y_n(y_{n1}(x), y_{n2}(x), \dots, y_{nn}(x)) (n = 1, 2, \dots, n)$ халлэринин (6) Вронски детерминанты һәмни парчанын бүтүн нөггәлэриндэ сыфырдан фәрглидир.

(3) бирчинсли системини хэтти асылы олмајан $Y_n(y_{n1}(x), y_{n2}(x), \dots, y_{nn}(x)) (n = 1, 2, \dots, n)$ халлэри ва буна хэрэ дэ (5) үмуми халли мәлүм олдугда (2) системинин үмуми халлини сабитни вариасијасы үсүлу илэ тапмаг олар. Бу мәсәдлэ (2) системинин халлини

$$Y = \sum_{k=1}^n C_k(x) Y_k \quad (7)$$

шэкилдэ ахтарырлар бурада $C_k(x)$ намаәлүм функцијалардыр. Бу гијмәти (2) системиндэ јаздыгда

$$\sum_{k=1}^n C_k'(x) Y_k + \sum_{k=1}^n C_k(x) Y_k' = A \sum_{k=1}^n C_k(x) Y_k + B$$

мүнасибәти алыныр. $Y_k' = A Y_k$ (Y_k векторлары (3) системинин халли олдуғундан) ејнијилики нәзәрә алсаг,

$$\sum_{k=1}^n C_k'(x) Y_k = B \quad (8)$$

олар. (8) барабарлији ашағыдаки n дәнә тэнликлэр системинә эквивалентдир

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n C_k'(x) y_{1k} = b_1(x), \\ \sum_{k=1}^n C_k'(x) y_{2k} = b_2(x), \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n C_k'(x) y_{nk} = b_n(x). \end{cases} \quad (9)$$

Бу системин әсас детерминанты хэтти асылы олмајан Y_1, Y_2, \dots, Y_n векторлар системинин $W(x)$ Вронски детерминантыдыр.

$W(x) \neq 0$ олдуғундан (9) системиндән $C_k'(x) (k = 1, 2, \dots, n)$ функцијалары биргијмәтли тэјин олунур:

$$C_k'(x) = \varphi_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Бурадан $C_k(x)$ функцијаларыны

$$C_k(x) = \int \varphi_k(x) dx + C_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

шэкилдэ тэјин едэрэк, (7) барабарлијиндэ јаздыгда (2) системинин үмуми халли алыныр.

Тухарьда көстөрдүк ки, (3) бирчинсли системинин (5) үмүмү
 нөлүнүн гурьмаг үчүн нөмүн системин хатти асылы олможан л
 дэна хүсүсү Y_1, Y_2, \dots, Y_n нөлүнүн билмэк лазымдыр. Эмсал-
 лары функцијалар олан хатти бирчинсли тэндикләр системинин
 хатти асылы олмајан нөлүнүн тәһмаг үчүн үмүмү үсул јох-
 дур. Јакин эмсаллары сабит әдәдләр олан хатти бирчинсли
 тәндикләр системини үчүн белә үсул вардыр.

§ 4. САБИТ ЭМСАЛЛЫ ХАТТИ БИРЧИНСЛИ ТЭНДИКЛӘР СИСТЕМИ

Тутаг ки,

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{cases} \quad (1)$$

хатти бирчинсли тәндикләр системинин a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$)
 эмсаллары сабит әдәдләрдыр. (1) системинин хүсүсү нөлүнүн

$$y_1 = a_1 e^{\lambda x}, y_2 = a_2 e^{\lambda x}, \dots, y_n = a_n e^{\lambda x} \quad (2)$$

шәклиндә ахтараг. a_1, a_2, \dots, a_n вә λ әдәдләрнүн елә сечәк ки,
 (2) функцијалары (1) системинин нөлүн олсун.

(2) функцијаларыны вә онларын

$$y_1' = a_1 \lambda e^{\lambda x}, y_2' = a_2 \lambda e^{\lambda x}, \dots, y_n' = a_n \lambda e^{\lambda x}$$

тәрәмәләрнүн (1) системиндә јеринә јаздыгда

$$\begin{cases} \lambda a_1 e^{\lambda x} = (a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + \dots + a_{1n}a_n) e^{\lambda x}, \\ \lambda a_2 e^{\lambda x} = (a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + \dots + a_{2n}a_n) e^{\lambda x}, \\ \vdots \\ \lambda a_n e^{\lambda x} = (a_{n1}a_1 + a_{n2}a_2 + \dots + a_{nn}a_n) e^{\lambda x} \end{cases}$$

системини, тәндикләрин һәр ким тәрәфини $e^{\lambda x}$ вуруғуна ихтисар
 етдикдә исә

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)a_1 + a_{12}a_2 + \dots + a_{1n}a_n = 0, \\ a_{21}a_1 + (a_{22} - \lambda)a_2 + \dots + a_{2n}a_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}a_1 + a_{n2}a_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)a_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

системини алыныр. Бу систем a_1, a_2, \dots, a_n мәчһулларынә нәзәрән
 бирчинсли хатти чәбри тәндикләр системидир. (3) бирчинсли
 системинин детерминанты

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

олар. $\Delta(\lambda) \neq 0$ олдугда (3) бирчинсли системинин јалғыз $a_1 =$
 $a_2 = \dots = a_n = 0$ сыфур (трианал) нөлүн вар. Бу исә (2) бә-
 рабәрликләринә көрә (1) системинин јалғыз

$$y_1(x) = y_2(x) = \dots = y_n(x) = 0$$

сыфур нөлүнүн верир.

Демәли, (3) бирчинсли системинин сыфурдан фәргли нөл-
 лийн олмасы үчүн нөмүн системин $\Delta(\lambda)$ детерминантын
 сыфра бәрабәр олмасы зәрури вә кафидир (II, § 3):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

(4) бәрабәрлији λ -ја нәзәрән n -дәрәжәли чәбри тәндикидр.
 Ола (1) системини характеристик тәнлијин дејиләр

Чәбрин әсас теореминә (XVIII, § 8) көрә (4) чәбри тәнли-
 јинин n дәнә һәғиги вә ја комплекс көкү (көкләрин тәкряр-
 ланма дәрәжәси нәзәрә алынмагла) вардыр

Бир нечә һала баһаг.

I һал. *Характеристик тәнлијин көкләри һәғиги вә мұх-
 тәлифдир.*

Бу көкләри $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ илә ишарә едәк. λ әвәзинә (3)
 системиндә λ_1 әдәдини (биринчи көкү) јазараг, алынән систем-
 дән a_1, a_2, \dots, a_n эмсаллары үчүн

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}$$

гијмәтләри тәјин олунур. Бу эмсаллар вәситәсилә (1) систе-
 минин

$$y_1^{(1)} = a_1^{(1)} e^{\lambda_1 x}, y_2^{(1)} = a_2^{(1)} e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n^{(1)} = a_n^{(1)} e^{\lambda_1 x} \quad (5)$$

нөлүн алыныр.

І јин тәјдә илә (1) системинин λ_2 көкүнә ујғун нөлүн

$$y_1^{(2)} = a_1^{(2)} e^{\lambda_2 x}, y_2^{(2)} = a_2^{(2)} e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n^{(2)} = a_n^{(2)} e^{\lambda_2 x} \quad (6)$$

вә нәһәјәт, (1) системинин λ_n көкүнә ујғун нөлүн

$$y_1^{(n)} = a_1^{(n)} e^{\lambda_n x}, y_2^{(n)} = a_2^{(n)} e^{\lambda_n x}, \dots, y_n^{(n)} = a_n^{(n)} e^{\lambda_n x} \quad (7)$$

алыныр.

(1) системинин (5)–(7) нөлләри вәситәсилә онун үмүмү
 нөлүн тәјин олунур:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 a_1^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2 a_1^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n a_1^{(n)} e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1 a_2^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2 a_2^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n a_2^{(n)} e^{\lambda_n x}, \\ \vdots \\ y_n = C_1 a_n^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2 a_n^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n a_n^{(n)} e^{\lambda_n x}. \end{cases} \quad (8)$$

бүрәдә C_1, C_2, \dots, C_n ихтијари сабитләрдыр.

Мисал 1.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + 4y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 \end{cases} \quad (9)$$

системини həll етмəли.

Характеристик тənлији дүзəлдəк:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{və} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Бу тənлијин көклəri һəгиги вə мұхтəлифдир: $\lambda_1 = -1$ вə $\lambda_2 = 3$. Инди (9) системини һəллəрини

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= a_1^{(1)} e^{-x}, & y_2^{(1)} &= a_2^{(1)} e^{-x}, \\ y_1^{(2)} &= a_1^{(2)} e^{3x}, & y_2^{(2)} &= a_2^{(2)} e^{3x} \end{aligned}$$

шəклиндə ахтарəг. $\lambda_1 = -1$ көкүнə ујғун олан $a_1^{(1)}$ вə $a_2^{(1)}$ əмсалларыннı тапмаг үчүн (3) системини дүзəлдəк:

$$\begin{cases} 2a_1^{(1)} + 4a_2^{(1)} = 0, \\ a_1^{(1)} + 2a_2^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Бурəдэн $a_1^{(1)} = -2a_2^{(1)}$ вə $a_2^{(1)} = -1$ гəбул етмəклə $a_1^{(1)} = 2$ алыыр. Белəликлə, (9) системини бир һəлли тапылр:

$$y_1^{(1)} = 2e^{-x}, \quad y_2^{(1)} = -e^{-x}. \quad (10)$$

Инди $\lambda_2 = 3$ көкүнə ујғун (3) системини дүзəлдəк:

$$\begin{cases} -2a_1^{(2)} + 4a_2^{(2)} = 0, \\ a_1^{(2)} - 2a_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Бурəдэн $a_1^{(2)} = 2a_2^{(2)}$ вə $a_2^{(2)} = 1$ гəбул етмəклə $a_1^{(2)} = 2$ алыыр. Нəтицəдə (9) системини икинчи һəлли тапылр:

$$y_1^{(2)} = 2e^{3x}, \quad y_2^{(2)} = e^{3x}. \quad (11)$$

(10) вə (11) һəллəri вəситəсилə (9) системини (8) шəклиндə үмүми һəлли тəјин олунур:

$$y_1 = 2C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{3x},$$

$$y_2 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

II һəл. Характеристик тənлијин көклəri мұхтəлифдир, лəкин онларнı бəзиллəri комплекс əдəдлəрдир.

Бу һəлдə дə системин тапылан көклərə ујғун һəллəri биринчи һəлдə көстəрилəн гəйдə нлə (3) системи вəситəсилə тəјин олунур. Лəкин системин, характеристик тənлијин $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ вə $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ кими ики тoшмə комплекс көклəринə ујғун олан

$$y_k^{(1)} = a_k^{(1)} e^{(\alpha + i\beta)x} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

вə

$$y_k^{(2)} = a_k^{(2)} e^{(\alpha - i\beta)x} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

һəллəri комплекс олур.

Јүксəктəртибли тəтти диференциал тənликлəр нəзəриндə олдуғу (XXXI, § 7) кими, бурəдə дə көстəрмəк олəр ки, системини (12) вə (13) һəллəрини һəгиги вə хəјəли һиссəлəri һəмин системин һəллидир. Буна əсасən системин (12) вə (13) һəллəri əвəзинə

$$\begin{aligned} \bar{y}_k^{(1)} &= e^{\alpha x} (p_k^{(1)} \cos \beta x + p_k^{(2)} \sin \beta x), \\ \bar{y}_k^{(2)} &= e^{\alpha x} (r_k^{(1)} \cos \beta x + r_k^{(2)} \sin \beta x) \end{aligned} \quad (14)$$

шəклиндə һəгиги һəллəri алыыр, бурəдə һəгиги $p_k^{(1)}, p_k^{(2)}, r_k^{(1)}, r_k^{(2)}$ əдəдлəri $a_k^{(1)}$ вə $a_k^{(2)}$ əдəдлəri вəситəсилə тəјин олунур.

(1) системини үмүми һəлли јенə лə (8) шəклиндə тапылан хүсүси һəллəр вəситəсилə гурулур.

Мисал 2.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - 2y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 - y_2 \end{cases} \quad (15)$$

системини һəлл етмəли.

Бу системин

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

характеристик тənлијини көклəri $\lambda_1 = 1 + 2i$ вə $\lambda_2 = 1 - 2i$ комплекс əдəдлəрини.

$\lambda_1 = 1 + 2i$ көкүнə ујғун a_1 вə a_2 əмсалларыннı тəјин етмəк үчүн (3) системини дүзəлдəк:

$$\begin{cases} (2 - 2i)a_1 - 2a_2 = 0, \\ 4a_1 - (2 + 2i)a_2 = 0. \end{cases}$$

Бурəдэн $2a_1 = (1 + i)a_2$ вə $a_2 = 2$ гəбул етдиклə $a_1 = 1 + i$ алыыр. Бу һəллə (15) системини ујғун һəлли

$$y_1^{(1)} = (1 + i)e^{(1+2i)x}, \quad y_2^{(1)} = 2e^{(1+2i)x} \quad (16)$$

олар.

Инди характеристик тənлијин $\lambda_2 = 1 - 2i$ көкүнə ујғун a_1 вə a_2 əмсалларыннı тəјин етмəк үчүн

$$\begin{cases} (2 + 2i)a_1 - 2a_2 = 0, \\ 4a_1 - (2 - 2i)a_2 = 0 \end{cases}$$

системини һəлл едəк. Бурəдэн $a_2 = (1 + i)a_1$ мұнасибəти вə $a_1 = 1$ гəбул етдиклə $a_2 = 1 + i$ алыыр. Тапылан $a_1 = 1$ вə $a_2 = 1 + i$ əмсалларына ујғун олан һəлли

$$y_1^{(2)} = e^{(1-2i)x}, \quad y_2^{(2)} = (1 + i)e^{(1-2i)x} \quad (17)$$

олар.

(16) вə (17) һəллəрини ујғун олараг

$$\begin{cases} y_1^{(1)} = e^x (\cos 2x - \sin 2x) + i e^x (\cos 2x + \sin 2x), \\ y_2^{(1)} = 2e^x \cos 2x + i 2e^x \sin 2x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^{(3)} = e^x \cos 2x - ie^x \sin 2x, \\ y_2^{(3)} = e^x (\cos 2x + \sin 2x) - ie^x (\sin 2x - \cos 2x) \end{cases}$$

шәклиндә җазаг. (15) системиниң хүсуси һәлли оларак, бу һәлләрин һәгиги вә хәјали һиссәләрини аҗрылығда көтүрмәк олар.

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= e^x \cos 2x, & \bar{y}_1^{(1)} &= e^x (\cos 2x + \sin 2x); \\ y_1^{(-1)} &= e^x \sin 2x, & \bar{y}_1^{(2)} &= e^x (\sin 2x - \cos 2x). \end{aligned}$$

Бу һалда системин үмуми һәлли

$$y_1 = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x,$$

$$y_2 = C_1 e^x (\cos 2x + \sin 2x) + C_2 e^x (\sin 2x - \cos 2x) \text{ олур.}$$

Характеристик тәңлијин тәқрарланған һәгиги вә комплекс көкләри олар һалларда да системин үмуми һәлли охшар гадә (XXXI, § 7) илә гурулу.

XXXIII ФӘСИЛ

ДАЈАНЫҒЛЫҒ НЭЗӘРИЈӘСИНИҢ ЕЛЕМЕНТЛӘРИ

§ 1. ЛЯПУНОВ МӘНАДА ДАЈАНЫҒЛЫҒ АНЛАҒЫШЫ

Тутак ки, һәр һансы физики процес вә җа һадисә

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

дифференциал тәңликләр системиниң $y_k(x_0) = y_k^0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) башланғыч шәртини өдәјән һәлли вәситәсилә тәсвир олунур. Бу вахт (1) тәңликләри вә башланғыч ғијмәтләри чох заман тәғриби оларак верилир вә җа тәқрүбәләрдән мүүјјән хәта илә тапылыр.

Буна көрә дә белә бир мәсәлә гаршыҗа чыхыр: башланғыч шәртләрин кичик дәјишмәси (1) системиниң тапылан һәллине нечә тәсир едир?

Башланғыч шәртләрин кичик дәјишмәси системин һәллини чох сүр'әтлә дәјиширсә, һәмин башланғыч шәртләр вәситәси илә тапылан һәллини практикки әһәмијәти олмур. Чүнкә белә һәлл өјрәнилән физики процеси һеч тәғриби оларак да ифадә едә билмәз.

Буна көрә дә бир чох практикки мәсәләләрин һәлли, һансы шәртләр даһилиндә башланғыч шәртләрин кичик дәјишмәсинә системин һәллиниң дә кичик дәјишмәси ујғун оллуғуну тәдгиг етмәји тәләсидир.

Ғәјд едәк ки, (1) системиниң сәғ тәрәфи һәллини варлығы вә җекәнәлији теореминиң шәртләрини өдәјирсә вә x аргументи сонлу парчада дәјиширсә, онда башланғыч шәртләри кичик дәјишдикдә системин һәлли дә кичик дәјишир. Бу тәклифин доғрулуғу систем үчүн Коши мәсәләси һәллиниң башланғыч шәртләрдән кәсилмәз асылы олмасындан алыныр (XXXII, §1).

Аргумент сонсуз интервалда дәјишдикдә һәлли дәјишмәси дајанығлығ нәзәријәсиндә өјрәнилир. Бу исә дифференциал тәңликләр системин һәллиниң Ляпунов мәнада дајанығлығы аңлағышы илә бағлыдыр.

Тутак ки, $J = (x_0 < x < +\infty)$, D чохлуғу исә y_1, y_2, \dots, y_n дәјишәнләри фәзасынын мәһдуд областыдыр вә (1) системиниң сәғ тәрәфиндәки $f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) функциялары $\sigma = J \times D$ чохлуғунда кәсилмәздир вә кәсилмәз $\frac{df_k}{dx_i}$

($k, i = 1, 2, \dots, n$) хүсуси төрәмәләри вардыр; бурада $\sigma = J \times D$ илә бүтүн $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($x \in J$ вә $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$) нөггәләри чохлуғу (J вә D чохлуғларынын дүзкүн һәсияли) ишарә олунмушдур. Онда һәр бир $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in \sigma$ нөггәси үчүн (1) системиниң $y_k(x_0) = y_k^0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) башланғыч шәртләрини өдәјән вә x_0 нөггәсиниң мүүјјән әтрафында тәјин олунмуш җекәнә һәлли бар.

(1) системиниң J чохлуғунда тәјин олунмуш һәллини $\varphi_k(x)$, $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ илә ишарә едәк.

Тәғриф. Тутак ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ эдәди үчүн вәл $\delta(\varepsilon) > 0$ вар ки, (1) системиниң J чохлуғунда тәјин олунмуш вә башланғыч ғијмәтләри

$$|y_k(x_0) - \varphi_k(x_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

бәрабәрсизликләрини өдәјән һәр бир $y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) дәлли истәнилән $x \in J$ нөггәсиндә

$$|y_k(x) - \varphi_k(x)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

бәрабәрсизликләрини өдәјир. Онда дејирләр ки, (1) системиниң $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ һәлли Ляпунов мәнада дајанығлыдыр.

Әхәр $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) һәлли Ляпунов мәнада дајанығлыдырса вә $0 < \alpha \leq \delta$ шәртини өдәјән ихтијари α эдәди үчүн

$$|y_k(x_0) - \varphi_k(x_0)| < \alpha \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

олдугда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |y_k(x) - \varphi_k(x)| = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

мүнәсибәти өдәнилирсә, онда дејирләр ки, (1) системиниң $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) һәлли асимптотик дајанығлыдыр.

Тутак ки, $\delta > 0$ истәнилән кичик эдәдир вә (2) шәртини өдәјән һеч олмаса бир $y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) һәлли үчүн (3) бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда системин $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) һәлли дајанығсыз һәлл адланыр.

Мисал 1.

$$\frac{dy}{dx} = -a^2 y \quad (a < 0) \text{ тәңлијиниң } y(x_0) = y_0 \text{ башланғыч шәртини}$$

өдәјән һәллиниң дајанығлы олмасыны тәдгиг етмәли.

Тәңлијин (x_0, y_0) башланғыч шәртини өдәјән һәлли

$$y(x) = y_0 e^{-a^2(x-x_0)} \quad (5)$$

функцијасыдыр. Тәңлијин (x_0, y_0) башланғыч шәртини өдәјән һәлли

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_0 e^{-a^2(x-x_0)}$$

олар. Бурадан, $x > x_0$ олдугда

$$|\bar{y}(x) - y(x)| = e^{-\alpha(x-x_0)} |\bar{y}_0 - y_0| < |\bar{y}_0 - y_0|$$

барабарсизлиги алыныр.

Верилмиш истәнилән $\epsilon > 0$ әдәди үчүн $\delta = \epsilon$ гәбул етдикдә $|\bar{y}_0 - y_0| < \delta$ олмасындан истәнилән $x > x_0$ нөгтәсиндә $|\bar{y}(x) - y(x)| < \epsilon$ барабарсизлиги алыныр.

Демәли, тәнлијин (5) һәлли Лјапунов мәнада дајаныглыдыр, $a \neq 0$ олдугда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\bar{y}(x) - y(x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha(x-x_0)} |\bar{y}_0 - y_0| = 0$$

олур ки, бу да (5) һәллини ејни заманда асимптотик дајаныглы олдуғуну көстәрир.

$a = 0$ олдугда исе $y_0 - y_0 \neq 0$ шәрти дахилиндә $\lim_{x \rightarrow \infty} |\bar{y}(x) - y(x)| \neq 0$ олур ки, бу да $a = 0$ һалында (5) һәллини асимптотик дајаныгсыз олдуғуну көстәрир.

Мисал 2.

$$\frac{dy}{dx} = a^2 y \quad (a \neq 0) \quad \text{тәнлијини } y(x_0) = y_0 \text{ башлангыч шәрти}$$

өдәјән һәллини дајаныглы олмасыны тәдгиг етмәли.

Бу һалда да

$$y(x) = y_0 e^{a^2(x-x_0)}, \quad \bar{y}(x) = \bar{y}_0 e^{a^2(x-x_0)}$$

вә x -ин $x > x_0$ гијәтләриндә

$$|\bar{y}(x) - y(x)| = e^{a^2(x-x_0)} |\bar{y}_0 - y_0|$$

олар. Бурадан ајаныдыр ки $|\bar{y}_0 - y_0| \neq 0$ фәргинин һеч бир кичик гијәтиндә $|\bar{y}(x) - y(x)|$, фәрги x -ин кифәјәт гәдәр бәјјәк гијәтләриндә верилмиш $\epsilon > 0$ әдәдиндән кичик ола билмәз. Демәли, тәнлијин $y(x)$ һәлли дајаныгсыздыр.

Тутар ки, сабит олан $y_k \equiv a_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) функцијалары (1) системини һәллидир. Белә һәллә (1) системини таразлығ өдәјјәти (вә ја сүкут нөгтәси) дејилир. Хүсуси һалда, $y_k \equiv 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) һәллине тривиал һәлл дејилр.

Верилмиш системин һәр һансы $\varphi_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) һәллини дајаныглығынн арашдырылмасы мәсәләсини, бу систем вәситәсилә гурулан јени системин тривиал һәллини дајаныглығынн арашдырылмасы мәсәләсинә кәтирмәк олар.

Доғрулан да, (1) системиндә

$$z_k = y_k - \varphi_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

әвәзләмәсини апарсағ, онда јени z_k дәјишәнләринә көрә

$$\frac{dz_k}{dx} = -\frac{d\varphi_k}{dx} + f_k[x, z_1 + \varphi_1, z_2 + \varphi_2, \dots, z_n + \varphi_n] \quad (6)$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

системә алынар. (1) системини $\varphi_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) һәллине (6) системини $z_k \equiv 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) һәлли ујғундыр.

Беләликлә, (1) системини $\varphi_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) һәллини дајаныглығ мәсәләси, (6) системини $z_k \equiv 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) тривиал һәллини дајаныглығ мәсәләсинә кәтирилмиш олур. Хүсуси һалда, хәтти бирчинсли олмајән тәнликләр системини һәр һансы һәллини дајаныглығ мәсәләси, мүјјәм әвәзләмә вәситәсилә ујғун бирчинсли системин тривиал һәллини дајаныглығ мәсәләсинә кәтирилр. Буна көрә дә, үмумилији позмалдан, кәләчәкдә верилмиш системләрин аячар тривиал һәллини дајаныглығ өјрәнилир.

Бүтүн һәлләри дајаныглы (асимптотик дајаныглы) олан системә дајаныглы (асимптотик дајаныглы) систем дејилр.

§ 2 САБИТ ӘМСАЛЛЫ ХӘТТИ ДИФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИ ҺӘЛЛИНИ ДАЈАНЫГЛЫҒЫ

Јухарыда көстәрлик ки, хәтти бирчинсли олмајән тәнликләр системини һәр һансы һәллини дајаныглығ мәсәләси ујғун бирчинсли системин тривиал һәллини дајаныглығ мәсәләсинә кәтирилр. Буна көрә дә, бурада аячар сабит әмсаллы хәтти диференциал тәнликләр системи һәллини дајаныглығ өјрәнилир.

Тутар ки, сабит әмсаллы хәтти бирчинсли диференциал тәнликләр системи верилмишдир.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{cases} \quad (1)$$

(1) системини һәллини

$$y_1 = a_1 e^{\lambda x}, y_2 = a_2 e^{\lambda x}, \dots, y_n = a_n e^{\lambda x} \quad (2)$$

шәклиндә ахтәрмәк олар (XXXII, § 4). Функцијаларын бу гијәтләрини (1) системидә Јеринә јаздыгда наһәјум a_1, a_2, \dots, a_n әмсалларына нәзәрән

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)a_1 + a_{12}a_2 + \dots + a_{1n}a_n = 0, \\ a_{21}a_1 + (a_{22} - \lambda)a_2 + \dots + a_{2n}a_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}a_1 + a_{n2}a_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)a_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

кини хәтти бирчинсли чәбри тәнликләр системи алынар. Бу-

радакы намә'лум λ әдәди (1) системинин

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

характеристик тәңлијиндән тә'јин олунар.

Тутаг ки, характеристик тәңлијин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ көкләри мұхтәлиф ир пә онларын һәгиги һиссәләри мәнфи әдәдләрдир. Онда (1) системинин, λ_n көкүнә ујғун олан һәлли

$$y_1 = a_{1n}e^{\lambda_n x}, y_2 = a_{2n}e^{\lambda_n x}, \dots, y_n = a_{nn}e^{\lambda_n x} \quad (5)$$

шәклиндә олар

Әкәр λ_n көкүнүн өзү һәгиги мәнфи әдәдләрсә, онда $x \rightarrow \infty$ шәртиндә (5) функцијаларынын һамысы сыфра јакынлашыр: $y_m = a_{mn}e^{\lambda_n x} = 0 (x \rightarrow \infty), m = 1, 2, \dots, n$.

λ_n көкү, һәгиги һиссәси мәнфи p_n әдәди олан $p_n + iq_n = \lambda_n$ шәклиндә комплекс әдәд олдугда $a_{mn} \cdot e^{(p_n + iq_n)x}$ функцијаларыны i јер дүстурларына әсәси чевирмәклә

$$v_m = e^{p_n x} (\beta_{mn} \cos q_n x + i \gamma_{mn} \sin q_n x), \quad (6) \\ (m = 1, 2, \dots, n)$$

шәклиндә јазмаг олар. $p_n < 0$ олдугундан $x \rightarrow \infty$ шәртиндә (6) функцијалары да сыфра јакынлашыр:

$$v_m = 0 (x \rightarrow \infty), m = 1, 2, \dots, n.$$

Беләликлә, характеристик тәңлијин бүтүн көкләри мұхтәлиф вә һәгиги һиссәләри мәнфи әдәдләрдирсә, онда (1) системинин һәммин көкләрә ујғун (5) һәлләринин һамысы $x \rightarrow \infty$ шәртиндә сыфра јакынлашыр.

$y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ исә (1) системинин тривиал (сыфыр) һәллидир. Демәли, көстәрилән һалда (1) системинин (5) һәлләринин һамысы $x \rightarrow \infty$ шәртиндә тривиал һәллә јакынлашыр. (1) системинин үмуми һәллини (5) һәлләринин ихтијари әмсаллы хәтти комбиназијасы олымындан ајдындыр ки, системин истәнилән һәлли $x \rightarrow \infty$ шәртиндә тривиал һәллә јакынлашыр. Бурадан ашағыдакы нәтичә алынар:

Характеристик тәңлијин бүтүн көкләри мұхтәлиф вә һәгиги һиссәләри мәнфи әдәдләр олдугда сабит әмсаллы хәтти бирчисли тәңликләрик (1) системинин $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ тривиал һәлли дајаныглыдыр (вә һәм дә әсимптотик дајаныглыдыр).

Инди, фәрз едәк ки, характеристик тәңлијин көкләри мұхтәлифдир, ләкин бу көкләрин һеч олмаса биринин һәгиги һиссәси мұсбәтдир. Бу көк $\lambda_n = p_n + iq_n (p_n > 0)$ оларса, онда (1) системинин үмуми һәллини бир топлананында $e^{p_n x}$ вуругу олар. Бу вуруг исә $x \rightarrow \infty$ шәртиндә гејри-мәһдуд олараг артыр. Буна көрә дә, (1) системинин үмуми һәлли $x \rightarrow \infty$ шәртиндә

$y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ тривиал һәллә јакынлашыр билмәз. Демәли, (1) системинин $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ тривиал һәлли (вә ја сүкут нәгәси) дајаныгсыдыр.

Бурадан ајдындыр ки, характеристик тәңлијин көкләринин һеч олмаса биринин һәгиги һиссәси мұсбәтдирсә, онда системин $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ тривиал һәлли дајаныгсыдыр.

Характеристик тәңлијин бүтүн көкләринин мұхтәлиф олдуғуну фәрз етмәклә алдығымыз нәтичәләр характеристик тәңлијин тәкрарланан көктәри олдугда да доғрудур. Доғрудан да, характеристик тәңлијин λ_n көкү Λ дәфә тәкрарланан олдугда системин үмуми һәллини топлананыларында $x^z e^{\lambda_n x} (z < N - 1)$ шәклиндә вуруглар олар. Бу заман $\lambda_n < 0$ олдугда, јенә дә

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^z e^{\lambda_n x} = 0,$$

$\lambda_n > 0$ олдугда исә

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^z e^{\lambda_n x} = \infty$$

олур.

Беләликлә, ашағыдакы теорем исбат олунар:

Теорем. *Характеристик тәңлијин бүтүн көкләринин һәгиги һиссәләри мәнфи әдәдләр олдугда системин $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ тривиал һәлли дајаныглыдыр. Характеристик тәңлијин көкләринин һеч олмаса биринин һәгиги һиссәси мұсбәт әдәд олдугда системин $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ тривиал һәлли дајаныгсыдыр.*

Мисал 1.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \frac{dz}{dx} = 13y - 4z \end{cases}$$

системинин тривиал һәлли дајаныглыдырмы?

Бу системин

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 13 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

характеристик тәңлијинин көкләри,

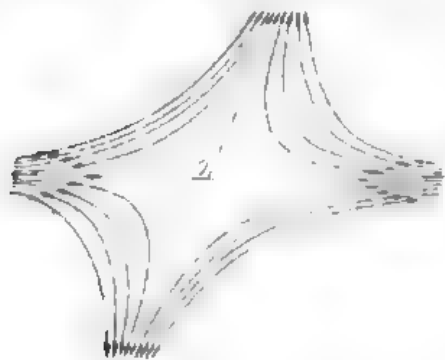
$$\lambda_1 = -1 + 2i \text{ вә } \lambda_2 = -1 - 2i$$

комплекс әдәдләрдир. Оларын икисинин дә һәгиги һиссәси мәнфи әдәд олдугундан системин $y = 0, z = 0$ тривиал һәлли дајаныглыдыр.

Мисал 2.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 4z, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}y + 3z \end{cases}$$

x дәјишәкени — x илә әвәз етдикдә бу һал әвәлки а) һа-
лына кечир. Белә вәзијәт олдуғда, сүкут нөгтәсинә *дајаныг-*
сыз дүјүн нөгтәси дејилр.



Шәкил 253

в) $\lambda_1 > 0$ вә $\lambda_2 < 0$ (вә ја $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$) олдуғда сүкут нөгтәси дајаныгсыздыр. Бу һалда $x \rightarrow +\infty$ вә ја $x \rightarrow -\infty$ шәртиндә трајекторијалар $(C_1 \neq 0, C_2 \neq 0)$ сүкут нөгтәсиндән узағлашыр. Трајекторијалар үзәриндә x -ин дәјишмәсинә ујғун олан һәрәкәтләрин истигамәти 253-чү шәкилдә көстәрилмишдир. Бу һалда сүкут нөгтәсинә *јәһәрвары нөгтә* дејилр.

II һал. Характеристик тәнлијин $\lambda_1 = p + qi$ вә $\lambda_2 = p - qi$ ($q \neq 0$) кими гошми комплекс көкләри вардыр. Бу һалда (2) системинин үмуми һәлли

$$\begin{cases} y = e^{px} (C_1 z_1^{(1)} \cos qx + C_2 z_2^{(1)} \sin qx), \\ z = e^{px} (C_1 z_1^{(2)} \cos qx + C_2 z_2^{(2)} \sin qx) \end{cases} \quad (5)$$

шәклиндә олар.

Бурада ашағыдакы һаллар мүмкүндүр:

а) $p < 0$ ($q \neq 0$). Онда $x \rightarrow \infty$ шәртиндә (8) бәрәбәрликләриндәки биринчи e^{px} вуругу сыфра јахынлашыр, икинчи вуруглар исә мәјдуд олар. Буна көрә дә трајекторија үзәрин-



Шәкил 254



Шәкил 255



Шәкил 256

дәки нөгтәләр $x \rightarrow \infty$ шәртиндә спирал үзәрә координат башланғычына. Јәни $y = 0, z = 0$ сүкут нөгтәсинә јахынлашыр (шәкил 254). Демәли, (2) системинин $y = 0, z = 0$ тривіал һәлли асимптотик дајаныглыдыр. Бу һалда сүкут нөгтәсинә *дајаныгсыз фокус нөгтәси* дејилр.

Дајаныглы фокус нөгтәсинин дајаныглы дүјүн нөгтәсиндән фарғы вардыр. Сүкут нөгтәси дајаныглы фокус олдуғда, трајекторијалара чәкилдә тохунанлар, тохума нөгтәләри сүкут нөгтәсинә јахынлашдығда һеч бир лимитә јахынлашмыр.

б) $p > 0$ ($q \neq 0$). Бу һал x дәјишәкени — x илә әвәз етдикдә а) һапына кечир. Буна көрә дә бу һалда да трајекторијалар 254-чү шәкилдә көстәрилдији кими долур, ләкин трајекторија үзәрә һәрәкәтин истигамәти тәрсинә олар; $x \rightarrow \infty$ шәртиндә $e^{px} \rightarrow \infty$ олдуғундан, x артығча трајекторијалар сүкут нөгтәсиндән узағлашыр (шәкил 255). Бу һалда сүкут нөгтәсинә *дајаныгсыз фокус нөгтәси* дејилр.

в) $p = 0$, јәни $\lambda_{1,2} = \pm qi$. Бу һалда системин һәлли олан (8) функцијалары периодик олдуғундан трајекторијалар сүкут нөгтәсинин өз дахилинә алаң гапалы хәтләр олар (шәкил 256). Белә хәттә *гапалы трајекторија* вә ја *тсикл* дејилр.

Бу һалда $y = 0, z = 0$ тривіал һәлли дајаныглыдыр, $y(x_0) = y_0$ вә $z(x_0) = z_0$ башланғыч гијмәтләри $y = 0, z = 0$ нөгтәсинә кифәјәт гәдәр јахын олдуғда x -ин истәнилән гијмәтләриндә трајекторијалар сүкут нөгтәсинин (координат башланғычынын) кичик әтрафында јерләшир. Ләкин $x \rightarrow \infty$ шәртиндә трајекторијанын нөгтәләри координат башланғычына јахынлашмыр. Демәли, $y = 0, z = 0$ тривіал һәлли асимптотик дајаныглы дејилр. Бу һалда сүкут нөгтәсинә *мәркәз* дејилр.

III һал. Характеристик тәнлијин көкләри тәқрарланандыр. $\lambda_1 = \lambda_2$. Бу һалда (2) системинин үмуми һәлли

$$\begin{cases} y = (C_1 z_1^{(1)} + C_2 z_2^{(1)} x) e^{\lambda x}, \\ z = (C_1 z_1^{(2)} + C_2 z_2^{(2)} x) e^{\lambda x} \end{cases} \quad (9)$$

шәклиндә олар

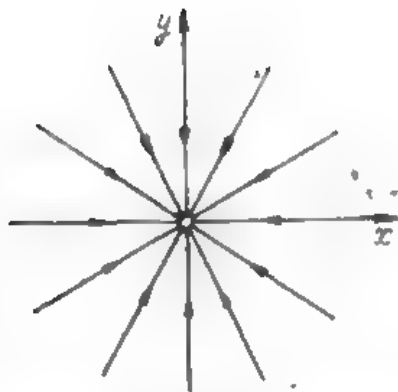
Бурада ики һал ола биләр:

а) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Бу һалда $x e^{\lambda x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) олдуғундан $x \rightarrow \infty$ шәртиндә (9) функцијалары сыфра јахынлашыр. Буна көрә дә $y = 0, z = 0$ тривіал һәлли дајаныглыдыр. Јенә дә сүкут нөгтәсинә дајаныглы дүјүн нөгтәси дејилр (шәкил 257 вә 258).

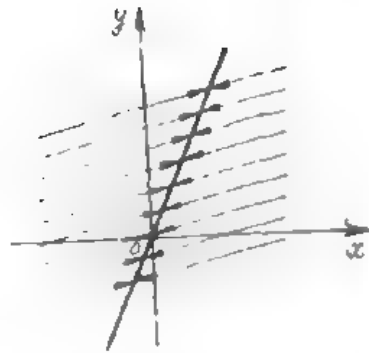
б) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Бу һалда трајекторијалар әвәлки а) һалында олдуғу шәкилдә јерләшир, ләкин трајекторија үзәрә һәрәкәтин истигамәти тәрсинә олар; x артығча трајекторијалар сүкут нөгтәсиндән узағлашыр. Буна көрә дә системин $y = 0, z = 0$ тривіал һәлли дајаныгсыздыр вә сүкут нөгтәси *дајаныгсыз дүјүн нөгтәси* адыллыр.



Шәкил 257



Шәкил 258



Шәкил 259

Беләликлә, (2) системи трајекторијатарының сүкут нөгтәси атрафында нечә йерләшмәси (3) шәрти өдәнилән бүтүн һалларда тәдгиг олуяду. (3) шәрти өдәнилмәдиклә, [ә'ни]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

олдугда (4) (вә ја (5)) характеристик тәнлијиния сыфыр көкү олар. Тутаг ки, (4) тәнлијиния бир көкү сыфра барабардир. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Ончә (2) системини үмуми һәлли

$$\begin{cases} y = C_1 a_1^{(1)} + C_2 a_2^{(1)} e^{\lambda_2 x}, \\ z = C_1 a_1^{(2)} + C_2 a_2^{(2)} e^{\lambda_2 x} \end{cases}$$

шәкилдә олар.

Бурадан, x дәјишәния [ох етдикдә,

$$(z - C_1 a_1^{(2)}) a_1^{(1)} = (y - C_1 a_1^{(1)}) a_2^{(2)}$$

кими парәләл дүз хәтләр айләси алыныр. $C_2 = 0$ олдугда $a_1^{(2)} y = a_1^{(1)} z$ дүз хәтти үзәриндә йерләшән бирләшмәгәтти $y = C_1 a_1^{(1)}$, $z = C_1 a_1^{(2)}$ сүкут нөгталәри чохлауу алыныр. Әкәр $\lambda_2 < 0$ олса, ондә $x \rightarrow \infty$ шәртиндә трајекторијалар үзәриндәки нөгтәләр һәмчә трајекторија үзәриндә йерләшән $y = C_1 a_1^{(1)}$, $z = C_1 a_1^{(2)}$ сүкут нөгтәсинә яхылашар (шәкил 259). Бу һалдә $y = 0, z = 0$ һәлли дәјәныглыдыр, ләкин асимптотик дәјәныглы дејилдир. $\lambda_2 > 0$ олдугда трајекторијалар јенә дә 259-чу шәкилдә көстәрилдија кими йерләшәр, ләкин трајекторија үзәрә һәрәкәтти истигәмәти тәрсинә олур. Бу һалдә $y = 0, z = 0$ тривіал һәлли дәјәныгсыздыр.

(4) характеристик тәнлијиния көхләриниң икиси дә сыфыр $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ олдугда $y = 0, z = 0$ тривіал һәллиниң дәјәныглыгы ејни гәјдә илә тәдгиг олуныр.

§ 4. ЛЯПУНОВ ТЕОРЕМИ

[дифференциал тәнликләр системи һәллиниң дәјәныглыгының тәдгиг етмәк үчүн үмуми методу мәшһур рус ријазийәтчысы А. М. Ляпунов вермишдир. Бу метод Ляпунов функцијалары адианан вә мүәјјән шәртләри өдәјән функцијаларың сәчилмәсинә әсәсләнир.

Ляпунов методу вәситәсилә

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

шәкилдә дифференциал тәнликләр системини $y_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) тривіал һәллиниң дәјәныглыгының тәдгиг етмәклә кифәјәтләшмәк олур (чүнки системини истәнилән һәллиниң дәјәныглыгы мәсәләсини онун тривіал һәллиниң дәјәныглыгы мәсәләсинә кәтирмәк олур, § 1). Бу мәгсәдлә, гәбул едәк ки, (1) системини сүкут нөгтәси координат башлангычында йерләшәр, [ә'ни $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ һәмчә системини һәллидир.

Фәрз едәк ки, $J = (x_0 < x < +\infty)$ вә D илә y_1, y_2, \dots, y_n дәјишәнләри фәзасының координат башлангычының өз дахилинә алаң мәһдуд областы ишарә олунымушдур.

Теорем. Тутаг ки, D областында дифференциалланан $V(J) = V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ функцијасы үчүн ашагыдакы шәртләр өдәнилир:

1) D областында $V(y_1, y_2, \dots, y_n) > 0$ олур вә јаланыз $y_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) нөгтәсиндә $V(0, 0, \dots, 0) = 0$ мунасибәти өдәнилир, [ә'ни $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ функцијасы координат башлангычында чиөди линијалар јәјмәт алыр.

2) $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ функцијасының (1) системиниң истәнилән интеграл әјрисе үзәрә төрәмәси бүтүн $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in G = J \times G$ нөгталәриндә

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) < 0$$

мунасибәтти өдәјир. Онда (1) системиниң $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ тривіал һәлли дәјәныглыдыр.

Теоремдә көстәрилән шәртләри өдәјән $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ функцијасына Ляпунов функцијасы дејилир.

$V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ функцијасының 2-чи шәртдә көстәрилән төрәмәсини һесабладыгда y_k ($k = 1, 2, \dots, n$) дәјишәнләри (1) системиниң $y_k = y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) һәлли илә әвәз

1 Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918) мәшһур рус ријазийәтчысыдыр.

едили-лидир. Бу һалда $\frac{dV}{dx} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \cdot \frac{dy_k}{dx}$ вә $\frac{dy_k}{dx}$ әлвәзинә (1)

ифадәләрини яздыгда

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \cdot f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

алыныр.

Исбаты. $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ функциясы $O(0, 0, \dots, 0)$ координат башлангычында чидә минимум гиҗмәт алыгы үчүн $V(y_1, y_2, \dots, y_n) = C$ сәвиҗә сәтләри координат башлангычыны өз дахилинә алаң гапалы сә һләр олар (XXVI, § 1). Буна көрә дә, $\delta > 0$ әдәди верилдикдә, C -ниң кифајәт гәдәр кичик гиҗмәтләриндә, $V = C > 0$ сәвиҗә сәтләриниң һеч олмаса бир гапалы компоненти координат башлангычының һәмин δ -әтрафында јрләшир вә координат башлангычындан кечмир. Инди $\delta > 0$ әләдини елә сечәк ки, координат башлангычының δ -әтрафы $V = C$ сәтһиниң дахилиндә јрләшсин вә һәмин әтрафда $V < C$ мүнәсибәти өдәнилли.

Әкәр $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ башлангыч нөгтәси $(y_k(x_0) = y_k^0, k = 1, 2, \dots, n)$ координат башлангычының һәмин δ -әтрафында јрләшәрсә, јәни $V(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) < C$ оларсә, онда (1) системниң бу башлангыч шәртләр илә тәјин олуан һәллиниң графиги (трајекторијасы) x -ни $x > x_0$ гиҗмәтләриндә координат башлангычының δ -әтрафында јрләшәр. Догрудан да, теоремниң 2-чи шәртигә көрә V функциясы интеграл әјрисин үзрә артмајандыр. Буна көрә дә x -ниң $x > x_0$ гиҗмәтләриндә $V(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) < V(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)) < C$ олар. Бурадан (1) системниң $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ тривиял һәллиниң дајаныглыгы әјдындыр.

Теоремниң исбатындан әјдындыр ки, V функциясының интеграл әјрисин үзрә артмајан олмасындан системни $y_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) һәллиниң дајаныглыгы алыныр, асимптотик дајаныглыгы исә алыныр. Догрудан да, x артдыгда интеграл әјрисин координат башлангычына дејил, башга бир сәвиҗә сәтһинә дә јакынлаша биләр.

Системни $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ һәллиниң асимптотик дајаныглыгы олмасы үчүн теоремни шәртләриндән әлвә, x -ә нәзәрән мүнәзәм олараг вә јалпыдә $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ шәртиндә $\frac{dV}{dx} \rightarrow 0$ мүнәсибәти ө әкилиәлидир.

Гејд едәк ки, (1) системни һәллиниң дајаныглыгы вә асимптотик дајаныглыгы һаггында А. М. Лјапуновун даһа үмүми нәтиҗәләри бардыр.

Мисал.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z - y^2 \\ \frac{dz}{dx} = -y - z^2 \end{cases} \quad (2)$$

системниң $y = 0, z = 0$ һәллиниң дајаныглыгыны тәдгиг етмәли.

Верилмиш систем үчүн $V = y^2 + z^2$ функцијасы теоремни шәртләрини өдәјир, јәни Лјапунов функцијасыдыр:

1. Бу функција үчүн $V = y^2 + z^2 > 0$ мүнәсибәти өдәниллир вә $O(0, 0)$ нөгтәсиндә минимум гиҗмәт алыр.

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{dV}{dx} &= 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 2y(z - y^2) + 2z(-y - z^2) = \\ &= -2y^3 - 2z^3 = -2(y^3 + z^3) < 0. \end{aligned}$$

Бурадан әјдындыр ки, (2) системниң $y = 0, z = 0$ һәлли дајаныглыдыр.

$$\frac{dV}{dx} = -2(y^3 + z^3) \rightarrow 0 \text{ мүнәсибәтиниң аңчаг } y \rightarrow 0, z \rightarrow 0$$

шәртиндә өдәниллиәсиндән (2) системниң тривиял һәллиниң ејни заманда асимптотик дајаныглы олмасы алыныр.

XXXIV ФӘСИЛ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИКЛӘРИН ӘДӘДИ ВӘ ТӘҖРИБИ ҺӘЛЛИ

§ 1. Мәсәләниң голулушу

Түтаг ки, ади дифференциал тәнлик вә ја онларын мүнәзәм системни үчүн Коши мәсәләси (башлангыч шәртләрини верилмәси илә гојулан мәсәлә) гојулмушдур (XXX, § 3; XXXI, § 1; XXXII, § 1). Мәлүмдур ки, мүнәзәм шәртләр (һәллини варлыгы вә јекәнәлији теоремниң шәртләри) өдәниллидә гојулмуш Коши мәсәләсиниң јекәнә һәлли бардыр. Бу һәлдин тапылмасы методларының шәрти олараг үч нөвә бөлмәк олар.

Бирикисини, дифференциал тәнлик һәлләриниң дәгиг тапылмасы методларыдыр. Бу методларда дифференциал тәнликләриниң (иә ја онларын мүнәзәм системниң) һәлли элементар функцијалар вә ја онларын интеграллары (кватратуралар) вәсәтәсикә дәгиг тапылыр. Тапылмыш дәгиг һәлләр үзәриндә мүнәзәм омәлләри апармаг вә һәллини кәффијәт мәсәләләри һаггында нәтиҗәләр алмаг мүмкүн олур.

Үмүмијәтлә, чох аз нөвә дифференциал тәнликләриниң һәллиниң дәгиг тапылмасы методлары мәлүмдур вә онлар XXX—XXXII фәсилләрдә көстәрилимишдир.

Лакин дәгиг һәллиниң тапылмасы методлары мәлүм олмајан бир чох дифференциал тәнликләриниң һәллини тәҗриби вә јә әдәди олараг тапымаг ләзым кәлир.

Бир чох **халларда** дифференциал тэнликлэрин $y(x)$ **халли** элементар функцијалар вә ја онларын интегралы васитәсилә ифадә олунан мүәјјән $\{y_n(x)\}$ ардычылыгынын лимити шәклиндә тапылыр. Буна дифференциал тэнлик **халлини** тапмағын *тәҗриби методу* дејилір. Киҗәјәт гәдәр бөјүк n әдәдләри үчүн $y_n(x)$ функцијасы **халли** тәҗриби гијмәтләри олур: $y(x) \approx y_n(x)$. **халли** тәҗриби тапылмасы методларынын бир нечәси бу фәсилдә көстәрилир.

Тәнлијин халлини тапмағын үчүнчү нөв методлары *әдәди* методлардыр. Бу **халда** тәнлијин ахтарылан $y(x)$ **халлинин**, аргументин сечилмиш x_n гијмәтләриндә дәгиг вә ја тәҗриби гијмәтләрини һесабламағын алгоритми көстәрилир. Әдәди методла тәнлијин **халли** чәдвәл шәклиндә тапылыр.

Әдәди методлар даһя кеңиш тәнликләр синфинә тәтбиг олунур. Бу методлар мүвсир ријази һесаблама машинларыны дифференциал тәнликлэрин **халли**нә тәтбиг етмәјә имкан верир. Буна көрә дә мүхтәлиф практик мәсәләлэрин **халли**нә дифференциал тәнликлэрин тәтбиг едилмәсиндә әдәди методларын әһәмијјәти бөјүкдүр.

Бурада биртәртибли дифференциал тәнликләр үчүн җојулмуш Коши мәсәләсинин бир нечә сәдә **халли** үсуллары шәрһ олунур.

§ 2 ПИКАРЫН ИТЕРАСИЈА МЕТОДУ

Тутар ки, биртәртибл¹

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (1)$$

тәнлијинин

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

башланғыч шәртини өдәјән **халли** ахтарылыр.

Бу мәсәлә

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad x_0 < x < b \quad (3)$$

интеграл тәнлијинин **халли**нә эквивалентдир (XXX, § 3). (3) тәнлијинин **халли** үчүн ардычыл җахынлашмә үсулуну тәтбиг етдикдә Пикарын¹

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad y_0(x) = y_0 \quad (4)$$

итерасија просеси алыныр (XXX, § 3).

Тапдығымыз $y_n(x)$ функцијасы (1) тәнлијинин ахтардығымыз **халли**нин тәҗриби гијмәтидир. Буна инанмаг үчүн (4) просесинин җығылмасын тәҗгиг едәк. Тутар ки, $f(x, y)$ функ-

сијасы (Oxy) мүстәввисинин мәһдуд σ областында кәсилмәјән-дир вә y дәјишәнинә көрә Липшиц шәртини өдәјир.

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M |y_2 - y_1| \quad (5)$$

(4) вә (3) бәрәбәрликлэрини тәрҗ-тәрәфә чыхсар вә (5) бәрәбәрсизлијиндән истифадә етсәк,

$$|y_n(x) - y(x)| \leq M \int_{x_0}^x |y_{n-1}(t) - y(t)| dt \quad (6)$$

мүнәсибәти алынар. σ области мәһдуд олдуғундан елә сонлу p вә q әдәдләри бар ки,

$$x - x_0 \leq p \quad \text{вә} \quad |y - y_0| \leq q$$

бәрәбәрсизликләри өдәнилир. Бу бәрәбәрсизликләри вә (5) мүнәсибәтини тәтбиг етмәклә (6) бәрәбәрсизлијиндән ардычыл олараг ашағыдакы бәрәбәрсизликләр алыныр:

$$|y(x) - y_0| \leq q, \quad |y_1(x) - y(x)| \leq Mq(x - x_0),$$

$$|y_2(x) - y(x)| \leq \frac{1}{2} qM^2(x - x_0)^2, \dots$$

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{1}{n!} qM^n(x - x_0)^n, \dots$$

Инди тәҗриби **халли** хәтәсыны гијмәтләндирәк:

$$y_n(x) - y(x) \leq \frac{q}{n!} (pM)^n \approx \frac{q}{2^n n} \left(\frac{e p M}{n} \right)^n. \quad (7)$$

Бурадан алыныр ки, $n \rightarrow \infty$ шәртиндә

$$\max |y_n(x) - y(x)| = 0$$

олур, ја ни $y_n(x)$ тәҗриби **халл**әр ардычылыгы σ областында (1) тәнлијинин дәгиг $y(x)$ **халли**нә мүнәзәм җығылыр. Демәли, n -ни киҗәјәт гәдәр бөјүк гијмәтләриндә $y_n(x) \approx y(x)$ тәҗриби бәрәбәрлијинин хәтәсы чох кичикдир.

Пикарын итерасија методу дифференциал тәнликлэрин **халли** үчүн тәҗриби методдур. Апардығымыз мүнәкимәдән ајдындыр ки, бу метод васитәсилә җојулмуш Коши мәсәләсинин тәҗриби **халли** үчүн аналитик ифадә алыныр.

Мисал 1. $y' = 2xy$ тәнлијинин $y|_{x=0} = 1$ башланғыч шәртини өдәјән **халли**нин тәҗриби гијмәтин тапмалы.

Тәнлијин сыфырынчы җахынлашмасы олараг $y_0(x) = y_0 = 1$ җәбул етсәк, онда ардычыл олараг аларыг:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2t dt = 1 + x^2,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x 2t(1+t^2) dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2};$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x 2t \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2} \right) dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}.$$

¹ Пикар Шарл Етјя (185 — 1941) мәшһур франсиз ријазийәтчысыдыр.

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x 2t y_{n-1}(t) dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Верилмиш тэнлиг $y|_{x=0} = 1$ башлангыч шэртиин өдэжн бэлленин тэгриби гијмэти олараг

$$y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$$

ифадэсини көтүрмэк олар: $y(x) \approx y_n(x)$.

Гејд едэк ки, истэвилэн мајдуд областа $\{y_n(x)\}$ ардычыллыгы јыгылыр вэ онун лимити тэнлиг $y(x) = e^{x^2}$ бэлленинэ барабардир (XVI, § 6):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} \right) = e^{x^2}.$$

Мисал 2. $y' = x^2 + y^2$ тэнлигинин $y(0) = 0$ башлангыч шэртиин өдэжн бэлленин тэгриби гијмэтин тапмалы.

Бу һалда

$$y_0(x) = y_0 = 0.$$

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}.$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} \right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}.$$

$$y_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2}{2079} x^{11} + \frac{1}{59535} x^{15}.$$

олар. Алынн итерацијалар ардычыллыгы x -ин $|x| < 1$ гијмэтлэриндэ јыгылыр. Буна көрө дэ, тэлэб олунн дэгиглији нэзэрэ алараг, бэлленин тэгриби гијмэти олараг бу функцијаларын һәр бирини көтүрмэк олар.

Гејд, 1-чи мисалда верилэн Коши мәсэлэсинин һәдиз элементар функцијалардэ дэгиг ифадэ олунур ($y = e^{x^2}$). 2-чи мисалда верилэн тәклик мәсәләди Риккати тәнлигинин хусуси һәдиздир вэ онун һәдиз элементар функцијалардэ ифадэ олунур, буниңда белә. Пикарның итерација методу һәр еки тәнлигин һәдизнэ тәғибг олунур.

§ 3. ЕЈЛЕР МЕТОДУ

Дифференциал тәкликлэрин интегралланмасы үчүн бу әдәди методу XVIII әсрдә Л. Ејлер¹ тәклиф етмишдир. Ејлер методу әјанидир, чох садә һәдизәи мәнасы вардыр, лакин практик

¹ Леонард Ејлер (1707–1783) мәшһур Источна ријазиятчысы, физик, механик вэ астрономдур. Узун илләр Русијадә јашамышдыр.

дәһәтдән әдверилли дејилдир. Бу методда алынн тәгриби бэлленин дэгиглији чох јүксәк олмур. Бунунда белә, Ејлер методу илә даһа јүксәк дэгиглији олан вэ-мүәсир һесаблама машинларында истифада олунн мүнәсиб һесаблама схемләри гурмаг мүмкүнәдур.

Тутаг ки, бһртәртибли дифференциал тәклик үчүн

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

Коши мәсәләсинин $[x_0, b]$ парчасында һәлл етмәк ләзимдир. Бу мәсәләдә һәмин парчанн

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_{n-1} = x_0 + (n-1)h, \\ x_n = x_0 + nh = b$$

нөггәләри илә n сәрабәр һиссәјә $(h = \frac{b-x_0}{n})$ бөләк вэ $y_n = y(x_n)$ ($n = 0, 1, \dots, n$). $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ ишарәләрини гәбул едәк.

Ејлер методунун әсәс принципи верилмиш дифференциал тәкликдә төрәмәни артымлар һисбәти илә әвәз етмәкдир:

$$\frac{\Delta y_n}{\Delta x} = f(x_n, y_n), \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = f(x_n, y_n).$$

Бурадан

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) h \quad (2)$$

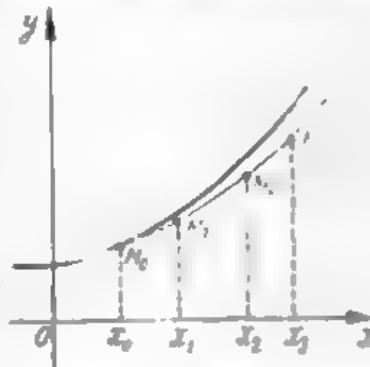
дүстүрү алыннр. Бу дүстүр васитәсидә бэллени x_n нөггәләриндә тәгриби

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) h, \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) h, \dots$$

гијмәтләри һесабланнр.

(2) схемини програмлашдырмаг вэ һесабламаны мүәсир электрон һесаблама машинында анармаг олар, һесабламанын h аддымын кичинатмәйлә дэгиглији јүксәлтмәк мүмкүндүр.

Ејлер методунун һәдизәи мәнасы беләдир: (1) Коши мәсәләсинин верилмиш $M_0(x_0, y_0)$ нөггәсиндән кечән интеграл әјрисин әвәзинә һәмин нөггәдә әјријә тохунаны M_0M_1 парчасы көтүрүлдүр (шәкил 260). M_0M_1 парчасы мејданын $M_0(x_0, y_0)$ нөггәсиндәки истигәмәти үзрә јөнәлдилмишдир. Мејданын $M_1(x_1, y_1)$ нөггәсиндәки истигәмәти үзрә һәмин гәјдә илә M_1M_2 парчасы чәкилр вэ с. беләликлә, Коши мәсәләсинин $M_0(x_0, y_0)$ нөггәсиндән кечән интеграл әјрисин әвәзинә көстәрилән гәјдә илә гурулмуш $M_0M_1M_2 \dots$ сыныг хәтти көтү-



Шәкил 260

руулур. Бөлө гуралмуш сыныг хэтлэр. *Ејлер сыныг хэтлэри* адланур.

Ејлер сыныг хэтлэри үлүн интеграл эјрилэрини тэгрис олараг ифадэ едир (1) Коши масалэни хэллин гијмэтлэр. Ејлер сыныг хэтлин тэнцэлэриндэ Ејлер методу илэ тэгриб олараг хесабланиг. *h* аддым кичилдикчэ бу тэгриб гијмэтлэрин дэиглији артыр.

Тутаг ки, (1) Коши масалэсини $[x_0, b]$ парчасында $\{x_n\}$ олунмуш хэллн вар вэ $y = \varphi(x)$ -дир. Намин масалэнин *h* аддым вэситэсилэ гуралмуш Ејлер сыныг хэтлинэ үлүн тэгриб (эјдэи) хэллн $y = \varphi_h(x)$ олсун. Онда $[x_0, b]$ парчасынын һэр бир нөгтөсиндэ $\varphi_h(x) \approx \varphi(x)$ вэ $\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi_h(x) - \varphi(x)| = 0$ олур. Бунунда бөлө, $\varphi_h(x) \approx \varphi(x)$ тэгриб бэрэбэрлији хэтэ сынын тэртибини гијмэтлэндирмэк олар. (2) бэрэбэрлијини саг тэрэфи (1) масалэсини $y(x)$ хэллинн Тејлор дүстуруна

$$y(x_k + h) = y(x_k) + \frac{y'(x_k)}{1!}h + \frac{y''(x_k)}{2!}h^2 + \dots$$

вэ ја

$$y_{k+1} = y_k + y'(x_k)h + \frac{y''(x_k)}{2!}h^2 + \dots \quad (3)$$

эјрмдышынын биринчи ики хэддинн чамидир. Буна көрө дэ $[x_k, x_{k+1}]$ парчасында тэгриб бэрэбэрлијин хэтэсы h^2 тэртибдэн (XVI, §§ 5-6), *n* һиссэјэ бөлүнүмүш бүтүн $[x_0, b]$ парчасында исэ $nh^2 = \frac{b-x_0}{n}$ тэртибдэн олар. Бу көстөрир ки,

$\varphi_h(x) \approx \varphi(x)$ тэгриб бэрэбэрлијини дэиглијини 10 дэфэ артырмаг үчүн $[x_0, b]$ парчасыны кичик һиссэлэрэ бөлөн нөгтэлэрин саяны 10 дэфэ артырмаг (*h* аддымыны 10 дэфэ азалтмаг) лазымдыр.

Геј. елэк ки, *h* аддым азалдыгда Ејлер методунун $|\varphi_h(x) - \varphi(x)|$ хэтэсы хэтти олараг азалдыгындан Ејлер методуна *биртэртибли дэиглији олан схем* дејилир.

Ејлер методу илэ EPM-да диференснэ тэглик хэлл етдикдэ вшагыдыкы алгоритмдэн истифадэ олунур:

1. y_0, x_0, b вэ *n* эдэдлэрини јадлаша дахил етмэли.

2. Хесабламалы: $h = \frac{b-x_0}{n}$

3. Гэбул етмэли: $x_k = x_0, y_k = y_0$.

4. Хесабламалы: $y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h$.

5. Чап етмэли: x_k, y_k .

6. Хесабламалы: $x_{k+1} = x_k + h$.

7. Гэбул етмэли: $x_k = x_{k+1}, y_k = y_{k+1}$.

8. Јохламалы: $x_k < b$ оларса, 4-чү аддым кечмэли, эхс халда исэ 9-чу аддым кечмэли.

9. Сон.

§ 4. РУНГЕ-КУТТА МЕТОДУ

Бу метод вэситэсилэ мүхтэлиф тэртибдэн дэиглији олан тэгрибн хесаблама схемлэри гурулур. Масалэн, эвэлэки параграфда эјрэндијимиз Ејлерин сыныг хэтлэр схемн биртэртибли дэиглији олан Рунге-Кутта схемидир. Рунге-Кутта схемлэри мүасир Електрон хесаблама машинларында хесаблама апармаг үчүн чох јарарлы олдуғундан, онлардан мүхтэлиф практик масалэлэрин хэллиндэ даһа чох истифадэ олунур. Мүхтэлиф Рунге-Кутта схемлэри вардыр.

Инди икитэртибли дэиглији олан хесаблама схемини гуралма үсулуну шэрһ едэк. Тутаг ки, јенэ дэ

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

тэглијини $[x_0, b]$ парчасында $y(x_0) = y_0$ башлангыч шэртини илэ хэллин тапмаг лазымдыр. Хэллин x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) нөгталэриндэки φ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) гијмэтлэрини

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hf_k}{2}\right) \quad (2)$$

дүстуру илэ хесаблајаг. Бурада

$$h = \frac{b-x_0}{n}, x_{k+1} = x_k + h, f_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1}),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

(2) схемн хэтэсынын тэртибини гијмэтлэндирмэк олар. Доғрудан да,

$$y'(x_k) = y'_k = f(x_k, y_k) = f_k, y'_k = f'_1(x_k, y_k) + f'_2(x_k, y_k) y_k$$

вэ Тејлор дүстуруна көрө (XVI, §§ 5-6)

$$f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hf_k}{2}\right) = f(x_k, y_k) + f'_1(x_k, y_k) \frac{h}{2} + f'_2(x_k, y_k) \frac{hf_k}{2} + o(h^2) \quad (3)$$

олдуғундан

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hf_k}{2}\right) = y_k + f(x_k, y_k)h + \\ &+ f'_1(x_k, y_k) \frac{h^2}{2} + f'_2(x_k, y_k) f_k \frac{h^2}{2} + o(h^3) \\ &= y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + o(h^3) \end{aligned}$$

вэ ја

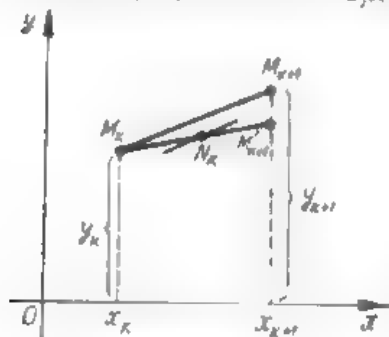
$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + o(h^3) \quad (4)$$

¹ Кара Рунге (1853—1927) заман рижнјатчысн вэ физикидир.

алары. [акин (1) тәлиинин һалли олан $y(x)$ функцијасы-
нын $y(x_k)$ y_k шартинда $x_{k+1} = x_k + h$ нөгтәсиндә дәгиг ги-
мәти

$$y(x_k + h) = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + o(h^2) \quad (5)$$

дүстур, ила һесаблиыр (XVI, § 5). (4) вә (5) бәрәбарликлә-
ринин мугајисасинла адындыр ки, y_{k+1} кәмијјәти һалли



Шәкия 261

$y(x_k + h) = y(x_{k+1})$ гијмәтин-
дән тәртиби h^2 -дан кичик олма-
јан кәмијјәтә фәргәлир. Онда
и һиссәјә бөлүнүш бүтүн
[x_0, b] парчасында (2) схемини
хәтәсы $nh^2 = \frac{(b-x_0)^2}{n^2} = o(h^2)$

тәртибли, јәни икитәртибли
олар (бурада әввәлки параграфын
сонунлақы кими мүнәккәмә апа-
рылыр). Бурадан көрүнүр ки,
[x_0, b] парчасыны кичик һиссә-
ләрә бөләи нөгтәләрин сәјынә
10 дәфә артырдыгда (2) схемини
дәгиглији 100 д.фә артыр.

Икитәртибли әгиглији олан Рунге-Кутта схеминин пәлдә-
си маһисә 261-чи шәкилдә көстәрилдиш ир. әввәлчә $M_k(x_k, y_k)$
нөгтәсиндә мејданың $f_k = f(x_k, y_k)$ истиғамәтиндә $M_k M_{k+1}$
дүз хәтт парчасы чәкилир. Бу парчаның $A_k(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hf_k}{2})$

орта нөгтәсиндә мејданың $\tau_k = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hf_k}{2})$ истиға-
мәти тәјин олунур. Сонра исә һәмш бу τ_k истиғамәтиндә
 $M_k M_{k+1}$ парчасы чәкилир. Електрон (1) тәлиинин $M_k(x_k, y_k)$
нөгтәсиндә кеч и интеграл тәрифи әппроксимасија едәи
сыныг хәтт һиссәл кими истиғамәти [x_k, x_{k+1}] парча аралығын
һәр бәшәдә дәгиг идиришләр. Бу тәһәдә Рунге-Кутта схемини
һесаблима схемини сәһәт хәтләг методулан (§ 5) дә-
гиг олур.

Рунге-Куттаның үчтәртибли, дөрттәртибли, бештәртибли
вә с. кими дәгиглији олан схемләри дә вардыр. Бу схемләрин
ән чох ишләлиши, Електрон һесаблима машикларының
стандарт програм шәклиндә јәшланы дөрттәртибли дәгиглији
олан ашағылақы схемдир:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (\tau_1 + 2\tau_2 + 2\tau_3 + \tau_4).$$

$$\tau_1 = f(x_k, y_k), \tau_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \tau_1),$$

$$\tau_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \tau_2), \quad (6)$$

$$\tau_4 = f(x_k + h, y_k + h \tau_3).$$

Дедикләримиздән адындыр ки, бүтүн Рунге-Кутта схем-
ләринин јүксәк тәртибли дәгиглији вардыр (сыныг хәтләг
схеми мүстәсна олмагла). Бу схемләрин һәр бириндә һалли
 y_k гијмәти өзүлән әввәлки гијмәтләг үзәриндә мүәјјән сәјдә
ардычыл әмәлијјатлар апармагла тәпылыр. Бүтүн y_k ($k = 1, 2, \dots, n$) гијмәтләри ејни дүстурла һесаблиыр вә апарылан
әмәлијјатлар бу дүстурдан ајдын көрүнүр.

Рунге-Кутта методу ила ЕРМ-та дифференциал тәлији
һалә етмәк үчүн ашағылақы алгоритмдән истифадә едилир:

1. Дахил етмәли: x_0, b, y_0, n .

2. Һесаблималы: $h = \frac{b-x_0}{n}$.

3. Габул етмәли: $y_k = y_0, x_2 = x_0$.

4. Һесаблималы: $\tau_1 = f(x_k, y_k)$.

5. Һесаблималы: $\tau_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \tau_1)$.

6. Һесаблималы: $\tau_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \tau_2)$.

7. Һесаблималы: $\tau_4 = f(x_k + h, y_k + h \tau_3)$.

8. Һесаблималы: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (\tau_1 + 2\tau_2 + 2\tau_3 + \tau_4)$.

9. Чап етмәли: x_k, y_k .

10. Һесаблималы: $x_{k+1} = x_k + h$.

11. Габул етмәли: $x_k = x_{k+1}, y_k = y_{k+1}$.

12. Јохламалы: $x_k < b$ оларса, 4-чү адымә кечмәли, әкс
һалдә исә 13-чү адымә кечмәли.

13. Сон.

§ 5. АДАМС МЕТОДУ

Рунге-Кутта методу ила дифференциал тәлији һалә етдик-
дә, һалли һәр бир y_k гијмәтини тапмаг үчүн бәјүк һесабла-
малар апарылыр. Буна көрә дә сәг тәрәфиниң аналитик ифа-
дәси мүрәккәб олан дифференциал тәлији Рунге-Кутта үсүлу
ила һалә етмәк әлверишли дејилдир. Бу һалдә Адамс¹ мето-
дулан истифадә олунур. Адамс методу ила тәлији һалә
едәркән һәр дәфә тәлијиң сәг тәрәфини ардычыл олараг је-
нидән һесабламаг тәләб олунмур.

Тутаг ки,

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

¹ Адамс Джон Кауи (1818—1892) иккиләс рәјәи јатчысы вә әс-
трономудур.

тэнлигийн $[x_0, b]$ парчасында

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

башлангыч шартини өдгөн хэллэйн тапмаг лэзмдэр. $[x_0, t]$ парчасыны $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, \dots, n$) нөггэлэри илэ n бэрэбэр хиссэж бөлөк. $[x_k, x_{k+1}]$ парчасы үэрэ (1) тэнлигийн, $y' = f(x, y)$ бэрэбэрлигийн интегралласаг вэ $y_k = y(x_k)$ олдугуну нээрэ алсаг

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx$$

вэ яа

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx \quad (3)$$

олар. Фэрэ елэс ки, (1) тэнлиж хэллэйн бир нечэ $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$ нөггэлэриндэ $y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots$ гижмэтлэри мэлүмдэр. Онда $y' = f(x, y) = \psi(x)$ функциясынын бу нөггэлэрин Δy_k этрафында гижмэтлэрини Нютсун интерполјасија дүстүрү (XIX, § 6) илэ тэгриби олараг тапмаг олар:

$$y' = y'_k + t \Delta y'_{k-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y'_{k-3} \quad (4)$$

(дүстүрдэ 4 хэдэ көтүрмэклэ кифајэтлэнирик).

Бурада $t = \frac{x - x_k}{h}$, $y'_k = y'(x_k) = \psi(x_k)$ вэ $\Delta y'_k = y'_{k+1} - y'_k$ y' -ин (4) ифалэсини (3) бэрэбэрлижиндэ јеринэ јазсаг вэ $dx = h dt$ олдугуну нээрэ алсаг,

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= h \int_0^1 \left(y'_k + t \Delta y'_{k-1} + \frac{t+1}{2} \Delta^2 y'_{k-2} + \right. \\ &+ \frac{t^2+3t+2}{6} \Delta^3 y'_{k-3} \Big) dt = h \left(y'_k + \frac{1}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \right. \\ &+ \frac{3}{8} \Delta^3 y'_{k-3} \Big) = h y'_k + \frac{1}{2} h \Delta y'_{k-1} + \\ &+ \frac{5}{12} h \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3}{8} h \Delta^3 y'_{k-3} \end{aligned} \quad (5)$$

олар. Бурада $q_k = h y'_k = hf(x_k, y_k)$, $\Delta q_k = q_{k+1} - q_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) ишарэлэрини гэбул етдикдэ

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3} \quad (6)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \quad (7)$$

дүстүрлэри алыныр.

Бедэлкклэ, (1) тэнлиж хэллэйн тэгриби гижмэтлэри (6) вэ (7) дүстүрлэри васитэсилэ һесаблиныр. (6) дүстүрунэ Адамсын екстрополјасија дүстүрү дејилир.

(6) вэ (7) дүстүрлэри илэ һесаблама апармаг үчүн дөрд y_0, y_1, y_2, y_3 башлангыч гижмэти мэлүм олмалдыр. y_0, y_1, y_2, y_3 гижмэтлэрини илэ (2) шартиндэ истифада едэрэк Рунге-Кутта методу илэ тапмаг олар. Бу гижмэтлэр мэлүм олдугда $q_0 = hf(x_0, y_0)$, $q_1 = hf(x_1, y_1)$, $q_2 = hf(x_2, y_2)$, $q_3 = hf(x_3, y_3)$ гижмэтлэри тапылыр вэ ашагыдакы чэдвэл тэртиб едилир:

t	x_k	y_k	Δy_k	$y'_k = \frac{\Delta y_k}{h}$	$q_k = hf(x_k, y_k)$	Δq_k	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	x_0	y_0		$f(x_0, y_0)$	q_0	$\Delta q_0 = q_1 - q_0$	$\Delta^2 q_0 = \Delta q_1 - \Delta q_0$	$\Delta^3 q_0 = \Delta^2 q_2 - \Delta^2 q_1$
	x_1	y_1		$f(x_1, y_1)$	q_1	$\Delta q_1 = q_2 - q_1$	$\Delta^2 q_1 = \Delta q_2 - \Delta q_1$	
	x_2	y_2		$f(x_2, y_2)$	q_2	$\Delta q_2 = q_3 - q_2$		
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3			
	x_4							
	x_5							
	x_6							

y_0, y_1, y_2, y_3 мэлүм олдугда чэдвэлдэ диагонал үэрэ јериндэ $q_3, \Delta q_3, \Delta^2 q_3, \Delta^3 q_3$ эдэллэриндэн истифада едэрэк, (6) дүстүрү васитэсилэ Δy_3 тапылыр вэ 4-чү графаја дахил едилир. Сонра илэ (7) дүстүрү васитэсилэ $y_4 = y_3 + \Delta y_3$ тапылыр. y_4 гижмэти тапылгандан сонра $f(x_4, y_4)$, $q_4, \Delta q_4, \Delta^2 q_4, \Delta^3 q_4$ эдэллэри тапылыр васитэсилэ (6), (7) дүстүрлэрини $\Delta y_4, y_5$ тапылыр. Бедэлкклэ, просеси давам еттирмэклэ вэ һэр алдында (1) тэнлигийн сағ тэрафини бир дафа һесабламагла јухарыдакы чэдвэл долдурулыр. $x_k > b$ олдугда һесаблама дајандырылыр. Һесабламамы ЕРПМ-да апармаг үчүн (5) дүстүрунү ачыг етдикилдэ јзмаг лэзмдир. Бу мэгсэдлэ

$$\Delta y_{k-1} = y_k - y_{k-1},$$

$$\Delta^2 y_{k-1} = y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2},$$

$$\Delta^3 y_{k-1} = y_k - 3y_{k-1} + 3y_{k-2} - y_{k-3}$$

дүстүрлэриндэн истифада едилир вэ (5) дүстүрунда охшар эдэллэр ислаһ етилдикдэн сонра

$$y_{k-1} = y_k + \frac{h}{24} (55 y'_k - 59 y'_{k-1} + 37 y'_{k-2} - 9 y'_{k-3}) \quad (8)$$

апылыр. ЕРПМ үчүн програм тэртиб етдикдэ (8) дүстүрундакы вэ ашагыдакы алгоритмдэн истифада етмэк олар.

1. x_0, y_0, h эдэллэрини дахил етмэли.

2. y_1, y_2, y_3 гижмэтлэрини Рунге-Кутта алгоритми илэ тапмаг

3. һесабламамы: $q_0 = y'_0 = f(x_0, y_0)$.

4. һесабламамы: $q_1 = y'_1 = f(x_1, y_1)$.

5. һесабламамы: $q_2 = y'_2 = f(x_2, y_2)$.

6. һесабламамы: $q_3 = y'_3 = f(x_3, y_3)$.

7. һесабламамы: $x_k = x_0 + 3h$.

8. Һесабламалы: $y_4 = y_{n+1} = \frac{h}{24} (55 q_0 - 59 q_1 + 37 q_2 - 9 q_3)$.

9. Һесабламалы: $x_{k+1} = x_k + h$.

10. Чап етмәли: x_{k+1}, y_{k+1} .

11. Һесабламалы: $q_k = q_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$.

12. Гәбул етмәли: $q_0 = q_1, q_2 = q_3, q_3 = q_4$.

13. Јохламалы $x_{k+1} \leq 1$. Әкәр $x_{k+1} < b$ оларса, онда 4-чү бәндә кечмәли, әкә балда 14-чү бәндә кечмәли.

14. Сон.

§ 6. МИЛНІ МЕТОДУ

Милн методу садә вә практик (чәһәтләп әлверишлидир. Тутак ки,

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

дифференциал тәңлијини $[x_0, 1]$ парчасында $y(x_0) = y_0$ башлангыч шәртини өдәјән тәҗриби һәллини тапмаг теләб олунур.

Бурада да $h = \frac{b-x_0}{n}$, $x_k = x_0 + kh$, $y_k = y(x_k)$,

$$y_k = f(x_k, y_k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

гәбул олунур.

Милн дүстуруну алмаг үчүн x_k, x_{k+1}, \dots нөггәләриниң јажын әтрафында $y'(x) = f(x, y(x))$ функцијасының гијмәтләрини үчтәртибли сонлу фәргә гәдәр кәтүрүлүш Нјутон интерполјасија дүстуру (ХІХ, § 6) илә тәҗриби һесабламаг ләзымдыр.

$$y' = y_k' + q \Delta y_k' + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_k' + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_k' \quad (2)$$

Бурада

$$q = \frac{x-x_k}{h} \text{ вә } \Delta y_k' = y_{k+1}' - y_k'$$

(2) дүстурунда $k = m-4$ кәтүрәк вә алынған барабарлијә x -ә нәзәрән $[x_{m-4}, x_m]$ парчасы үзгә интеграллајаг:

$$\int_{x_{m-4}}^{x_m} y'(x) dx = \int_{x_{m-4}}^{x_m} \left[y_{m-4}' + q \Delta y_{m-4}' + \frac{1}{2} (q^2 - q) \Delta^2 y_{m-4}' + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y_{m-4}' \right] dx.$$

Бурадан $q = \frac{x-x_{m-4}}{h}$ вә $dx = h dq$ олдуғуна әсасән

$$y_m - y_{m-4} = h \left(4y_{m-4}' + 8\Delta y_{m-4}' + \frac{20}{3} \Delta^2 y_{m-4}' + \frac{8}{3} \Delta^3 y_{m-4}' \right) \quad (3)$$

аларыг. Сонлу фәргләрин

$$\Delta y_{m-4}' = y_{m-3}' - y_{m-4}',$$

Милн Едуард Аотур (1898—1950) киңиләс рижинијатчысы вә астрономудур.

$$\Delta^2 y_{m-4}' = y_{m-2}' - 2y_{m-3}' + y_{m-4}'$$

$$\Delta^3 y_{m-4}' = y_{m-1}' - 3y_{m-2}' + 3y_{m-3}' - y_{m-4}'$$

гијмәтләрини (3) дүстурунда јеринә јаздыгда Милнни ашағыдакы биринчи дүстуру алыныр:

$$y_m = y_{m-4} + \frac{4h}{3} (2y_{m-3}' - y_{m-2}' + 2y_{m-1}'). \quad (4)$$

Милнни икинчи дүстуруну алмаг үчүн (2) дүстурунда $k = m-2$ кәтүрәк, алынған барабарлији $[x_{m-2}, x_m]$ парчасы үзгә интегралламаг вә $q = \frac{x-x_{m-2}}{h}$ олдуғуна нәзәрә алмаг ләзымдыр:

$$y_m - y_{m-2} = h \left(2y_{m-2}' + 2\Delta y_{m-2}' + \frac{1}{3} \Delta^2 y_{m-2}' \right). \quad (5)$$

Сонлу фәргләрин

$$\Delta y_{m-2}' = y_{m-1}' - y_{m-2}', \quad \Delta^2 y_{m-2}' = y_m' - 2y_{m-1}' + y_{m-2}'$$

гијмәтләрини (5) дүстурунда јеринә јаздыгда Милнни икинчи дүстуру алыныр

$$y_m = y_{m-2} + \frac{h}{3} (y_{m-2}' + 4y_{m-1}' + y_m'). \quad (6)$$

Верилмиш (1) тәңлијиниң $y(x_0) = y_0$ башлангыч шәртини өдәјән һәллини тапмаг үчүн әввәлчә Рунге-Кутта методу илә y_0, y_1, y_2, y_3 башлангыч гијмәтләри тапылыр. $y_k = y(x_k)$ ($k=4, 5, 6, \dots$) гијмәтләри исә ашағыдакы гәјдә илә һесабламыр:

1) y_k ($k=4, 5, 6, \dots$) гијмәтиниң биринчи $y_k^{(1)}$ јажынлашмасы (4) дүстуру илә тапылыр.

2) (1) дифференциал тәңлијиндә $y_k^{(1)}$ гијмәтиниң нәзәрә алмаг илә $y_k^{(1)'} = f(x_k, y_k^{(1)})$ гијмәти тапылыр.

3) y_k ($k=4, 5, 6, \dots$) гијмәтиниң икинчи $y_k^{(2)}$ јажынлашмасы (6) дүстуру илә тапылыр:

$$y_k^{(2)} = y_{k-2} + \frac{h}{3} (y_{k-2}' + 4y_{k-1}' + y_k^{(1)'}).$$

Милн кәстәрмишдир ки, тәңлији бу үсулла тәҗриби һәлл едәркән бурахылған мүтләг хәтә $\epsilon_k = \frac{|y_k^{(2)} - y_k^{(1)}|}{29}$ олур. Де-

мәли, ϵ әдәди әввәлчәдән кәстәрилмиш ләтәдырса, онда $\epsilon_k < \epsilon$ олдугда $y_k \approx y_k^{(2)}$ вә $y_k' \approx f(x_k, y_k^{(2)'})$ гәбул едилә биләр. Буңдан сонра y_k гијмәти јухарыда кәстәрилән һесаблама просесиниң јенидән тәкрәр етмәклә тапылыр. Әкәр $\epsilon_k > \epsilon$ оларса, онда h адамы азалдылыр. v_0, v_1, v_2, v_3 гијмәтләри јенидән тапылыр вә һесаблама просеси тәкрәр олунур.

Беләтшкә, Милн методунда һәлли аштарылған үч гијмәтләри ардыңыл олараг тәһий олунә билир ки, бу да метод илә дегиг олдуғуна вә ондан ЕРҒМ-да сәмәрли истифада етмәк мүмкүн олдуғуна кәстәриләр.

СЫРАЛАР

XXXV ФӘСИЛ

ӘДӘДИ СЫРАЛАР

§ 1. ЯҢЫЛАН ӘДӘДИ СЫРАЛАР ВӘ ОНЛАРЫН САДӘ ХАССӘЛӘРИ

Индија кими сонлу сәјдә әдәдләрин чәминдән данышылмышдыр. Бурада сонлу сәјдә әдәдләрин чәми аңлајышы „сонсуз сәјдә“ әдәдләр (топлананлар) үчүн үмумиләшдирилир вә белә „чәм“ аңлајышынын бир сыра хассәләри өјрәнелир.

Тутаг ки, $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ әдәдләри ардычыллыгы верилмишир. Бу әдәдләрдән дүзәлмиш

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (1)$$

вә ја

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \quad (2)$$

иҫадәсинә (формал олараг дүзәлмиш „чәмә“) *әдәди сыра* вә ја садәчә олараг *сыра* дејилир. U_k ($k = 1, 2, \dots$) әдәдләри сыранын һәдләри. U_1 әдәди сыранын биринчи, U_n исә n -чи һәдди адыныр.

Сонлу сәјдә топлананларын чәми вә ону тәјинетмә гәјдәсы бизә мәлумдур. Сыра исә „сонсуз сәјдә“ әдәдләрин „чәмидир“. Буна кәрә дә сонсуз сәјдә әдәдләрин чәми нә демәк олдугуну тәјин (мүәјјән) етмәлијик. Бу мәгсәдлә (1) сырасынын һәдләринән ашагыдакы кими чәмләр дүзәлдәк:

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{k=1}^n U_k \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Бу чәмә (1) сырасынын n -чи *хүсуси чәми* дејилир.

Тә’риф 1. (1) сырасынын S_n *хүсуси чәмләри ардычыллыгынын сонлу*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (4)$$

лимити варса, һәмми сыраја ығылан сыра вә S әдәдинә онун чәми дејилир. Буну

$$S = U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots$$

вә ја

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} U_k$$

кими јазырлар.

Әкс һәлдә, ја’ни $\{S_n\}$ ардычыллыгынын лимити олмәдыгда (1) сырасына *дагылан сыра* дејилир. Дагылан сыранын јухарыда дејилмиш мә’нада чәми јохдур. Лакин $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ вә ја $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$ олдугда биз кәләчәкдә шәрти олараг

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k = \infty \quad \text{вә ја} \quad \sum_{k=1}^{\infty} U_k = \pm \infty$$

кими јазачагыг.

Гәјд едәк ки, һәр бир сонлу

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad (5)$$

чәминә сонсуз сәјдә һәдләри сәфра бәрәбәр

$$U_{n+1} = U_{n+2} = \dots = 0$$

олан сыра кими бахмаг олар. Бу һәлдә $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ сырасынын чәми (5) чәминә бәрәбәр олар.

Мисал 1.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \quad (5')$$

сырасы ығыландыр. Догрудан да,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

хүсуси чәмкин $n \rightarrow \infty$ шәртиндә сонлу лимити вар:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 = S.$$

Демәли, (5') сырасы ығыландыр вә 1 әдәди онун чәмидир:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Мисал 2.

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots \quad (6)$$

сырасынын ығылмасынын тәдгиг етмәли.

Һәндәси сиксиләнин бирикчи һ һәддини чәми дәстуруна әсәсән сыранын хусуси чәми үчүн

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} q^n \quad (q \neq 1)$$

иғадәси алыныр.

$|q| < 1$ олдугда $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ олдугундан (XII, § 3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} q^n \right) = \frac{1}{1 - q}$$

олар, я'ни $|q| < 1$ олдугда (6) сырасы җығылыр вә онун чәми $\frac{1}{1 - q}$ әдәдиңә бәрәбәрдир:

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots \quad (7)$$

$|q| > 1$ олдугда икә $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ (XII, § 8) олдугундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} q^n \right) = \infty$$

олар ки, бу да (6) сырасының дағылан олдугуну көстәрир. $q = -1$ олдугда (6) сырасы

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots \quad (8)$$

шәклиндә җазылар вә онун хусуси чәми

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{н чүт әдәд олдугда,} \\ 1, & \text{н тәк әдәд олдугда} \end{cases}$$

олар. Бу S_n ардычыллыгының икә лимити юхдур (XII, § 1). Демәли, $q = -1$ олдугда (6) сырасы, я'ни (8) сырасы дағыландыр

$q = 1$ олдугда икә (6) сырасының хусуси чәми $S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$ вә $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ олар. Я'ни, бу һалда да, (6)

сырасы дағыландыр.

Демәли, (6) сырасы $|q| < 1$ олдугда җығылан, $|q| > 1$ олдугда икә дағыландыр.

Җығылан әдәди сыраларың бир сыра садә хәссәләри вардыр.

Теорем 1. (1) сырасы җығыландырса, истәнилән C әдәди үчүн

$$\sum_{k=1}^{\infty} C U_k \quad (9)$$

сырасы да җығыландыр.

Исбат. (1) сырасының хусуси чәми S_n оларса, онда

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n C U_k = C \sum_{k=1}^n U_k = C S_n$$

олар вә бурадан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (C S_n) = C \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = C S.$$

алыныр. Демәли, $\sum_{k=1}^{\infty} C U_k$ сырасы җығыландыр.

Һәтәкә. (1) сырасы дағыландырса, истәнилән $C \neq 0$ әдәди үчүн (9) сырасы да дағыландыр.

Теорем 2. (1) вә

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k = V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots \quad (10)$$

сырасы җығыландырса, онда һәмми сыраларың чәми һә фәрги адланан

$$\sum_{k=1}^{\infty} (U_k + V_k) = (U_1 + V_1) + (U_2 + V_2) + \dots + (U_n + V_n) + \dots \quad (11)$$

вә

$$\sum_{k=1}^{\infty} (U_k - V_k) = (U_1 - V_1) + (U_2 - V_2) + \dots + (U_n - V_n) + \dots \quad (12)$$

сыралары да җығыландыр.

Исбат. (1), (10), (11) вә (12) сырларының хусуси чәмләрини уҗуи оларар S_n , σ_n , T_n вә Q_n илә ишарә етсәк, онда

$$\begin{aligned} T_n &= S_n + \sigma_n, & Q_n &= S_n - \sigma_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} T_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n, & \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \end{aligned}$$

олар. Бурадан теоремин доғрулуғу аҗындыр.

Ғејә едәк ки, (1) вә (10) сырларының бири җығылан, диҗәри дағылан олдугда (11) вә (12) сырлары дағылан олар. (1) вә (10) сырларының икиси дә дағылан олдугда (11) вә (12) сырларының җығылан вә җә дағылан олмасы һағында һеч һә демәк олмәз. Мәсәлән, дағылан

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

вә

$$-1 - 1 - \dots - 1 - \dots$$

сыраларының чәми җығыландыр:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (U_k + V_k) = 0 + 0 + \dots + 0 + \dots,$$

фәрги икә дағыландыр:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (U_k - V_k) = 2 + 2 + \dots + 2 + \dots$$

Теорем 3. *Ягылан (1) сырасынын һәдләрини, дү-
зулуи сырасыны позмади, истәнилән шәкилдә групп-
ландырылды алыни*

$$(U_1 + U_2 + \dots + U_n) + (U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_m) + \dots + (U_{n_{k-1}+1} + U_{n_{k-1}+2} + \dots + U_{n_k}) + \dots \quad (13)$$

*сырасы да ягыландыр өбүнүн чәли верилмиш (1) сы-
расынын чәлигә барабардыр.*

Исбаты. Тутар ки, (1) сырасы S әдәдинә ягылыр. (13) сырасыны

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n + \dots \quad (14)$$

кимн јазар; бурада

$$T_m = U_{n_{m-1}+1} + U_{n_{m-1}+2} + \dots + U_{n_m}, \quad k_0 \leq 0, \\ (m = 1, 2, \dots)$$

(1) вә (14) сырларынын хусуси чәмләрини ујгун оларар S , вә W_n илә ишарә етсәк, онда $W_n = S_{n_n}$ олар. Бурадан $n \rightarrow \infty$ шәртиндә $n \rightarrow \infty$ олдуғуну нәзәр әлсәг,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n_n} = S$$

алынар ки, бу да (13) сырасынын S әдәдинә ягылдығыны көстәрир.

Гәјд. Теоремн тәрсн доғру дејилди. Јәни (13) сырасынын јыгыл-
масыдан (1) сырасынын јыгылмасы чыхыр. Доғрудан да, бүгүн һәдләри
сифра барабар олар

$$(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots$$

сырасы јыгыландыр, ләкин мәтәризаләри ачдыгда алынкан

$$1-1+1-\dots+(1-1)^{n+1}+\dots$$

сырасы јагыландыр.

Нәтицә. (13) сырасы дагылан олдугда ујгун (1) сырасы
да дагылан олар.

Исбат етдијимиз теоремләр көстәрир ки, јыгылан сырала-
рын бир сыра хәссәләри сонлу сәјдә һәдләр чәминин ујгун
хәссәләринин аналогудур. Бунунла белә, сонлу чәмләрин һәр
бир хәссәсинин јыгылан сыралар үчүн доғру олдуғуну сәлә-
мәк олмаз.

§ 2. СЫРАНЫН ГАЛЫҒЫ ВӘ ОНУН ЈЫҒЫЛМАСЫ НАГҒЫНДА ЗӘРУРИ ВӘ КАФИ ШӘРТЛӘР

Верилмиш

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (1)$$

сырасынын биринчи n сәјдә һәддини ачдыгда

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_{n+m} + \dots \quad (2)$$

сырасы алынар.

Теорем. (1) вә (2) сырлары ејни заманда ја
јыгыландыр, ја да дагыландыр.

Исбаты. (1) вә (2) сырларынын хусуси чәмләрини ујгун
оларар S_n вә σ_n илә ишарә едәк:

$$\sigma_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_{n+m}.$$

Онда $S_{n+m} - S_n = \sigma_n$ вә ја

$$S_{n+m} = S_n + \sigma_n \quad (3)$$

барабарлијн доғру олар.

Тутар ки, (1) сырасы јыгыландыр. Онда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ лимити
вә буна көрә дә $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+m} = S$ лимити сонлу олар. Бу һалда

(3) барабарлијиндән

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+m} - S_n) = S - S_n$$

мүнәсибәти алынар ки, бу да (2) сырасынын јыгылан вә чә-
минин $S - S_n$ олдуғуну көстәрир

Инди фәрә едәк ки, (2) сырасы јыгыландыр: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$.

Онда (3) барабарлијиндән

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+m} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + \sigma_n) = S_n + \sigma$$

алынар ки, бу да (1) сырасынын јыгылан олдуғуну көстәрир.

Бурадан ајдындыр ки, (1) вә (2) сырларынын бири дагы-
лан олдугда, о бири дә дагылан олар. Чүнки сыранын бири
јыгылан олдугда, јухарыда исбат етдијимиз кими о бири дә
јыгылан олмадыр.

Нәтицә. Верилмиш сыранын сонлу сәјдә һәддини
атмаз вә ја она сонлу сәјдә јени һәддә алава етмәк, һәмин
сыраны јыгылан вә ја дагылан олмагына тәсир етмиз
(лишмиш).

(2) сырасына (1) сырасынын n -чи галығы дејилир. (1) сы-
расы јыгылан олдугда исбат етдијимиз теоремә әсәсән (2) сы-
расы да јыгылан олар. (2) сырасынын чәмини r_n илә ишарә едәк:

$$r_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_{n+m} + \dots \quad (4)$$

Онда

$$S - S_n = r_n \quad (5)$$

вә ја

$$S = S_n + r_n \quad (5)$$

барабарлијини јазмаз олар. Бурадан вә сыранын јыгылмасынын
тәрифинә әсәсән ашагыдакы тәклиф алынар: (1) сырасынын
әдәдинә јыгылан олмагы үчүн

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = 0 \quad (6)$$

чүнәсибәтинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртди.

Сырларын јыгылмасынын тәрифинә көрә (1) сырасынын
әдәдинә јыгылмасы онун S_n хусуси чәмләри артычыллыгы-
нн һәмин әдәдә јыгылмасына эквиваленттир. Артычыллыгын
јыгылан олмагы үчүн зәрури вә кафи шәрт Коши критери-

синдә көстәрилер (XII, § 1). Һәмми критерийи хусуси чәмләр ардычыллыгы үчүн сөйләдикдә (1) сырасының җыгылган олмасы үчүн ашагыдагы зәрури вә кафи шәрт алыныр:

Коши критерийи. (1) сырасының җыгылган олмасы үчүн ашагыдагы шәртиң өдәнилмәси зәрури вә кафидир. Истәнилән $\epsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N > 0$ бар ки, n -нин $n > N$ бәрәбәрсизлижини өдәтән иштиҗари натурал гижәтләриндә вә истәнилән натурал p әдәди үчүн

$$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon \quad (7)$$

бәрәбәрсизлижи өдәнилер.

Хусуси һалда, җыгылган сыралар үчүн (7) шәрти $p = 1$ олдугда

$$|U_{n+1}| < \epsilon \quad (n > N)$$

кияи җазылыр ки, бу да җыгылган сыралар үчүн

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

шәртиңни өдәнилдижини көстәрир. Бу тәклифи биләвәсита ашагыдагы кийи дә исбат етмәк олар:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Беләликлә, ашагыдагы тәклиф алыныр.

Сыраларың җыгылган олмасы үчүн зәрури шәрт: Җыгылган сыраның үмүми һәддиңни лимити сыфра бәрәбәрди:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0. \quad (8)$$

Сыраларың җыгылган олмасы үчүн бу зәрури шәрт кафи деҗилдир. Мәсәлән, һармоник сыра адланан

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (9)$$

сырасының үмүми һәддиңни лимити сыфра бәрәбәрди:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, ләкин һәмми сыра дагыландыр. Доғрудан да, истәнилән натурал $n > 1$ әдәди үчүн

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

олар, җәһни $\epsilon = \frac{1}{2}$ вә $p = n$ олдугда (7) шәрти һеч бир натурал n әдәди үчүн өдәнилимиз. Бу исә (9) сырасының дагылан олдугуну көстәрир.

Демәли, верилмиш сыраның үмүми һәддиңни сыфрыдан фәргли лимити барса вә җахуа да лимити җахурса, онда һәмми сыра дагыландыр.

Мисал 1.

$$1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n + \dots$$

сырасы дагыландыр. Доғрудан да, сыраның җыгылган олмасы үчүн зәрури шәрт өдәнилимиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty.$$

Мисал 2.

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \dots + \frac{n^2}{1+n^2} + \dots$$

сырасы дагыландыр.

Доғрудан да, сыраның җыгылган олмасы үчүн зәрури шәрт өдәнилимиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1 \neq 0.$$

Мисал 3.

$$a - a + a - \dots + (-1)^{n+1} a + \dots \quad (a > 0)$$

сырасы дагыландыр.

Сыраның үмүми һәддиңни лимити, җәһни $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} a$ лимити җахур.

§ 3. МҮСБӘТҺӘДЛИ СЫРАЛАРЫҢ ҖЫГЫЛМА АЛАМӘТЛӘРИ

Верилмиш

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (1)$$

сырасының һәдләри мәңгиди олмәҗән әдәлләр $U_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) олдугда она мүсбәтһәдди сыра деҗилер. Белә сыраларың гурудушу нисбәтән сәләдир. Буна көрә дә сыларың җыгылмасы һаггында бир сыра даһа сәдә вә конкрет тәклифләр сөйләмәк мүмкүндүр. Бу тәклифләрәң бәзиси сонсуз сәһәдди геҗримәхсуси интегралларың җыгылма аламәтләрәңни хатырладыр.

1. Зәрури вә кафи шәрт.

Теорем 1. Мүсбәтһәдди (1) сырасының хусуси чәмләрәң ардычыллыгының җахарыдан мәһдүд олмасы онуң җыгылган олмасы үчүн зәрури вә кафи шәртиңди.

Шәртиң зәрурилији. Тәҗәҗ ки, мүсбәтһәдди (1) сырасы җыгыландыр: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Җыгылган ардычыллыг исә мәһдүдләр (XII, § 2). Бурадан

$$S_n < M \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

мүнәсибәти алыныр.

Шәртиң кафилији. Мүсбәтһәдди сыраның хусуси чәмләрәң ардычыллыгы монотон азалмәҗән олар:

$$S_n < S_n + U_{n+1} = S_{n+1} \quad (U_{n+1} > 0).$$

Монотон артан (азалмәҗән) вә җахарыдан мәһдүд олан ардычыллыг исә җыгыландыр (XII, § 3). Бурадан (1) сырасының җыгылган олмасы алыныр.

Пример. Мүсбәтһәдди сыра ығылан олмадыда онун
хүсуси чәйләри ардыңчалығы гејри-мәһәүд оларға
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$.

Гејд. Сыраның хүсуси чәйләри ардыңчалығының мәһәүд олмасы истаһилән сыраның ығылан олмасы үчүн зәүрүи шәртдир, ләкин хәфи дејилдир.

Мәсәләң, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ сырасының хүсуси чәйләри ардыңчалығының мәһәүд $|S_n| < 1$ олмасына баһмајарағ һәмми сыра дағыландыр.

2. Коши-Махлоренин интеграл әләмәти.

Мүсбәтһәдди сыраларың вә мәңфи гијмәтләралмајан функцияларың гејри-мәхсуси интегралының ығылмағы арасында мүәјјән әләгә вардыр.

Теорем 2. $f(x)$ функциясы $[1, \infty)$ областында тәҗҗин олунмуш, мәңфи гијмәтләралмајан вә монотон азалан олдуғда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \quad (3)$$

сыртсы илә

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \quad (4)$$

гејри-мәхсуси интегралы ејни әләмәдә ја ығыландыр, ја да олгыландыр.

Исбаты. $f(x)$ функциясы $[1, \infty)$ областында азалан олдуғундан x -ни $k < x < k+1$ ($k=1, 2, \dots$) гијмәтләриндә

$$f(k) > f(x) > f(k+1) \quad (k=1, 2, \dots)$$

бәрабәрсизликләри дөғрү олар. Бу бәрабәрсизликләриң бүтүн тәрәфләриңи $[k, k+1]$ парчасы үзрә интегралласағ,

$$f(k) > \int_k^{k+1} f(x) dx > f(k+1) \quad (k=1, 2, \dots)$$

мүнасибәтиңи аларығ. Бурада k -ја $1, 2, \dots, n$ гијмәтләриңи верәрәк алынған бүтүн бәрабәрсизликләри тәрәф-тәрәфә топлајағ:

$$\sum_{k=1}^n f(k) > \int_1^{n+1} f(x) dx > \sum_{k=1}^n f(k+1). \quad (5)$$

(3) сырасының хүсуси чәмини $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ илә ишварә

едәк. Онда (5) бәрабәрсизликләриңи

$$S_n > \int_1^{n+1} f(x) dx > S_{n+1} - f(1) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (6)$$

кими јазмағ олар.

Тутағ ки, (3) сырасы ығыландыр. Онда 1-чи теоремә көрә $S_n < M$ ($n=1, 2, \dots$) олар. Бу һалда (6) мүнасибәтиңдән истаһилән n үчүн өдәкиләң

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < M \quad (7)$$

бәрабәрсизлији алыныр. (7) бәрабәрсизлији өдәкилијиндән мәңфи гијмәтләралмајан функцияның сәнсүз сәрһәдди гејри-мәхсуси интегралының ығылма әләмәтиңә көрә (XXIV, § 4) (4) гејри-мәхсуси интегралы ығылан олар.

Иңди, тутағ ки, (4) гејри-мәхсуси интегралы ығыландыр. Онда јухарыда хәстәрдијимиз мәлүм теоремә (XXIV, § 4, теорем 1) көрә

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < \int_1^{\infty} f(x) dx < +\infty$$

олар. Бу һалда (6) бәрабәрсизлијиңдән

$$S_{n+1} < f(1) + \int_1^{n+1} f(x) dx = M < +\infty \quad (n=1, 2, \dots)$$

мүнасибәти алыныр ки, бу да 1-чи теоремә көрә (3) сырасының ығылан олдуғуну хәстәрир.

Мүсбәтһәдди (3) сырасы дағылан олдуғда онун хүсуси чәйләри ардыңчалығы гејри-мәһәүд олар вә (6) бәрабәрсизлијиңә көрә

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

алынар ки, бу да (4) интегралының дағылан олдуғуну хәстәрир.

(4) гејри-мәхсуси интегралы дағылан олдуғда исе $\int_1^{n+1} f(x) dx \rightarrow$

$+\infty$ ($n \rightarrow \infty$) вә (6) бәрабәрсизлијиңә көрә $S_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), јәни (3) сырасы дағылан олар.

Мисал 1.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (8)$$

сырасының ығылмасының тәдтиғ етмәли.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x > 1) \text{ функциясы вәсһтәсиля (8) сырасының} \quad (9)$$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$$

шаклинда жазмаг олар. Онда 2-чи теорема көрө (9) сырасы

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (10)$$

гејри-мәхсуси интегралы ејни заманда ја жыгыландыр, ја да дагыландыр. Мәлумдүр ки, (10) гејри-мәхсуси интегралы $x > 1$ олдугда жыгыл, $x < 1$ олдугда исе дагыландыр (XXIV, § 2). Демели, (9) сырасы $a > 1$ олдугда жыгыл, $a < 1$ олдугда исе дагыландыр.

Хүсуси ҳалда, $a = 1$ олдугда алынган гармоник

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

сырасы дагылан, $a = 2$ олдугда алынган

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

сырасы исе жыгылган олар.

Мисал 2. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ сырасынын жыгылмасыны тэдгиг ет-мөли.

Бурада $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ функцијасы үчүн $\frac{1}{x \ln x} = f(x)$ мұна-сибәти өтәнилип вә һәмни функцијаның гејри-мәхсуси интег-ралы дагыландыр:

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty.$$

Буна көрә дә верилиши сыра дагыландыр.

3. Мүгајисә әламәти.

Теорем 3. Мүсбәтһәдәли

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots$$

вә

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots \quad (11)$$

сыраларынын һәгүн һәдәдәри арасында $U_n < V_n$ ($n = 1, 2, \dots$) мұнасибәти өтәнилипсә, онда (11) сырасы жыгылган (1) сырасы да жыгыл, (1) сырасы дагы-ланган исе (11) сырасы да дагылан.

Исбатм. (11) сырасы жыгылдыгда 1-чи теорема көрә елә

$M > 0$ әдәди вар ки, $a_n = \sum_{k=1}^n V_k < M$ ($n = 1, 2, \dots$) мұнасибәти

өтәнилип. Онда $U_n < V_n$ бәрабәрсизлијинә көрә

$$S_n = \sum_{k=1}^n U_k < \sum_{k=1}^n V_k = a_n < M$$

вә ја

$$S_n < M \quad (n = 1, 2, \dots)$$

бәрабәрсизлији алыныр ки, бу да 1-чи теорема көрә (1) сыра-сынын жыгылган олдуғуну көстәрип.

Мүсбәтһәдәли (1) сырасы дагылан олдугда $S_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) олар вә $S_n < a_n$ мұнасибәтинә әсасән $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) алыныр. Бурадан (11) сырасынын дагылан олдуғу ајдындыр.

Гејд. Теорем $U_n < V_n$ бәрабәрсизлији n -нин мұәјјән n_0 нөмрәсиндән сонра кәләп ($n > n_0$) гижмәтләриндә өтәниликдә дә хәггү олар. Бу сыранын сәһә са дә һәдәдәни атыдыда онун жыгылмасына вә дагылмасына тәсир ет-мәдијәндәп ајдындыр.

Нәтичә 1. Тумаг ки, $V_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) вә

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = \gamma \quad (12)$$

лимити вар. Онда 1) $0 < \gamma < +\infty$ вә (11) сырасы жыгылган олдуғуна (1) сырасы да жыгыл, 2) $0 < \gamma < +\infty$ вә (11) сыра-сы дагылан олдуғуна (1) сырасы да дагылан.

Хүсуси һалда, $U_n \sim V_n$ олдугда (1) вә (11) сыралары ејни заманда ја жыгыландыр, ја да дагыландыр.

Нәтичәнин доғру олдуғуна һәмниг үчүн лимитин тәриғиндән истифадә едәк: (12) бәрабәрлијинә әсасән истәниләп $\epsilon > 0$ әдәди ($\gamma - \epsilon \neq 0$) үчүн елә n_0 нөмрәси вар ки, n -нин n_0 -дан сонра кәләп бүтүн гижмәтләриндә

$$\left| \frac{U_n}{V_n} - \gamma \right| < \epsilon \quad (n > n_0)$$

вә ја

$$(\gamma - \epsilon) V_n < U_n < (\gamma + \epsilon) V_n \quad (13)$$

бәрабәрсизликләри доғрудур. $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ вә $\sum_{n=1}^{\infty} C V_n$ ($C \neq 0$) сы-

раларынын ејни заманда жыгылган вә ја дагылан олдуғуну нә-тичәләп, (13) бәрабәрлијиндән тәғйир ет-тирәп, (13) бәрабәрлији ол-р.

(1) сырасынын

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \quad (14)$$

сырасы ($\alpha > 1$ олдугда жыгылган, $\alpha < 1$ олдугда дагылан, § 2) нәтичәләп ет-тирәп дә аңагыдакы нәтичә алыныр.

Нәтичә 2. Әкәр

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha U_n = \gamma \quad (15)$$

лимити варса, онда 1) $\alpha > 1$ вә $0 < \gamma < +\infty$ олдуғуна (1) сырасы жыгыл, 2) $\alpha < 1$ вә $0 < \gamma < +\infty$ олдуғуна исе (1) сырасы дагылан.

Хүсуси һалда, $U_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ вә $\alpha > 1$ олдугда (1) сырасы жыгыл, $\alpha < 1$ олдугда исе һәмниг сыра дагылан.

Мисал 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2}$$

сырасынын жыгылмасынын тэдгиг етмэли.

Бу сырасыны $U_n = \frac{n}{n^2 + 2}$ үмүмү хэдди үчүн

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2 + 2} = 1$$

барыбарлыж өдөнилдиктинден хэмин сыра жыгыландыр (Нэтичэ 2, 1).

Мисал 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$ сырасынын жыгылмасынын тэдгиг етмэли.

$n \rightarrow \infty$ шэртиндэ

$$\sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$$

вэ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ сырасы дагылан олдуғундан верилэн сыра дагыландыр.

4. Даламбер эламати.

Теорем 4. Мүсбэтхэди

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (U_n > 0, n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

сырасынын хэдлэри n -нин хэр хансы n_0 -дан сонра кэлэн бүтүн гијмэтлэриндэ

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < q < 1 \quad (n > n_0) \quad (16)$$

барыбарсызлыжыни өдөнликдэ (1) сырасы жыгылан,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \quad (n > n_0) \quad (17)$$

барыбарсызлыжыни өдөнликдэ исэ хэмин сыра дагылан-дыр.

Исбатм. n -ин n_0 -дан сонра кэлэн бүтүн гијмэтлэриндэ (16) вэ ја

$$U_{n+1} < q U_n$$

барыбарсызлыжыни өдөнилдикдэ n -ния $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ гијмэтлэрини ашагыдакы барыбарсызлыкхэри јазмаг олар:

$$U_{n_0+1} < q U_{n_0}$$

$$U_{n_0+2} < q U_{n_0+1} < q^2 U_{n_0}$$

$$U_{n_0+m} < q U_{n_0+m-1} < q^m U_{n_0}$$

Саг тэрэфдэки хэдлэрдэн дүзэлмиш

$$U_{n_0} q + U_{n_0} q^2 + \dots + U_{n_0} q^m + \dots$$

сырасы жыгылан (§ 1, мисал 2) олдуғундан 3-ү теоремэ көрэ

$$U_{n_0+1} + U_{n_0+2} + \dots + U_{n_0+m} + \dots$$

сырасы да жыгыландыр. Бурадан исэ (1) сырасынын жыгылан олмасы ајдындыр.

n -ин n_0 -дан сонра кэлэн бүтүн гијмэтлэриндэ (17) барыбарсызлыжыни өдөнилдикдэ ардычыл олараг

$$U_{n+1} > U_n$$

$$U_{n_0} > U_{n_0+1} > U_{n_0+2} > \dots$$

мүнасибэтлэрини јазмаг олар. Бурадан алылан $U_n > U_{n_0} > 0$ ($n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$) мүнасибэти сырасынын жыгылан олмасы үчүн $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ зарури шэртинин (§ 2) өдөнилмэдијини көс-тэрир. Буна көрэ да (1) сырасы дагыландыр.

Нэтичэ (Лимит шэклиндэ Даламбер¹ эламати). Мүсбэтхэди (1) сырасы үчүн

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l \quad (18)$$

лимити варса, онда $l < 1$ олдугда (1) сырасы жыгылан, $l > 1$ олдугда исэ (1) сырасы дагыландыр.

Лимитин тэрифинэ көрэ $l < 1$ олдугда $0 < \varepsilon < 1 - l$ шэртини өдэјэн хэр бир $\varepsilon > 0$ эдэди үчүн елэ n_0 нөмрөси вар ки, n -ин n_0 -дан сонра кэлэн бүтүн гијмэтлэриндэ

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} - l \right| < \varepsilon$$

вэ ја

$$l - \varepsilon < \frac{U_{n+1}}{U_n} < l + \varepsilon = q < 1 \quad (n > n_0) \quad (19)$$

барыбарсызлыжыни өдөнилэр. Бурадан алынан

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < q < 1 \quad (n > n_0)$$

барыбарсызлыжыни (1) сырасынын жыгылан олдуғуну көс-тэрир

$l > 1$ олдугда (1) сырасынын дагылан олдуғуна инанмаг үчүн исэ (19) мүнасибэтинини сол барыбарсызлыжындэн истифада етмэк лазымдыр.

$l = 1$ олдугда (1) сырасынын жыгылан вэ ја дагылан олмасы хатгында хеч нэ демэк олмаз.

¹ Даламбер Жак Лерон (1717—1783) франсыз ријазийатчысы вэ механикидир.

Догрудан да, дагылан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармоник сырасы) өз һәм

дә жыглан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сырларынын һәр икиси үчүн (18) лимити ваһидә барабардир.

Мисал 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ сырасынын жыгылмасыны тәдгиг етмәли.

Бу сыра үчүн (18) лимити Һар:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

$l = 0 < 1$ олдугундан һәмни сыра жыглан Һар.

5. Коши аламәти.

Теорем 5. Мүсбәтһәлли (1) сырасынын һәдләри һәм һәр һәлиһи n_0 -дан сонра кәлән бүтүн гиҗмәтләриһиһә

$$q < 1$$

барабарсизлиһини өдәдикдә (1) сырасы жыглан.

$$q > 1$$

барабарсизлиһини өдәдикдә иһә һәлиһи сыра дагылан-оыр.

Исбаты. n -ий $n > n_0$ гиҗмәтләриндә (19) барабарсизлиһи өдәниһәлиһиндән

$$U_n < q^n \quad (n > n_0)$$

олар. $0 < q < 1$ олдугундан $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сырасы жыгландыр. Онда

3-чү теорема көрә $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сырасы да жыглан олар.

(1) сырасынын жыглан олмасы бүрәтәл әйтәлиһар.

(2) барабарсизлиһини өдәдикдә $U_n > 1$ ($n > n_0$) олар ва һәлиһи жыглан олмәтиһә үчүн һәдәл шәрт һәл $U_n \rightarrow 0$ өдәниһәлмәз. Бу һәлдә (1) сырасы дагылан олар.

Һәтиһә (Лимит шәклиһә Коши аламәти) Мүсбәтһәлли (1) сырасы үчүн

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = l \quad (21)$$

лимити варса, онда $l < 1$ олдугдә (1) сырасы жыглан, $l > 1$ олдугдә иһә (1) сырасы дагыландыр

$l = 1$ олдугдә (1) сырасынын жыглан өз ја дагылан олмасы һәггиндә һәч нә деһәк олмәт.

Догрудан да, дагылан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоник сырасы үчүн

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Һар. Бурадә $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = 1$ барабарлиһинән и тифадә олунур.

Һәмин барабарлиһин исбаты ашағыда веридир:

$$a_n = \sqrt[n]{n}, \ln a_n = \frac{\ln n}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \quad (\text{XVI, § 4}).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln a_n} = e^0 = 1.$$

(21) лимити жыглан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сырасы үчүн дә ваһидә барабардир.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1.$$

Демәли, һәм жыглан өз һәм дә дагылан сыра үчүн (21) лимити ваһидә барабар олур.

Гөҗә. Мүсбәтһәлли (1) сырасы үчүн (18) лимити варса, (21) лимити дә һәр өз олар бир биринә барабардыр

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} \quad (22)$$

Ләкин (21) лимити сонлу олдугдә (18) лимити олмаһи дә биләр. Бу һәс-тәрчү һә, мүсбәтһәлли сырларыны жыгылмасына лимит шәклиһә Даламбер аламәти тәтбиг олунан һәлдә лимит шәклиһә Коши аламәти дә тәтбиг олунур. Шуһиһәтдә сырларыны жыгылмасы мәсәләсинә Коши аламәтиһини тәтбиг алуна бәлиһи бир чох һәлләрдә Даламбер аламәти тәтбиг олунур. Бу һәһимдән Коши аламәти Даламбер аламәтиһиндән күчлүдүр.

§ 4. ИШАРӘСИННІ КӨВБӘ ИЛӘ ДӘЛИШӘН СЫРАЛАР

Мүсбәтһәлли сырларыны жыгылмасы һәггиндә исбат етдиһи-миз тәклиһәләр өз жыгылмә аламәтләри (§ 3) бүтүн һәдләри мүсбәт олмәһән өдәдләр олин

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (1)$$

Һар сынын ($U_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$) жыгылмасыны тәдгиг етмәк үчүн дә тәтбиг олунур. һәдләри мүхтәлиф ишарәли һәггиг өдәдләр олан сырларыны жыгылмасына иһә һәмин жыгылма аламәтләриһини биләваситә тәтбиг етмәк олмәз. Белә сырларыны жыгылма мәхтәлиф үсуллардә тәдгиг олунур.

Һәдләри мүхтәлиф ишарәли өдәдләр олан сырларыны әһ-сәдә һә ү ишарәсини көвбә илә дәлишән сырлардыр.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n \quad (U_n > 0, n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

шаклинда олан сыраја ишарәсини нөвбә илә дәјишән сыра дәјилип. Ишарәсини нөвбә илә дәјишән сыраның һәддәтә нөвбә илә мусбат вә мәңфи әдәлләрди. Белә сыралар һәг- гинда ашагыдакы теорем ибат етмәк олар.

Теорем (Лејбнис). Ишарәсини нөвбә илә дәјишән (2) сырасы үчүн

$$U_n > U_{n+1} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

вә

$$\lim U_n = 0 \quad (4)$$

шәртләри өдәниләнкә һәм ки сыра жыгыландыр.

Ибатны (2) сырасының чүт индексли хусуси чәмләрини

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} U_k = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \dots + (U_{2n-1} - U_{2n})$$

кини јатәт $U_k - U_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) фәргәри (3) шәртинә көр мәңфи олмајан әдәлләрди. Буна көрә дә

$$S_{2(n+1)} = S_{2n} + (U_{2n+1} - U_{2n+2}) > S_{2n}$$

олар, јәни (2) сырасының чүт индексли хусуси чәмләрини $\{S_{2n}\}$ ардычыллыгы монотон артандыр. Буңдан башга,

$$S_{2n} = U_1 - (U_2 - U_3) - \dots - (U_{2n-2} - U_{2n-1}) - U_{2n}$$

бәрабәрлији ($U_k - U_{k+1} > 0$, $U_{2n} > 0$) көстәрир ки, $S_{2n} < U_1$ ($n = 1, 2, \dots$) бәрабәрсизлији доғрудур.

Демәли, S_{2n} монотон артан (азалмајан) вә јухарыдан мәһ дүд ардычыллыгыдыр. Белә ардычыллыгын исә сонлу лимити вар (XII, § 3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S. \quad (5)$$

$S_{2n+1} = S_{2n} + U_{2n+1}$ бәрабәрлијиндән вә (4) шәртинә көрә $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n+1} = 0$ олмазындан ајдындыр ки, (2) сырасының тәк индексли хусуси чәмләри ардычыллыгы да һәм ки S әдәдинә жыгылып.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S. \quad (6)$$

(5) вә (6) бәрабәрликләри (2) сырасы хусуси чәмләрини $\{S_n\}$ ардычыллыгының жыглан олдуғуну көстәрир:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Теоремия ибатындан ајдындыр ки, (2) сырасының чүт индексли хусуси чәмләри ардычыллыгы азалмајан, тәк индексли

$$S_{2n+1} = U_1 - (U_2 - U_3) - \dots - (U_n - U_{n+1}) = S_{2n-1} - (U_n - U_{n+1})$$

хусуси чәмләри ардычыллыгы исә артмајандыр. Онда (5) вә (6) бәрабәрликләринә әсасән (XII, § 3) истәнилән л үчүн

$$S_{2n} < S < S_{2n+1} \quad (7)$$

олар. Бурадан

$$0 < S_{2n+1} - S < S_{2n+1} - S_{2n} = U_{2n+1}$$

вә

$$0 < S - S_{2n} < S_{2n+1} - S_{2n} = U_{2n+1}$$

бәрабәрсизликләри алыныр. Демәли, истәнилән л үчүн

$$|S_n - S| < U_{n+1}. \quad (8)$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Нәтичә. Ишарәсини нөвбә илә дәјишән (2) сырасының залыгы үчүн

$$|R_n| = |S - S_n| < U_{n+1} \quad (9)$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Мисал. Ишарәсини нөвбә илә дәјишән

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \quad (10)$$

сырасы үчүн теоремни шәртләри, јәни

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

мунасибәтләри өдәнилдијиндән һәм ки сыра жыгыландыр.

§ 5. МҮТЛӘГ ЖЫГЫЛАН СЫРАЛАР

Бүтүн һәдләри ихтијари ишарәли һәгиги әдәлләр олан

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \quad (1)$$

сырасына баһағ. Бу сыраның һәдләриниң мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмиш

$$U_1 + |U_2| + \dots + |U_n| + \dots \quad (2)$$

сырасы жыглан олдуғда (1) сырасына мүтләг жыглан сыра дәјилип. Ајдындыр ки жыглан мүсбәтһәли истәнилән сыра мүтләг жыгыландыр.

Фәрә едәк ки,

$$U_k^+ = \begin{cases} U_k, & U_k > 0 \text{ олдуғда} \\ 0, & U_k < 0 \text{ олдуғда} \end{cases} \quad \text{вә} \quad U_k^- = \begin{cases} -U_k, & U_k < 0 \text{ олдуғда} \\ 0, & U_k > 0 \text{ олдуғда} \end{cases}$$

Бу кәмијәтләр мәңфи дәјилип: $U_k^+ > 0$, $U_k^- > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) вә онлар үчүн ашагыдакы бәрабәрликләр доғрудур.

$$U_k = U_k^+ - U_k^-, \quad |U_k| = U_k^+ + U_k^-. \quad (3)$$

Беләликә, ихтијари (1) сырасына үјгүн олан ашагыдакы кими ики јени мүсбәтһәли сыра дүзәлтиә олар:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k^+ \quad \text{вә} \quad \sum_{k=1}^{\infty} U_k^-. \quad (4)$$

Бу сыраларын биринчиси (1) сырасынын мүсбәт һәдләрин-
дәк, икинчиси һә (1) сырасынын мәңфи һәдләринин мәтләг
һиҗмәтләриндән дүәәлиһшдир.

Теорем 1. Мүтлэг жыгачан сыра жыгачаныыр.
Тырыкан аа $M^{\frac{1}{2}} \leq M^{\frac{1}{2}} + M^{\frac{1}{2}} = M$

Догрулан да, $U_k^* \sim |U_k|$ я. $U_k^* \leq |U_k|$ ($k=1, 2, \dots$) бара-
баризликлары еланилдижинден ва (2) сырасы йыгылан олду-
гуини мугајиса эламатица (в 3) кәрә мүсбатдан (4) сыра-
лары йыгыландыр. Онда (3) барабарлијина, кәрә ики йыгыливи
сыракын фәрги олан (1) сырасы да йыгылан олар:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k = \sum_{k=1}^{\infty} (U_k^+ - U_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} U_k^-. \quad (5)$$

Теоремин исбатидан айдандыр ки, (1) сырасы мўтлақ
 йығыла олғанда онын урун оларат мўсбат ва манфи хадде-
 ринин мўтлақ тийматариндан дўдэмийн мўсбатхаддин (4) с'ра-
 лары йығыландыр. Бурун тўрсе дў доғрудур (4) сыралары
 йығылан олғанда (1) сырасы мўтлақ йығыландыр бу т'к'ни
 доғрулуғу (3) барабёрликларинин икинчисиндан $|L_k| = L_k$.
 • L_k ва $|L_k|$ йығылан сыраларинин т'к'нинин йығылан олмағаста ол-
 айдандыр.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (U_n^+ + U_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^-.$$

Бұрадан ашағыдакы теорем алыныр:

Теорем 2. (1) сырасынын нүктөлөг жыгылан олжасы үчүзү өтүрү рүүрү өтүрүс жүрбөн өлжөңгү бөдөлүрүнөн нүктөлөг сырасынын өлжөңгү (1) сырасынын жыгылан олжасы дөрүрү өлжөңгү өтүрүс.

Мүтлэг Ингилви сыраларын бэдлэри үчүн "Ердэйншмэ" хэссэси дэ дотруд, г.

Теорем 3 (Коши). *Мүмкін жығылган сырнын көп-
лөрүнүн жерини көпөйтүлгөн гайра ила бөлүнүмкөө п.ы-
тан жөн сыр жөн а. мүмк. жыгылгандыр а. омур
чөмк өрм.лөнн сырнын чөмкнн бэрмбөрдүр.*

испытаниях в течение 10 часов мушкетеры (1) сырасы үчүн
исбат едик. Сыра ышан бодаривин дрийн истанидан шө-
килдө даңиш, лкдө алынган жети сыра

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots \quad (6)$$

олсун. Бүрэдэ $V_1 = U_{n_1}$, $V_2 = U_{n_2}$, ..., $V_n = U_{n_n}$, ... олдуугуу
хэсэрэ алсаг, хэмнэг сыраны

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (7)$$

мәклидә дә λ эмәс олар. (6) (вә λ (7)) сырасынын хүсуси чәмләрини σ_n вә (1) сырасынын хүсуси чәмләрини δ_n илә ишара едәк:

$$\sigma_n = U_{n_1} + U_{n_2} + \dots + U_{n_p}.$$

Эсвэр k_1, k_2, \dots, k_n эдэллэрийнхэн эн бөйүүнү N илэ ишэрэ етсөк, онда $a_n \leq \Delta_n$ олор. Мүсбэтһэдли (1) сырасы ягылан олдугда онун хүсүсн чэмлэри ардычыл ыгы сыранын S чоми илэ јухарыдан мөһдүд гэмэлһидүр (с 3) $\Delta_n \leq S$. Бу нолда истәнидэн n үчүн $a_n \leq S$ олор ки, бу да мүсбэтһэдли (6) сырасынын $\alpha \leq S$ (һм $a_n = \alpha$) эдәлиһә ягылан олдуғуну көстәрир

Демали, мүсбәтһәдди (1) сырасынын һәддәрикинн јеринн истәһиләк шәһилдә дәјин мәклә алыннан (6) сырасы јигиләндир ва онун чәми (1) сырасынын чәминдән бә үк дәјилдир о а. д.

Инди, тәрсннә фәз едәк ви, (b) сарысыннә һәддәриннә
 Јериннә дәјишмәклә (1) сарысы ки, (b) сарысыннә һәддәриннә
 исбат етдијимнәзә кәрә $S < 0$ олар, Ёх һалда $0 < S$ вә $S < 0$
 мүнәсибәтләри $0 = S$ олдугуну кестәрар.

Бунинла да теорем мўбатиҳадли сырлар үчүн тамомилә исбат олунур.

Мүтлэг Јыгьлан истәкилән (1) сырасынын чәми S олсун.

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^+ \text{ в } Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^- \text{ гэвэл етсэк, онда (5) бараварлијинэ}$$
 хэрэ

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} U_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} U_k^- = P - Q$$

оар. (1) сырасынын халдаринин јерини истанилэн шәжилдә дәјишдикдә аҗрылыгдә мүсбәт халлар тәһ вә мәһфи халлар тәһ

үзәлмәк $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ вә $\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*$ сыраларының һәдләре өт јеринә

үлчүм шөкілде дөңшүр. Түхүрүчакы исбате көрө исә һәддә-
рин јерини истәнидан шөкілдә дөңшүрликә мүсәтһәдди $\sum U_i$

ва махфиёдади $\sum U_i$ сираларининг йўғилмаси ва қами

Дәлилимиз, Δ -мәлі, (1) сырасының подларинин јерини истәни-
ли шәкилдә дәлиммәклә алынған јени сыра јылылаадыр вә
онун чәмк јенә дә $S = P - Q$ әдәдинә барабардир.

Бунунда да теорем тамымыла исбат олуңур.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

сырасы мүтлэг жыгыландыр.

Догрудан да, һәмми сыракий һадләринини мүтләг гиҗмәтләриндән дүзәлмиш

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

сырасы җығыландыр (§ 1).

Мисал 2.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

сырасы мүтләг җығылан деҗилдир. Чүнки һәмми сыракий һадләринини мүтләг гиҗмәтләриндән дүзәлмиш

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Һармоник сырасы дағыландыр (§ 2).

§ 6. ШӘРТИ ҖЫҖЫЛАН СЫРАЛАР

Һадләри ихтиҗари һәгиги әдәдләр олан

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \quad (1)$$

сырасы җығылан, онун һадләринини мүтләг гиҗмәтләриндән дүзәлмиш

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k| \quad (2)$$

сырасы дағылан олдуҗда (1) сырасына шәрти җығылан сыра деҗилдир. Шәрти җығылан (1) сырасынын җурулушуну өҗрәнмәк үчүн онун үҗгун оларак мүсбәт һадләриндән вә мәнфи һадләринини мүтләг гиҗмәтләриндән дүзәлмиш

$$\sum_{k=1}^n U_k^+ \text{ вә } \sum_{k=1}^n U_k^- \quad (3)$$

сыраларына баһаг.

(1) сырасы җығылан вә (2) сырасы дағылан олдуҗда (3) сыралары еҗни заманла җығылан ола билмәз (Әкс һалда, (3) сыраларынын чәми олан (2) сырасы җығылан олмалыдыр).

Түҗәг ки, (1) сыраларынын бири, мәсәлән, $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ сырасы дағыландыр:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k^+ = \infty \quad (U_k^+ > 0, k = 1, 2, \dots)$$

Онда $U_k = U_k^+ - U_k^-$ бәрабәрлиҗинә әсәсән җазылмыш

$$\sum_{k=1}^n U_k^- = \sum_{k=1}^n U_k^+ - \sum_{k=1}^n U_k \quad (4)$$

мүнасибәти хәстәрир ки, $\sum_{k=1}^{\infty} U_k^-$ сырасы да дағылан олмалыдыр.

(4) сәрабәрлиҗинин сәг тәрафиндәки биринчи чәм $n \rightarrow \infty$ шәртиндә җәҗри-мәддәд оларак артыр, икинчи чәм исә сонлу лимитә җахынлашыр.

Демәли, (1) сырасы җығылан вә (2) сырасы дағылан олдуҗда (3) сыраларынын икиси да дағылан олмалыдыр. Бурадан ашағыдакы теорем алыныр:

Теорем 1. Шәрти җығылан (1) сырасынын үҗгун оларак, мүсбәт һадләриндән вә мәнфи һадләринини мүтләг гиҗмәтләриндән дүзәлмиш (3) сыраларынын икиси да дағыландыр.

(1) сырасы җығылан олдуҗундан $U_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ вә буна хәрә дә $U_k^+ \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ вә $U_k^- \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ олар.

Шәрти җығылан сыраларын һадләри үчүн җәрдәҗишмә хәсәси доҗру деҗилдир. Шәрти җығылан сырасынын һадләринини җерини дәҗишдикдә чәминин дәҗишмәси вә һатта дағылан сыра алына билмәси ашағыдакы теоремдән өҗдшндыр.

Теорем 2 (Риман). Шәрти җығылан (1) сырасынын һадләринини җерини елә дәҗишлөк олар ки, алынкан җени сыракий чәми сабаҗадан верилмиш истәнилән $S (-\infty < S < \infty)$ әдәдинә бәрибәр олгун.

Исбаты. Садалик үчүн, фәрә еләк ки, S ихтиҗари сонлу мүсбәт әдәддир. (1) сырасы шәрти җығылан олдуҗундан мүсбәтһәдди (3) сыраларынын икиси да дағыландыр:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k^+ = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} U_k^- = +\infty.$$

Буна хәрә дә

$$1) A_1 = \sum_{k=1}^{n_1} U_k^+ > S, \quad 2) A_2 = A_1 - \sum_{k=1}^{n_1} U_k^- < S,$$

$$3) A_3 = A_2 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} U_k^+ > S, \quad 4) A_4 = A_3 - \sum_{k=n_1+1}^{n_2} U_k^- < S,$$

$$\dots \dots \dots$$

мүнасибәтләрини өдәҗән ән кичик натурал n_1, n_2, n_3, \dots әдәдләрини сечмәк олар. Бу процес нәтиҗәсиндә алынкан

$$U_1^+ + \dots + U_{n_1}^+ - U_1^- - \dots - U_{n_1}^- + U_{n_1+1}^+ + \dots + U_{n_2}^+ - U_{n_1+1}^- - \dots - U_{n_2}^- + \dots \quad (5)$$

сырасы S әдәдинә җығылыр. Догрудан да, (5) сырасынын

$$S_{n_1}, S_{n_1+n_2}, S_{n_1+n_2+n_3}, \dots, S_{n_1+n_2+n_3+\dots} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

хүсуси чәмләри ардычылыгы

$$|S - S_{n_k+n_{k+1}}| < U_{n_k+1}^+$$

барабарсизлијини өдәјир вә $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{n+1}^{\pm} = 0$ барабарлијикә әсәсән S лимитинә јығылыр:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+n_{k+1}} = S. \quad (6)$$

(5) сырасынын истәнилән S_n хусуси чәми үчүн исә һәмишә елә $k = k(n)$ әдәди тапмағ олар ки,

$$S_{n+n_{k+1}} < S_n < S_{n+1+n_{k+2}}$$

вә јә

$$S_{n+n_{k+1}} > S_n > S_{n+1+n_{k+2}}$$

барабарсизликләри өдәниләр. Онда (6) барабарлијинә әсәсән

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

олар.

Мисал 1.

$$\frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n \ln n} + \dots$$

сырасынын јығылмасын тәдқиғ етмәли.

Верилмиш сыраның өзү Лейбнис теореминә көрә (§ 4) јығыландыр. Һәдләриниң мүтләғ гијмәтләриндән дүзәлмиш

$$\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} + \dots$$

сырасы исә дағылыр (§ 3, мисал 2). Демәли, верилмиш сыра шәрти јығыландыр.

Мисал 2. Шәрти јығылан

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \quad (7)$$

сырасынын һәдләриниң јерини дәјишдикдә чәминиң дәјишлијини көстәрмәли.

Һәлли. (7) сырасынын өзү Лейбнис теореминә көрә јығыландыр, онун һәдләриниң мүтләғ гијмәтләриндән дүзәлмиш

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

гармоник сыра исә дағыландыр. Демәли, (7) сырасы шәрти јығылыр. Онун чәмини S вә хусуси чәмләрини S_n илә ишарә едәк:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}.$$

Инди (7) сырасынын һәдләриниң јерини ашағыдакы киңи дәјишәк:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots \quad (8)$$

Бу сыраның σ_{2n} хусуси чәминә баһағ:

$$\begin{aligned} \sigma_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n}. \end{aligned}$$

Демәли,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \frac{1}{2} S$$

олар. (8) сырасы чәминиң $\frac{1}{2} S$ әдәди олмасы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n+2} = \frac{1}{2} S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

барабарликләриндән ајдындыр.

Беләликлә, биз көстәрдик ки, шәрти јығылан (7) сырасынын һәдләриниң јерини (8) шәклиндә дәјишдикдә онун чәми киңи дәфә өзәлдыр.

§ 7. СЫРАЛАРЫН НАСИЛИ

Тутағ ки, верилмиш

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \quad (1)$$

вә

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k \quad (2)$$

сыраларынын һәдләриндән

$$W_k = U_1 V_k + U_2 V_{k-1} + \dots + U_k V_1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

киңи ифадәләр дүзәлдилмишдир. Бу һалда

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n + \dots \quad (3)$$

сырасына (1) вә (2) сыраларынын һасили дејиләр.

(1) вә (2) сыралары јығылан олдугда онларын һасили һәмишә јығыландырмы? Буну һәмишә демәк олмәз: јығылан сыраларын һасили дағылан да ола биләр. Ләкин верилмиш јығылан сыраларын һеч олмәсә бири мүтләғ јығылан олдугда онларын һасили јығылан сыра олур.

Теорем. Мүтләғ јығылан (1) вә (2) сыраларынын һасили олан (3) сырасы мүтләғ јығыландыр вә онун чәми верилмиш (1) вә (2) сыраларынын чәлләри һасилинә барабардир.

Исбаты. Эввалча (3) сырасынын мўтлэг жыгылдыгын исбат едэк. Бу мэгсәллә

$$S_n^* = \sum_{k=1}^n |U_k|, \sigma_n^* = \sum_{k=1}^n |V_k|, \zeta_n^* = \sum_{k=1}^n |W_k|$$

кәмијәтләри үчүн доғру олан

$$\zeta_n^* \leq S_n^* \cdot \sigma_n^* \quad (4)$$

бәрабәрсизлијинән истифадә едәк. (1) вә (2) сырасы мўтлэг жыгылан олдуғундан елә $M > 0$ әдәди вар ки, $S_n^* < M$ вә $\sigma_n^* < M$ ($n = 1, 2, \dots$) олар. Онда (4) бәрабәрсизлијиндән $\zeta_n^* < M^2$ ($n = 1, 2, \dots$) мўнасибәти алыныр ки, бу да мўсбәтәдән

$\sum_{k=1}^{\infty} |W_k|$ сырасынын жыгылан олдуғуну көстәрир.

Демәли, (3) сырасы мўтлэг жыгыландыр. Мўтлэг жыгылан сыранын һәдләриниң јерини истәнилән шәкилдә дәјишдирдикдә исә онун жыгылмасы вә чәми дәјишмир (§ 5). Буна кәрә лә (3) сырасын

$$U_1 V_1 + (U_1 V_2 + U_2 V_1 + U_2 V_2) + (U_1 V_3 + U_2 V_3 + U_3 V_1 + U_3 V_2 + U_3 V_3) + \dots \quad (5)$$

шәкилдә јазсағ, бу сыранын чәми (3) сырасынын $\hat{\sigma}$ чәминин ејин олар. (1) вә (2) сыраларынын чәми вә хүсуси чәми ујғун оларәғ S, S_n вә σ, σ_n олсун. Бу һалда (5) сырасынын ән бөјүк индекси n олан һәдләр (јәни ујғун һәдләр групу) дахил олан хүсуси чәмини Q_n илә ишарә етсәк, онда

$$Q_n = S_n \cdot \sigma_n$$

бәрабәрлији доғру олар. Бурадан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

вә јә

$$Q = S \cdot \sigma$$

бәрабәрлији алыныр.

Мисал. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}$ вә $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{k-1}}{(k-1)!}$ сыраларынын һәсилни тәд-

ғиг етмәди.

Верилмиш сығазар a вә b әдәдләриниң истәнилән гүмәтиндә мўтлэг жыгыландыр. Доғрудан да, a, b һәр әлвәтигә кәрә

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \right| \text{ вә } \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{b^{k-1}}{(k-1)!} \right|$$

сыралары жыгыландыр:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^n (n-1)!}{a^{n-1} n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{n} = 0 < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{V_{n+1}}{V_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b^n (n-1)!}{b^{n-1} n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b|}{n} = 0 < 1.$$

Верилмиш сыралары чәмини ујғун оларәғ $\varphi(a)$ вә $\varphi(b)$ илә ишарә етсәк, онда һәмийи сыраларынын һәсили

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = 1 + \left(\frac{a}{1} + \frac{b}{1} \right) + \left(\frac{a^2}{2!} + \frac{a}{1!} \frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!} \right) + \dots + \left(\frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n-1}b}{(n-1)!1!} + \dots + \frac{b^n}{n!} \right) + \dots$$

вә јә

$$\varphi(a) \varphi(b) = 1 + \frac{(a+b)}{1!} + \frac{(a+b)^2}{2!} + \dots + \frac{(a+b)^n}{n!} + \dots$$

олар. Бурадан

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a+b)$$

мўнасибәти алыныр.

§ 8. КОМПЛЕКС ҺӘДЛИ СЫРАЛАР

Фәрс едәк ки,

$$(z_n) \quad (1)$$

комплекс әдәдләр ($z_n = x_n + iy_n$) ардычылығыдыр. Бу ардычылығын лимитиниң комплекс $z = x + iy$ әдәди олмасы о демәкдир ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә N нөмрәси вар ки, n -ни $n > N$ гүмәтләриндә

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad (n > N)$$

бәрабәрсизлији өдәкилир. Бу факты

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \text{ вә } |a| z_n \rightarrow z \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2)$$

кими јазырлар. Ајдындыр ки, (2) мўнасибәти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$$

бәрабәрлији илә ејинкүчлүдүр.

Сонлу лимити олан ардычылығы жыгылан ардычылығы дејилир. Жыгылан ардычылығы мәвдуддур.

Лимитин тәрифиндән ајдындыр ки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = x + iy$$

мўнасибәти ики һәгиги

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

бәрабәрликләри илә ејинкүчлүдүр. Буна кәрә дә һәгиги әдәдләр ардычылығынын лимити һағгында мәлуи олан тәклифләр (§ II, §§ 1—4) ујғун шәкилдә комплекс әдәдләр ардычылығылары үчүн дә доғрудур.

Инди (1) ардычылығынын һәдләриндән сыра дүзәләк.

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (3)$$

(3) сырасынын

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

хүсуси чэмлэри ардычыллыгынын $n \rightarrow \infty$ шэртинде сонлу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

лимити варса, һәмин сыраја җығылган вэ S эдәдинә онун чәми деҗилир.

$$S = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (4)$$

(3) сырасы җығыландырса, онун үмүми һәддинин [лимити] сифра бәрәбәрди: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

[5.] ардычыллыгынын һеч бир лимити олмадыгда вэ [э] лимити ∞ олдугда (3) сырасына дагылан сыра деҗилир. Дагылан сыр'нын чәминдән данышмаг олмаз.

Теорем 1. $z_n = x_n + iy_n$ олдугда (3) сырасынын җығылан олмасы үчүн $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ вэ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сыраларынын җығылан олмасы зарур вэ кафи шэртидир.

Бу теоремни исбаты [чох садә олдугундан ону охучуларә һәвалә едирик.

Бурадан әлмидыр ки, һәгиги әдәдләр сырасы һагында мә'лум олан теоремләр у[җун] шәкилдә комплекс әдәдләр сырасы һагында да доғру олар.

Комплекс әдәдләр сырасына мисал оларат z комплекс әдәдләриндән дүзәлиш һәндәси силсиләни көстәрмәк олар:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (5)$$

(5) сырасынын хүсуси чәми

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

вэ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = \begin{cases} 0, & |z| < 1 \text{ олдугда,} \\ \infty, & |z| > 1 \text{ олдугда,} \end{cases}$$

олдугундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & |z| < 1 \text{ олдугда,} \\ \infty, & |z| > 1 \text{ олдугда} \end{cases}$$

олар. $|z| = 1$ ($z \neq 1$) олдугда z^n функциасынын лимити юхтур.

Демәли, $|z| < 1$ олдугда (5) сырасы (силсиләси) җығылган вэ онун чәми $\frac{1}{1-z}$ комплекс әдәдинә бәрәбәрди:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1).$$

$|z| > 1$ олдугда исә (5) сырасы дагылыр.

Теорем 2. Верилмиш $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сырасынын һәдләринин модульундан дүзәлиш $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ сыртсы җығыландырса,

һәмин сыртсынын вэу да җығыландыр.

Исбаты. Мә'лумдур-ки, $z_n = x_n + iy_n$ олдугда

$$|x_n| \leq |z_n| \text{ вэ } |y_n| \leq |z_n|$$

олар. Мүсбәт һә [сыраларын] җығылмасы һагындакы мütәјисә

әләмәтинә көрә $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ вэ $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ сыралары җығыландыр.

Бурадан (§ 5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ вэ } \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

сыраларынын җығылган олмасы алыныр. Онда 1-чи теорем

көрә $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сырасы җығылган олар.

— Теоремни тәрсин доғру деҗилир. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сырасынын җығыл-

масында $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ сырасынын җығылмасы чыхыр.

$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ сырасы җығылган олдугда (3) сырасына мütләг җығылан сыра деҗилир.

Сырала[рын] мütләг җығылмасыны мажорант сырала[рын] җығылмасы илә мütләг етмәк олар. (3) сырасынын һәр бир һәдди модульчә мүсбәтһәдди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (6)$$

сырасынын у[җун] һәддиндән бөјүк олмалыгда, [э]ни n -нын бүтүн ги[мәтләр]индә $|z_n| \leq a_n$ олдугда, (6) сырасына (3) сырасынын мажоранты деҗилир.

Теорем 3. Җығылган мажоранты олан сыра җығыландыр.

Доғручын да, n -нын бүтүн ги[мәтләр]индә $|z_n| \leq a_n$ бәрәбәр-сиз, иҗи өдәндириңиз вэ (6) сырасы җығыландырса, онда мütәјисә

әләмәтинә көрә $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ сырасы җығылган олар. Бурадан, 2-чи

теоремә көрә (3) сырасынын җығылмасы чыхыр.

Теорем 4. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сырасынын мүтлөгү жыгылган олжа-
сы үчүн $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ өз $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ ($z_n = x_n + i y_n$) сыралаарынын мүт-
лөгү жыгылмасы заруури өз кифи шартындир.

Теоремин догрудугу

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq |z_n| \leq |x_n| + |y_n| \\ |y_n| &\leq |z_n| \leq |x_n| + |y_n| \end{aligned}$$

барабарсизликлэринден өз мүсбэтиадли сыралаарын жыгылмасы үчүн мүгажисэ аламэтинден айдундыр.

Бу теоремдэн алыныр ки, мүтлөгү жыгылган комплекс бэдли сыраннын бэдлэриники жерини истэнилен шэкилдэ дэжишдикдэ алынан жени сыра жөнө дэ мүтлөгү жыгыландыр өз онун чэми верилмиш сыраннын чэминэ барабардыр.

XXXVI ФАСИЛ

ФУНКЦИОНАЛ АРДЫЧЫЛЛЫГЛАР ВЭ СЫРАЛАР

§ 1. ФУНКЦИОНАЛ АРДЫЧЫЛЛЫГЫН ЖЫГЫЛМАСЫ

Бэдлэри һәр һансы $E \subset (-\infty, \infty)$ чохлауунда тэ'жин олун-
муш $\{f_n(x)\}$ өз жэ

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (1)$$

ардычыллыгына функционал ардычыллыг дэжилир. (1) ардычыл-
лыгы x -ин һәр бир конкрет $x_0 \in E$ гијмэтиндэ $\{f_n(x_0)\}$ эдэди
ардычыллыг чевэрилер.

$\{f_n(x_0)\}$ эдэди ардычыллыгы жыгылган олдугда (VII, § 1) (1)
ардычыллыгына x_0 нөгтэсиндэ жыгылган дэжилир. Верилмиш
чохлауун һәр бир нөгтэсиндэ жыгылган ардычыллыг һэмин
чохлауда жыгылган ардычыллыг дэжилир. E чохлауунда жыгыл-
ган (1) ардычыллыгынын һэмин чохлауун һәр бир $x \in E$ нөг-
тэсиндэ сонлу $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ лимити вар.

Бу һалда $f(x)$ функцијасына $\{f_n(x)\}$ ардычыллыгынын
лимит функцијасы дэжилир.

(1) ардычыллыгынын $f(x)$ функцијасына жыгылмасын

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

жэ жэ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

кими јазырлар.

Функционал ардычыллыгын жыгылма областындан да да-
пышмаг олар.

Верилмиш функционал ардычыллыгын жыгылган олдугу бү-
түн x нөгтэлэри чохлауун һэмин ардычыллыгын жыгылма
областы дэжилир.

(1) ардычыллыгынын E чохлауунда $f(x)$ функцијасына
жыгылмасы лимитин тэ'рифна көрө, о демэкдир ки, истэнилен
 $\epsilon > 0$ эдэди үчүн елэ $\Lambda = \Lambda(\epsilon, x)$ эдэди вар ки, n -нин бүтүн
 $n \geq N(\epsilon, x)$ гијмэтилериндэ

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad (2)$$

барабарсизлији бүтүн $x \in E$ нөгтэлэриндэ өдэнилер. Бурада
айдундыр ки, ϵ эдэди верилдикдэ һәр бир x нөгтэси үчүн һэ-
мин нөгтэдэн асылы $N(\epsilon, x)$ эдэди сечилир.

Белэ бир суал гаршыја чыхыр: верилмиш E чохлауунун
бүтүн нөгтэлэри үчүн елэ бир $\Lambda = \Lambda(\epsilon)$ эдэди (элбэттэ, анчаг
 ϵ эдэдиндэн асылы олан) тапмаг олармы ки, n -нин бүтүн
 $n \geq N$ гијмэтилериндэ (2) барабарсизлији өдэнилсин? Белэ һал
мүмкүндүр. Онда дэјирлэр ки, (1) ардычыллыгы E чохлау-
унда $f(x)$ функцијасына мүнтэзэм жыгылыр.

Тэ'риф. Тутаг ки, верилмиш истэнилен $\epsilon > 0$ эдэди
үчүн елэ $\Lambda = \Lambda(\epsilon)$ эдэди вар ки, n -нин $n \geq N$ барабарсизли-
жини өдэјэн бүтүн гијмэтилериндэ өз E чохлауунун бүтүн
нөгтэлэриндэ (2) барабарсизлији өдэкилер. Онда дэјирлэр
ки, (1) ардычыллыгы E чохлауунда $f(x)$ функцијасына мүн-
тэзэм жыгылыр.

$\{f_n(x)\}$ ардычыллыгынын E чохлауунда $f(x)$ функцијасына
мүнтэзэм жыгылмасын

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (n \rightarrow \infty, x \in E)$$

кими јазырлар.

Айдундыр ки, E чохлауунда мүнтэзэм жыгылган ардычыл-
лыг һэмин чохлауун һәр бир нөгтэсиндэ (јэ'ни, һэмин чохлау-
да) жыгыландыр. Бунун тэ'рси догру дэјилдир. Верилмиш чохлау-
да жыгылган ардычыллыг һэмин чохлауда мүнтэзэм жыгыл-
маја да билэр. Мәсэлэн,

$$x^2, x^4, \dots, x^{2n}, \dots \quad (3)$$

ардычыллыгы $[-1, 1]$ парчасында жыгыландыр. Онуи лимити

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \text{ олдугда,} \\ 1, & x = \pm 1 \text{ олдугда} \end{cases}$$

функцијасыдыр. $\varphi(x)$ лимит функцијасы $[-1, 1]$ парчасынын
 $x = \pm 1$ нөгтэлэриндэ кэсигэндир. (3) ардычыллыгы $[-1, 1]$
парчасында мүнтэзэм жыгылган дэјилдир.

Буну исбат етмэк үчүн эксини фэрэ едэк ки, (3) ардычыллы-
гы $[-1, 1]$ парчасында мүнтэзэм жыгыландыр. Онда истэнилен
 $\epsilon > 0$ (мәсэлэн, $\epsilon < \frac{1}{2}$) эдэди үчүн елэ $\Lambda = \Lambda(\epsilon)$ эдэди вар ки,

$$n \geq N \text{ барабарсизлијини өдэјэн бүтүн гијмэтилериндэ} \\ |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = |x^{2n} - \varphi(x)| < \epsilon \quad (4)$$

барабарсизлији x -ин бүтүн $-1 < x < 1$ гијмэтилериндэ өдэни-
лир (4) барабарсизлијинин өдэнилијини Λ эдэдини гејд едэк

вə x əвəзкə $[-1, 1]$ парчасында $x_0 = \frac{1}{2}$ 2-гijмəтини $(\varepsilon < \frac{1}{2}, 2\varepsilon < 1$ və $x_0 = \frac{1}{2} \sqrt{2\varepsilon} < 1)$ jəzəg:

$$|x_0^{2n} - \varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

$0 < x_0 < 1$ олдугундан $\varphi(x_0) = 0$ олар və сонунчу бəрдбəрсизликдəн

$$\varepsilon > |x_0^{2n} - \varphi(x_0)| = x_0^{2n} = 2\varepsilon > \varepsilon$$

зиддијəти алынар. Бу зиддијəт фəрзијəмизни доғру олимпиадыны, јəни (3) ардычыллыгыны $[-1, 1]$ парчасында мунтəзəм јыгылаң олимпиадыны кəстəрир.

§ 2. ФУНКЦИОНАЛ СЫРАЛАРЫН ЈЫГЫЛМАСЫ

Сыранын бəдлəри һəр һансы $E \subset (-\infty, \infty)$ чохлағунда тəјин олунмуш $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) функцијалары олдугда, јəни сыра

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

шəклиндə олдугда, она функционал сыра дејилир. (1) функционал сырасынын јыгылмасы оқун

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

хүсуси чəмлəринин јыгылмасы илə тəјин олунур.

Тəриф 1. (1) функционал сырасынын $|S_n(x)|$ хүсуси чəмлəри ардычыллыгы $x \in E$ нөгтəсиндə јыгылаң олдугда она һəмин нөгтəдə јыгылаң сыра дејилир. Хүсуси чəмлəр ардычыллыгынын

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \quad (3)$$

лимити сыранын чəми адаланыр və

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (4)$$

кими јазылыр.

Верилмиш чохлағун һəр бир нөгтəсиндə јыгылаң сыраја һəмин чохлағда јыгылаң сыра дејилир. Сыранын јыгылдығы нөгтəлəр чохлағу онун јыгылма областы адаланыр. Сыранын јыгылмасына мунтəлиф јыгылма аламəтлəрини тəтбиг етмəклə бəзəи онун јыгылма областыны тапмағ мүмкүн олур.

Мисал 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сырасынын јыгылма областыны тапмады.

Сыранын бəдлəринин мунтəг гijмəтлəриндəн лүзəлмиш

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ сырасына лимит шəклиндə Даламбер аламəтини тəтбиг едəк.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Демəли, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ сырасы x -ни бəтүн гijмəтлəриндə јыгылыр.

(Онда верилмиш сыра да x -ни бəтүн гijмəтлəриндə (XXXV, § 5) јыгылаң олар. Бурадан ајдындыр ки, верилмиш сыранын јыгылма областы бəтүн эдəд оқу, јəни $(-\infty, \infty)$ интервалдыр.

Мисал 2. Мүсбəтбəдли $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ сырасынын јыгылма областыны да лимит шəклиндə Даламбер аламəти васитəсилə тапмағ олар.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} = x^2.$$

Бурадан ајдындыр ки, верилмиш сыра $x^2 < 1$ və ја $|x| < 1$ олдугда јыгылаң, $x^2 > 1$ və ја $|x| > 1$ олдугда исə дагылаңдыр. Сыра $x = \pm 1$ нөгтəлəриндə да дагылаңдыр. Демəли, бəхылаң сыранын јыгылма областы $(-1, 1)$ интервалдыр.

Фəрз едəк ки, (1) сырасы E чохлағунда $f(x)$ функцијасынғ јыгылыр, јəни E чохлағууну һəр бир нөгтəсиндə

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

олур. Лимитин тəрифинə кəрə бу о демəдир ки, истəнитəн $\varepsilon > 0$ эдəди үчүн елə $N = N(\varepsilon, x)$ нөмрəси вар ки, n ни бəтүн $n > N$ гijмəтлəриндə

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (5)$$

бəрəбəрсизлији өдəнилыр. E чохлағууну бəтүн нөгтəлəрн үчүн бу тəрифин тəлəбини өдəјəн və анчал эдəдидəн асылы олан бир $N = N(\varepsilon)$ эдəди тапмағ мүмкүн олалы а, дејəртəр ки, (1) сырасы E чохлағунда $f(x)$ функцијасына мунтəзəм јыгылыр.

Тəриф 2. Гугағ ки, верилмиш истəнитəн $\varepsilon > 0$ эдəди үчүн елə $N = N(\varepsilon)$ нөмрəси вар ки, n -кин $n > N$ бəрəбəрсизлији өдəдн бəтүн гijмəтлəриндə E чохлағууну бəтүн нөгтəлəриндə (5) бəрəбəрсизлији өдəнилыр. Онда дејəртəр ки, (1) сырасы E чохлағуунда $f(x)$ функцијасына мунтəзəм јыгылыр.

Демəли, (1) сырасынын E чохлағунда јыгылмасы və мунтəзəм јыгылмасы онун хүсуси чəмлəр ардычыллыгынын југи

олараг, E чоҳлугунда f_n ығылмасы ва мүнөзөм f ығылмасына эквиваленттир.

Үмүмийлөтлө, верилмиш

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots \quad (6)$$

ардычыллыгы илө һәмий ардычыллыгдан дүзөлмиш

$$S_1(x) + [S_2(x) - S_1(x)] + \dots + [S_n(x) - S_{n-1}(x)] + \dots \quad (7)$$

сырасынын f ығылмасы эквиваленттир. (6) ардычыллыгынын һәдләри (7) сырасынын ујгун хусуси чәмләридир. Ајдындыр ки, (6) ардычыллыгы (мүнөзөм) f ығыландырса, (7) сырасы да (мүнөзөм) f ығыландыр ва тәрсинә, (7) сырасы (мүнөзөм) f ығыландырса, (6) ардычыллыгы да (мүнөзөм) f ығыландыр.

Демәли, верилмиш ардычыллыгын f ығылмасы мәсәләси һәмийә ујгун сырасынын f ығылмасы мәсәләсинә ва тәрсинә, верилмиш сырасынын f ығылмасы мәсәләси ујгун ардычыллыгын f ығылмасы мәсәләсинә кәтирилә биләр. Буна көрә дә кәләчәкдә, әсәсэн, функционал сыраларын f ығылмасы мәсәләси тәдгиг едиләр.

Ајдындыр ки, E чоҳлугунда мүнөзөм f ығылан сыра һәмий чоҳлугун һәр бир нөгтәсиндә дә (јә'ни һәмий чоҳлугда да) f ығыландыр. Бунун гәрсинә доғру дејилдир. Верилмиш чоҳлугда f ығылан сыра һәмий чоҳлугда мүнөзөм f ығылмаја да биләр. Мәсәлән,

$$x^2 + (x^4 - x^2) + \dots + (x^{2n} - x^{2n-2}) + \dots$$

сырасы $[-1, 1]$ парчасында f ығыландыр. Оун чәми

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=2}^n (x^{2k} - x^{2k-2}) + x^2 \right] = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \text{ олдуғда} \\ 1, & x = \pm 1 \text{ олдуғда} \end{cases}$$

функцијасыдыр. Лакин сыра $[-1, 1]$ парчасында мүнөзөм f ығылан дејилдир (§ 1).

Һәр бир $[-a, a]$ ($0 < a < 1$) парчасында исә (6) сырасы мүнөзөм f ығыландыр.

(2) ва (4) бәрабәрликләринә көрә

$$f(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots$$

олар. Бу фәргә (1) сырасынын галығы дејилдир ва

$$r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots$$

илә ишарә олунур. Бурадан ашағыдакы бәрабәрлик алыныр:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x). \quad (8)$$

Демәли, (1) сырасынын E чоҳлугунда $f(x)$ функцијасына f ығылан олмасы үчүн һәмий чоҳлугун бүтүн нөгтәләриндә

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$$

мүнәсибәтинин өдәнилмәси зарури ва кәфи шәртдир. (1) сырасы E чоҳлугунда $f(x)$ функцијасына мүнөзөм f ығылан ол-

дуғда исә (5) бәрабәрсизлији әәзинә

$$|r_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geq N)$$

бәрабәрсизлији һәмий чоҳлугун бүтүн нөгтәләриндә өдәниләр.

Функционал сырасынын верилмиш нөгтәдә мүнәзә f ығылмасыннан да дағнышмағ олар.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ әдәли сырасы мүнәзә f ығылан олдуғда (1) сырасына x_0 нөгтәсиндә мүнәзә f ығылан сыра дејилдир. Верилмиш E чоҳлугунун һәр бир нөгтәсиндә мүнәзә f ығылан сыра һәмий чоҳлугда мүнәзә f ығылан сыра олманыр. E чоҳлугунда мүнәзә f ығылан сыра һәмий чоҳлугун һәр бир нөгтәсиндә дә f ығыландыр (XXXV, § 5). Бунун тәрсинә исә доғру дејилдир. Верилмиш нөгтәдә f ығылан сыра һәмий нөгтәдә мүнәзә f ығылмаја да биләр (јә'ни шәрги f ығылар).

Мисал 3.

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (9)$$

сырасы (XXXV, § 1, мисал 2) x -ни бүтүн $|x| < 1$ гәјмәтләриндә f ығыландыр ва онун чәми $\frac{1}{1-x}$ функцијасыдыр:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Верилмиш сыра x -ни бүтүн $|x| > 1$ гәјмәтләриндә дағыландыр. Демәли, сырасынын f ығылма-областы $(-1, 1)$ интервалыдыр. Ајдындыр ки, x -ни һәр бир $|x| < 1$ гәјмәтиндә

$$1 + |x| + |x|^2 + \dots + |x|^n + \dots$$

сырасы да f ығыландыр. Бу көстәрир ки, (9) сырасы $(-1, 1)$ интервалында мүнәзә f ығыландыр.

§ 2. КОШИ КРИТЕРИСИ

Функционал сыраларын гә ардычыллыгларынын верилмиш чоҳлугда мүнөзөм f ығылмасы һаггында ән күчлү тәклиф Коши критерисидир. Коши критериси васитәсилә мүнөзөм f ығылма һаггында башға даһа ишә тәклифләр дә исбат етиәк олар.

Коши критериси (сыраларын мүнөзөм f ығылмасы һаггында). Функционал

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

сырасынын E чоҳлугунда мүнөзөм f ығылан олмасы үчүн ашағыдакы шәртинин өдәнилмәси зарури ва кәфи бир ишәтиәт: $\varepsilon > 0$ әдәли үчүн сәл $N = N(\varepsilon) < \infty$ вар ки, n -ни $n \geq N$ бәрабәрсизлијинин өдәни ишәтиәти натурал гәјмәтләриндә ва ишәтиәт натурал p

адди ($p = 1, 2, \dots$) үчүн

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \epsilon \quad (2)$$

барабарсизлиги x -ин E чохлуғундагы бүтүн гijмeтлeриндe өдөнилeр.

Зeрyриeлигин исбaты. Тyтaг ки, (1) cыpaсы E чoхлyгyндa $f(x)$ фyнкcиeлaсынa мyнтeзeм jыгылып, jөнiн cыpaнын $|S_n(x)|$ xýcyси чeмлeри ардычылыгы E чoхлyгyндa $f(x)$ фyнкcиeлaсынa мyнтeзeм jыгылып: $S_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty, x \in E$). Ондa иcтaнилeн $\epsilon > 0$ эдeдe үчyн eлe $N(\epsilon)$ вap ки, n -ин $n \geq N(\epsilon)$ гijмeтлeриндe вe иxтиjapи $p \geq 1$ эдeди үчyн

$$|S_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, |S_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

барабарсизликлери x -ин E чохлуғундагы бүтүн гijмeтлeриндe өдөнилeр. Бyрaдaн (2) бeрaбapcизлиги aлынyp:

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < |S_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - S_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Кaфиeлигин исбaты. Тyтaг ки, (2) бeрaбapcизлиги өдөнилeр. Ондa (1) cыpaсы эдeди cыpaлapин jыгылмасы бaггындaгы Коши критерисинe (XXXV, § 2) кeрe иxтиjapи $x \in E$ нөгтeсиндe jыгылып, (1) cыpaсынын $x \in E$ нөгтeсиндe чeми $f(x)$ олcyн. Гeйд олyнмyш x нөгтeси олapaг E чoхлyгyнyн иxтиjapи нөгтeсини кeтyрмeк олap. Бyрaдaн aдындыp ки, (1) cыpaсы E чoхлyгyнyн бүтyн нөгтeлeриндe jыгыландыр.

(2) бeрaбapcизлигиндe $p \rightarrow \infty$ шepтиндe лимитe кeчдиkdе n -ин $n \geq N$ гijмeтлeриндe вe x -ин E чoхлyгyндaгы бүтyн гijмeтлeриндe дoгpy олaн

$$|S_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

барабарсизлиги aлынyp ки, бy дa

$$S_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty, x \in E)$$

олдyгyнy. jөнiн (1) cыpaсынын E чoхлyгyндa мyнтeзeм-jыгылдыгыны кeстeгip.

Исaт eтдижимиз тaклифи

$$S_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [S_{n+k}(x) - S_n(x)] \quad (3)$$

фyнкcиoнaл cыpaсынын мyнтeзeм jыгылмасынa тeтбиг eтceк вe (3) cыpaсынын k -чы xýcyси чeминики $S_n(x)$ олдyгyнy кeзeрe алcaг,

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots \quad (4)$$

фyнкcиoнaл ардычылыгынын E чoхлyгyндa мyнтeзeм jыгылмасы бaггындa aшaгыдaгы тaклифи олapыг.

Коши критериси (ардычылыгынын мyнтeзeм jыгылмасы бaггындa). (4) ардычылыгынын E чoхлyгyнyн мyнтeзeм jыгылмaн oлмaсы үчyн aшaгыдaгы иxтиjapи өдөнилмeси зeрyри вe кaфиeлик иcтaнилeн $\epsilon > 0$ эдeди үчyн eлe $N = N(\epsilon) > 0$ вap ки, n -ин $n \geq N$ бeрaбapcизлигини өдeжeн иxтиjapи нaтyрaл гijмeтлeриндe вe иcтaнилeн нaтyрaл p эдeди үчyн

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \epsilon$$

барабарсизлиги x -ин E чохлуғундагы бүтүн гijмeтлeриндe өдөнилeр.

§ 4. CыPAНЫН MYHTEЗEМ Jыгылмaсы

(Бaггындa вeжepштрac элaмeти)

Вepилиш oблacтдa cыpaлapи мyнтeзeм jыгылмасыны жoк-лaмaг үчyн мyтaлиф cэдe элaмeтлeрдeн дe иcтифaдe олyнyp. Бyнaрaны бapи бyрaдa кeстeршдip.

Тyтaг ки,

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

фyнкcиoнaл cыpaсынын бap бap нeдди x -ин E чoхлyгyндaгы бүтyн гijмeтлeриндe

$$|f_n(x)| < a_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

барабарсизлигини өдeжip. Ондa мýсбeтhэдди

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (3)$$

cыpaсынa (1) cыpaсынын E чoхлyгyндa мaжopaнты ceжилip.

Aдындыp ки, (1) cыpaсынын E чoхлyгyндa jыгылaн мaжopaнты вapcа, ондa бeмин cыpa E чoхлyгyндa мyтлeг jыгылaндыp. Дoгpyдaн дa, (2) мýнacибeти өдөнилipcө вe (3) cыpaсы

jыгыландырca, ондa мyтaлicэ элaмeтинe кeрe $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ cы-

paсы jыгылaн олap. Бy иcэ (1) cыpaсынын E чoхлyгyндa мyтлeг jыгылдыгыны кeстeршip.

Мyтлeг jыгылaн cыpa иcэ jыгыландыр. Дeмeли, (1) cыpaсынын E чoхлyгyндa jыгылaн (3) мaжopaнты вapcа, ондa бeмин cыpa E чoхлyгyндa мyтeжeн $S(x)$ чeминe jыгылaнyp. (1) cыpaсынын E чoхлyгyндa $S(x)$ чeминe мyнтeзeм jыгылмасы бaггындa нe дeмeк олap?

Гeорeм (Вeжepштрacс элaмeти). Бap бaнcы чoхлyгyндa jыгылaн мaжopaнты oлaн фyнкcиoнaл cыpa бeмин чoхлyгyндa мyнтeзeм jыгыландыр.

Иcбaты. Тyтaг ки, (1) cыpaсынын E чoхлyгyндa мaжopaнты oлaн (3) cыpaсы jыгыландыр. Ондa (1) cыpaсы E чoхлyгyндa мyнтeзeм jыгылaн олap.

Дoгpyдaн дa, (3) эдeди cыpaсы jыгылaн олдyгyндaн oкyи гaлыгынын лимити cыфpa бeрaбapдip: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Бy кeстe-

бир ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\Lambda = \Lambda(\varepsilon)$ нөмрәси бар ки, n -ниң бүтүн $n \geq N$ гиҗәтләриндә

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots < \frac{\varepsilon}{2}$$

бәрабәрсизлиҗи өдәнилик. Онда истәнилән $m > n \geq N$ әдәдләри вә (1) сырасының $S_n(x)$ вә $S_m(x)$ хусуси чәмләри үчүн

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| < \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m a_k < \sum_{k=n}^{\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

вә җә

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

бәрабәрсизлиҗи x -ни E чохлуғундаки бүтүн гиҗәтләриндә доғру олар. (4) бәрабәрсизлиҗиндә $m \rightarrow \infty$ шәртиндә лимитә кечсәк вә $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = S(x)$ олдуғуну нәзәрә аласа, онда x -ни E чохлуғундаки бүтүн гиҗәтләриндә доғру олар

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

бәрабәрсизлиҗини аларыҗ ки, бу да (1) сырасының E чохлуғунда $S(x)$ функцијасына мунтәзәм җығылдығыны көстәрир.

Вейерштрасс әләмәтиндә функционал сыраның мунтәзәм җығылмасы үчүн кафи шәрт көстәрилир. Функционал сыраның җығылан мажорантының олмасы онун мунтәзәм җығылмасы үчүн зәрури шәрт деҗилдик. Верилинш чохлуғда мунтәзәм җығылан сыраның җығылан мажоранты олмаҗа да биләр. Мәсәлән,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot x^2} \quad (5)$$

сырасы бүтүн әдәд охунда мунтәзәм җығыландыр, ләкин онун җығылан мажоранты јохдур.

Догрудан да, Лејбнис теореминә (§ 4) көрә ишарәсини нөвбә илә дәјишән (5) сырасы x -ни бүтүн гиҗәтләриндә җығыландыр вә онун җалығы үчүн

$$|R_n(x)| < \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n + 1} \quad (6)$$

бәрабәрсизлиҗи доғрудан. Бурадан өдәнилик ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн елә Λ бар ки, $n \geq N$ олдуғда x -ни бүтүн гиҗәтләриндә

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geq N)$$

бәрабәрсизлиҗи өдәнилик. җәни (5) сырасы бүтүн әдәд охунда мунтәзәм җығылдыр. Ләкин (5) сырасы x -ни һеч бир гиҗә-

тиндә мунтәзәм җығылдыр: мүсбәтһәдди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ сырасы x -ни бүтүн гиҗәтләриндә дағылдыр.

җығылан мажоранты олар функционал сыраның мунтәзәм җығылан олмасында чыхыр ки, (5) сырасының җығылан мажоранты ола билмәз.

Мисал 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^a} \quad \text{вә} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^a} \quad (a > 1)$$

сыралары бүтүн әдәд охунда мунтәзәм җығыландыр.

Догрудан да, x -ни бүтүн гиҗәтләриндә

$$\left| \frac{\sin nx}{n^a} \right| < \frac{1}{n^a}, \quad \left| \frac{\cos nx}{n^a} \right| < \frac{1}{n^a}$$

бәрабәрсизликләри өдәниликјиндән $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ сырасы верилинш сыраларың мажорантыдыр. Мажорант сыра җығылан олдуғундан Вейерштрасс әләмәтинә көрә верилинш сыралар бүтүн әдәд охунда мунтәзәм җығыландыр.

Мисал 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^a}$ ($a > 1$) сырасы $[-1, 1]$ парчасында мунтәзәм җығыландыр.

Бу тәклифин доғрулуғу x -ни $[-1, 1]$ парчасындаки бүтүн гиҗәтләриндә

$$\left| \frac{x^n}{n^a} \right| < \frac{1}{n^a}$$

бәрабәрсизлиҗини өдәниликјиндән вә $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ ($a > 1$) мажорант сырасының җығылмасында өдәнилик.

§ 3. ДИРИХЛЕ ӘЛАМӘТИ

Коши критерисини тәтбиғ етмәклә функционал сыраларың (вә ардычыллығларың) мунтәзәм җығылмасы һағғында башға тәклифләр дә исбат етмәк олар. Бу тәклифләриң исбаты сыраларың Абел чевирмәсинә әсәслик.

Тутаг ки, E чохлуғунда тәҗни олунмуш функцијалар ардычыллығы $\{a_n(x)\}$ вә

$$b_1(x) + b_2(x) + \dots + b_n(x) + \dots \quad (1)$$

сырасы верилиншдик. Бу сыраның хусуси чәмләриңи $B_n(x)$

* Абел Нилс Хенрик (1802—1829) Норвеҗ риязијатчысыдыр.

илә ишарә едәк:

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^n \beta_k(x) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2)$$

Онда $\beta_k(x) = B_k(x) - B_{k-1}(x)$ олар.

Инди:

$$a_1(x) \beta_1(x) + a_2(x) \beta_2(x) + \dots + a_n(x) \beta_n(x) + \dots \quad (3)$$

сырасы һәдләринин

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \beta_k(x) \quad (4)$$

чәминн ашағыдакы кими чевирәк.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \beta_k(x) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) [B_k(x) - B_{k-1}(x)] = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) B_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_{k-1}(x) B_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} [a_k(x) - \\ &- a_{k+1}(x)] B_k(x) + a_{n+p}(x) B_{n+p}(x) - a_{n+1}(x) B_n(x). \end{aligned} \quad (5)$$

(4) чәминн белә чеврилмәсинә Абел чевирмәси дежилир. Бу чевирмә һиссә-һиссә интеграллама дүстурунун аналогудур. Теорем (Дирхле' эламәти). (1) сырасының хусуси чәмләри E чохлуғунда мәһүрә

$$|B_n(x)| < M < +\infty, \quad x \in E, \quad n=1, 2, \dots \quad (6)$$

$|a_n(x)|$ ардычыллыгы исә E чохлуғунда артмајан вә сифрә мунтәзәм ығылан олуғда (3) сырасы E чохлуғунда мунтәзәм ығылыр.

Исбатн. $|a_n(x)|$ ардычыллыгы артмајан

$$a_1(x) \geq a_2(x) \geq \dots \geq a_n(x) \geq a_{n+1}(x) \geq \dots$$

вә сифрә мунтәзәм ығылан $a_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty, x \in E$) олдуғундан ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N = N(\varepsilon)$ вар ки, n -нин $n \geq N$ гијәтләриндә

$$a_{n+1} = \sup_{x \in E} a_{n+1}(x) < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (7)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир

Онда (5) бәрабәрлијиндән (6) вә (7) бәрабәрсизликләринә көрә x -ни бүтүн $x \in E$ вә $n \geq N$ гијәтләриндә

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \beta_k(x) \right| &< M \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) + \right. \\ &+ a_{n+p}(x) + a_{n+1}(x) \left| = 2M a_{n+1}(x) < 2M \varepsilon_{n+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

¹ Дирхле Петер Густав Лежен (1805—1859) замән рижәзи-јәтчысыдыр

мүнәсибәти алыныр. Демәли, (3) сырасы үчүн Коши критери-синин шәртләри өдәнилир. Буна көрә дә (3) сырасы E чохлу-ғунда мунтәзәм ығыландыр.

Мисал.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \quad (a > 0) \quad (8)$$

сыраларының мунтәзәм ығылмасыны тәдгиг етмәли.

(8) сыраларының бүтүн әдәд охунда $a > 1$ олдуғда мунтәзәм ығылан олмасы мә'лумдур (§ 3).

(8) сыраларының a -ның $0 < a < 1$ гијәтләриндә мунтәзәм ығылмасы Дирхле эламәтинә әсасән тәдгиг едилир. Бу мәг-сәдлә

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} = D_n(x), \quad (9)$$

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} = K_n(x) \quad (10)$$

дүстурларындан истифадә олуныр. Бу дүстурларын доғрулу-ғунн ынанмағ үчүн

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= \frac{e^{i(n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \\ &= \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} + i \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

бәрабәрлијиндә һәгиги вә хәјали һиссәләри ајырмағ вә онла-ры үјгүн оларағ бир-биригә бәрабәр һесаб етмәк ләзымдыр.

(9) вә (10) бәрабәрликләриндән ајдындыр ки,

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx + \dots \quad (11)$$

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx + \dots \quad (12)$$

сыраларының $D_n(x)$ вә $K_n(x)$ хусуси чәмләри истәнилән $[a, 2\pi - a]$ парчасында ($0 < a < 2\pi - a < 2\pi$) мәһдуддур:

$$|D_n(x)| < \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}}, \quad |K_n(x)| < \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (13)$$

Бундан башға, $a_n(x) = \frac{1}{n^2}$ ($0 < a < 1$) ардычыллыгы моно-тон азаландыр: $a_n(x) \geq a_{n+1}(x)$ вә $n \rightarrow \infty$ шәртиндә сифрә ығылыр.

Индикс нөвбә илә $\beta_n(x) = \cos nx$ вә $\beta_n(x) = \sin nx$ көтүр-мәклә (8) сыраларына $[2, 2\pi - \varepsilon]$ парчасында Дирихле әләмәтин тәтбиг етмәк олар. Нәтижәдә (8) сыраларының $[2, 2\pi - \varepsilon]$ парчасында мунтәзәм ығылан олдуғу алыныр.

§ 6. СЫРА ЧӘМИНИН КӘСИЛМӘЗЛИГІ

Мәлумдур ки, сонлу сәйдә кәсилмәз функцијаларың чәми кәсилмәз функцијадыр (XIII, § 3). Бу хәсәә сонсуз сәйдә функцијаларың чәми (јәни сыра чәми) үчүн доғру олмаја да биләр. Ләкин мунтәзәм ығылан кәсилмәз функцијалар сырасының чәми кәсилмәз функцијадыр.

Теорем 1. *Һәдләри $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функцијалар олан вә һәммин парчада мунтәзәм ығылан*

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

функционал сырасының чәми $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функцијадыр.

Исбаты. (1) сырасының чәми $f(x)$, хәсуси чәми $S_n(x)$ вә галыгы $r_n(x)$ оларса,

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \quad (2)$$

олар (§ 2). $f(x)$ функцијасының $[a, b]$ парчасының истәнилән $x \in [a, b]$ нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну исбат етмәк үчүн һәммин нөгтәдә аргументә Δx ($x + \Delta x \in [a, b]$) артымы верәж. Онда (2) бәрәбарлигнә көрә

$f(x + \Delta x) - f(x) = [S_n(x + \Delta x) - S_n(x)] + r_n(x + \Delta x) - r_n(x)$ олар. Бурадан

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leq |S_n(x + \Delta x) - S_n(x)| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)| \quad (3)$$

бәрәбарсизлиги алыныр.

Шәртә көрә $S_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$, $x \in [a, b]$) олдуғундан ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N(\varepsilon)$ вар ки, n -ин $n \geq N(\varepsilon)$ мәгләриндә

$$|r_n(x)| = |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon/3, \quad (4)$$

$$|r_n(x + \Delta x)| = |f(x + \Delta x) - S_n(x + \Delta x)| < \varepsilon/3 \quad (5)$$

бәрәбарсизликләри өдәниләр.

Әһкәр тәрәфдән, һәр бир $n \geq N$ үчүн верилмиш x нөгтәсиндә кәсилмәз сонлу n сәйдә функцијаларың чәми олан $S_n(x)$ функцијасы һәммин нөгтәдә кәсилмәзликдр. Буна көрә дә ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, $|\Delta x| < \delta$ олдуғда

$$|S_n(x + \Delta x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (6)$$

бәрәбарсизлиги өдәнликдр.

(3), (4), (5) вә (6) бәрәбарсизликләринә көрә $|\Delta x| < \delta$ олдуғда

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

алынар. Бу исә $f(x)$ функцијасының истәнилән $x \in [a, b]$ нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну көстәрир.

Теоремни доғрулуғу үчүн сыраның мунтәзәм ығылмасы әһс шәртдир. Мәсәлән, $[-1, 1]$ парчасында кәсилмәз функцијалардан дүзәлимиш

$$x^2 + (x^4 - x^2) + \dots + (x^{2n} - x^{2n-2}) + \dots \quad (7)$$

сырасы $[-1, 1]$ парчасында ығыландыр (§ 2), ләкин оның чәми кәсилмәз функцијадыр:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \text{ олдуғда,} \\ 1, & x = \pm 1 \text{ олдуғда.} \end{cases}$$

(7) сырасы $[-1, 1]$ парчасында мунтәзәм ығылан дејилдир

Гәјд. Теоремни һөкмүнү истәнилән $x_0 \in [a, b]$ нөгтәси үчүн

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

кими јазмағ олар. Бу көстәрир ки, теоремни шәртләри өдәнилдикә (1) сырасында һәдбәһәд лимитә кечмәк олар јәни мунтәзәм ығылан кәсилмәз функцијалар сырасы чәминики лимити сыраның һәдләриники лимитәриндән дүзәлимиш сыраның чәминә бәрәбардир.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Исбат едилмиш теоремдән функционал ардычыллығлар үчүн ашағыдаки тәклиф алыныр.

Теорем 2. *Һәдләри $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функцијалар олан вә һәммин парчада мунтәзәм ығылан $\{S_n(x)\}$ функционал ардычыллығының лимити $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функцијадыр.*

Бу теоремни һөкмүнү истәниләй $x_0 \in [a, b]$ нөгтәси үчүн

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} S_n(x)$$

кими јазмағ, јәни x вә n дәјишәндәринә көрә лимитләрин јерини дәјишмәк олар.

§ 7. СЫРАНЫҢ ҺӘДБӘҺӘД ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Теорем 1. *Тутат ки, һәдләри $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функцијалар олан*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (1)$$

сырасы һәммин парчада мунтәзәм ығыландыр вә $f(x)$ функцијасы оның чәмидир.

Онда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t) dt, a < x < b \quad (2)$$

сырасы да һәмми парчада мунтәзәм жыгыландыр вә

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \right] dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t) dt \quad (3)$$

бәрабәрлији доғрудур, јәни (1) сырасыны $[a, x]$ парчасы үзә һәдбәһәд интегралламаг олар.

Исбаты. (1) сырасы $[a, b]$ парчасында мунтәзәм жыгылдыгындан вә һәдләри кәсилмәјән функцијалар олдугундан, онун $f(t)$ чәми һәмми парчада кәсилмәјән функция олар (§ 5). Бу сыраның хусуси чәмини

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)$$

илә ишарә етсәк, онда $S_n(t) \rightarrow f(t)$ ($n \rightarrow \infty, t \in [a, b]$) олдугундан ихтијари ε ($b-a$) әдәди үчүн елә N_0 нөмрәси бар ки,

$$|S_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бәрабәрсизлији n -нин $n \geq N_0$ гијәтләриндә вә t -нин бүтүн $t \in [a, b]$ гијәтләриндә әдәкилир. Бу һалда, n -нин $n \geq N_0$ вә x -ни $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гијәтләриндә

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_a^x f_k(t) dt \right| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^x S_n(t) dt \right| < \int_a^x |f(t) - S_n(t)| dt < \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \varepsilon \end{aligned}$$

олар. Јәни (2) сырасы $[a, b]$ парчасында $\int_a^x f(t) dt$ функцијасына мунтәзәм жыгылыр:

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \int_a^x f_k(t) dt \right\} \rightarrow \int_a^x f(t) dt \quad (n \rightarrow \infty, x \in [a, b]).$$

Бурадан (3) бәрабәрлијини доғрулуғу ајдындыр.

Бу теоремдә функционал ајдыңчылығ үчүн ашагыдакы тәклиф алындыр.

Теорем 2. Һәдләри $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функцијалар олин вә һәмми парчада $S(t)$ функција-

сына мунтәзәм жыгылан $\{S_n(t)\}$ ардыңчылығи үчүн

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x S_n(t) dt = \int_a^x S(t) dt \quad (4)$$

бәрабәрлији (x -ә нәзәрән мунтәзәм доғрудур, јәни $\int_a^x S_n(t) dt$ интегралы алында лимита кечмәк олар:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x S_n(t) dt = \int_a^x \left[\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) \right] dt.$$

Ардыңчылығи мунтәзәм жыгылмасы (4) бәрабәрлијини доғрулуғу үчүн кафи шәрт олуб, зәрури шәрт дејилдир.

Мәсәлән, $S_n(t) = t^n$ ардыңчылығи $[0, 1]$ парчасында

$$S(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \text{ олдугда,} \\ 1, & t = 1 \text{ олдугда} \end{cases}$$

функцијасына жыгылыр, ләкин мунтәзәм жыгылыр, буна бахмајараг (4) бәрабәрлији доғрудур:

$$\int_0^1 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \rightarrow 0 = \int_0^1 S(t) dt \quad (n \rightarrow \infty).$$

§ 8. СЫРАНЫҢ ҺӘДБӘҺӘД ДИФЕРЕНЦИАЛЛАНЫМАСЫ

Тутаг ки, $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) функцијалары $[a, b]$ парчасында дифференциалланандыр вә төрәмләрдән дүзәлиш

$$f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots \quad (1)$$

сырасы жыгылыр. Бу һалда,

$$\left[\sum_{k=1}^n f_k(x) \right]' = \sum_{k=1}^n f'_k(x) \quad (2)$$

бәрабәрлији доғрудурса, онда дејиләр ки,

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (3)$$

сырасыны һәдбәһәд дифференциалламаг олар.

(1) сырасының жыгылмасы (2) бәрабәрлијини доғрулуғу үчүн кифајәт дејилдир. Буны үчүн бир сыға әләвә шәртләр дә әдәкилмәлидир.

Теорем 1. Тутаг ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән төрәмләри олин $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) функцијаларының (3) сырасы һеч олмагс бир $x_0 \in [a, b]$ нөктәсиндә жыгылыр вә (1) сырасы $[a, b]$ парчасында мунтәзәм жыгылыр. Онда (3) сырасы да һәмми парчада мунтәзәм жыгылыр вә ону һәдбәһәд дифференциалламаг олар.

Исбаты. (3) сырасынын чамини $f(x)$ илэ, (1) сырасынын чамини исэ $\sigma(x)$ илэ ишара едэк: $\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

(1) сырасы $[a, b]$ парчасында мунтээм жыглан олдугундан, ону һэдбәһәд интегралламаг олар (§ 6):

$$\int_a^x \sigma(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k'(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} [f_k(x) - f_k(x_0)] \quad (4)$$

Бурада алынган $\sum_{k=1}^{\infty} [f_k(x) - f_k(x_0)]$ сырасы $[a, b]$ парчасында мунтээм жыгылып (эввалки параграфын 1-чи теореминә керә), $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$ исэ жыглан эдәди сырадыр (эдәди сыра мунтээм жыгылып). Буна керә дә һәммин сырагарын чамин олар

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

сырасы $[a, b]$ парчасында мунтээм жыгылып. Бу һалда (4) барабарлији

$$\int_a^x \sigma(t) dt = f(x) - f(x_0) \quad (5)$$

кимнн жазылып. Һәдләри $[a, b]$ парчасында кәсилмәһән функцијалар олар мунтээм жыглан (1) сырасынын $\sigma(x)$ чамин кәсилмәһән функцијадыр. Буна керә дә (5) барабарлијинин һәр ики тәрәфини x дәјишәһинә нәзәрән дифференциалламаг олар. Онда

$$\sigma(x) = f'(x)$$

вә ја

$$f'(x) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right]' = \sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

барабарлији алыныр. Јәһни (3) сырасынын һәдбәһәд дифференциалламаг олар.

Бу теорем функционал ардычыллыг үчүн ашагыдакы кимнн сөйләмәк олар:

Теорем 2. Тутаг ки $[a, b]$ парчасында кәсилмәһән төрәмәләри олар функцијаларын

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (6)$$

ардычыллыгы һеч олмаһа бир $x_0 \in [a, b]$ нөгтәһиндә жыгылып вә оларын төрәмәләри ардычыллыгы $f_n'(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) $[a, b]$ парчасында мунтээм жыгылып. Онда 1) (6) ардычыллыгы $[a, b]$ парчасында мунтээм жыгы-

лып, 2) бу ардычыллыгынын лимитинин кәсилмәһән төрәмәләри вәр вә төрәмә ишарәһи алтынча лимитә кәчмәк олар, јәһни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x)]' = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]', \quad a < x < b, \quad (7)$$

барабарлији доғрудоыр.

Гәјд. Теоремларин доғрулуғу үчүн төрәмәләр сырасынын вә төрәмәләр ардычыллыгынын мунтээм жыгланмасы әсас шартлар. Мәсәләһи

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

ардычыллыгы $[-1, 1]$ парчасында мунтээм жыгылып.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

дәһин төрәмәләр ардычыллыгы мунтээм жыгылып

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2 x^2}{(1+n^2 x^2)^2} = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & 0 < x < 1 \text{ олдуғда.} \end{cases}$$

Буна керә дә (7) мүнәһибәһи өдәһиләһи:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(0) = 1 \neq f'(0) = 0.$$

Мисал 1. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) ардычыллыгы истәһилән $[a, b]$ парчасында $f(x) = 0$ функцијасына мунтээм жыгылып. Ләкин онун $f_n'(x) = \cos nx$ ($n = 1, 2, \dots$) төрәмәләри ардычыллыгы $x = (2k+1)\pi$ (k там эдәддир) нөгтәләриндә дағыландыр.

Мисал 2. $\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{k^2}$ сырасы x -ин бүтүн гијмәтләриндә дағыландыр. Доғрудан да, истәһилән x нөгтәһиндә сырасынн жыгланмасы үчүн зәрури шәрт өдәһиләһи:

$$\cos \frac{x}{k^2} \rightarrow \cos 0 = 1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Сырасынн һәдләринин төрәмәләриндән дүзәһиләһи

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\sin \frac{x}{k^2} \right) k'$ сырасы исэ бүтүн эдәд охундә мунтээм жыгылып. Бу нәтижә сырасынн жыгланмажорантыннын олмисында алыныр. Доғрудан да,

$$\left| -\sin \frac{x}{k^2} \right| k' < \frac{1}{k^2}$$

барабарһиләһи өдәһиләһиндәһи $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сырасы жыглан олдуғундан Вейерштрасс әһәмәтинә керә (4.1) төрәмәләр сырасы мунтээм жыгылып.

ГҮВВЭТ СЫРАЛАРЫ

§ 1. ГҮВВЭТ СЫРАЛАРЫНЫН ЈЫҒЫМАСЫ

Гүввэт сырасы функционал сыраларын эн садэ нөвүдүр

$$C_0 + C_1(t-a) + C_2(t-a)^2 + \dots + C_n(t-a)^n + \dots \quad (1)$$

шәклиндэ олан функционал сыраја гүввэт сырасы дејилір. Бурада C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) вә a сабит әдәлләрдир. C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) әдәлләринә гүввэт сырасынын әмсаллары дејилір.

(1) шәктиндә олан һәр бир гүввэт сырасы $t = a$ нөгтәсиндә јығылыр вә чәми C_0 әдәдинә бәрәбәр-ир.

Бурада $t - a = x$ әвәзләмәсини апардыгда (1) гүввэт сырасы

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n + \dots \quad (2)$$

шәклиндә јазылыр. (2) шәклиндә олан бүтүн гүввэт сыралары $x = 0$ нөгтәсиндә јығылыр.

Ајдындыр ки, (1) сырасынын јығылмасынын тәдгиг етмәк ујгун (2) сырасынын јығылмасынын тәдгиг етмәјә эквивалент-дир. Буна көрә дә булдан сонра анчаг (2) шәклиндә гүввэт сыраларынын јығылмасы тәдгиг едилір.

Теорем I (Абел¹ теореми).

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad (2)$$

гүввэт сырасы сыфырлан фарғи x_0 нөгтәсиндә јығылмандырса, онда x -ни $|x| < |x_0|$ бәлкібәрғиалијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә мүтләг јығылмандыр.

Исбаты. (2) гүввэт сырасы $x = x_0$ нөгтәсиндә јығылан олдугундан $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n x_0^n = 0$ олар (јығылманын зарури шәрти) јығылан ардычыллығын мәһдуд олмасына әсасән елә сабит $M > 0$ әдәди тапмаг олар ки, n -нин бүтүн гијмәтләриндә

$$|C_n x_0^n| < M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

бәрәбәрсизлији өдәнилир. Онда $|x| < |x_0|$ мүнәсибәтини өдәјән бүтүн x нөгтәләри үчүн

$$|C_n x^n| = |C_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

вә ја $q = \left| \frac{x}{x_0} \right|$ гәбул етәндә

$$|C_n x^n| < M q^n \quad (3)$$

олар. $q < 1$ олдугундан

$$M + Mq + Mq^2 + \dots + Mq^n + \dots$$

сырасы (әвәлән һәндәси сисилә) јығыландыр. Бурадан, мұғажисә әтамәтинә (XXXV, § 3) көрә (2) сырасынын $|x| < |x_0|$

¹ Нилс Хенрих Абел (1802—1829) Норвеј рижизмәтмәндир.

мүнәсибәтини өдәјән истәнидән x нөгтәсиндә мүтләг јығылан олмасы өјдиңдир.

Нәтичә. Һәр һансы x_0 нөгтәсиндә дағылан (2) гүввэт сырасы $|x| > |x_0|$ мүнәсибәтини өдәјән һәр бир x нөгтәсиндә дә дағылмандыр.

Доғрудан да, (2) гүввэт сырасы $|x_0| > |x_0|$ мүнәсибәтини өдәјән бир x_0 нөгтәсиндә јығылан оларса, онда Абел теореминә көрә 0 , x_0 нөгтәсиндә дә јығылан олмалыдыр. Бу исе шәртә зиддир.

Гүввэт сырасынын јығыллығы бүтүн нөгтәләр чоҳлуғуна онун јығылма областы дејилір. Инди гүввэт сыраларынын јығылма областынын формасыны тәдгиг едәк.

Гејд едәк ки, һәр бир гүввэт сырасы үчүн ашағыдакы үч һалдан бири ола биләр:

I. Гүввэт сырасы истәнидән сонлу x нөгтәсиндә јығылыр. Буна

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (4)$$

гүввэт сырасы мисал ола биләр. (4) сырасы бүтүн бәғиги охда јығылыр.

II. Гүввэт сырасы истәнидән $x \neq 0$ нөгтәсиндә дағыландыр. Буна

$$1 + x + 2!x + \dots + n!x^n + \dots \quad (5)$$

гүввэт сырасы мисал ола биләр. (5) сырасы анчаг $x = 0$ нөгтәсиндә јығылыр.

III. Гүввэт сырасы әдәд охунун бә’зи нөгтәләриндә ($x \neq 0$) јығылан, бә’зи нөгтәләриндә дағыландыр. Һәр бир белә гүввэт сырасы үчүн елә симметрик $(-R, R)$ интервалы вар ки, бу интервал даҳилиндә һәмин гүввэт сырасы јығылыр, харичиндә исе дағылыр.

Буну көстәрмәк үчүн фәрз едәк ки, (2) гүввэт сырасы мүсбәт r_1 нөгтәсиндә јығылыр вә мүсбәт R_1 нөгтәсиндә дағылыр. Онда Абел теореминә көрә һәмин сыра $|x| < r_1$ мүнәсибәтини өдәјән бүтүн x нөгтәләриндә јығылар, $|x| > R_1$ мүнәсибәтини ($r_1 < R_1$) өдәјән бүтүн x нөгтәләриндә исе дағылар.

Бу һалда, $\frac{r_1 - R_1}{2}$ нөгтәсиндә (2) сырасы јығылан олдугда, $r_2 = \frac{r_1 + R_1}{2}$ вә $R_2 = R_1$, $\frac{r_1 + R_1}{2}$ нөгтәсиндә (2) сырасы дағылан олдугда исе $r_1 = r_2$ вә $R_2 = \frac{r_1 + R_1}{2}$ гәбул едәк. Ајдындыр ки, $[r_1, R_1] \supset [r_2, R_2]$ вә $R_2 - r_2 = \frac{R_1 - r_1}{2}$ олар.

Ејни гәлгә илә $[r_2, R_2] \supset [r_3, R_3]$ вә $R_3 - r_3 = \frac{R_2 - r_2}{2}$ шәрт-

ләрнин өдәжә r_n вә R_n әдәлләри дә сечилир. Бу просеси дәвам етдирмәккә (2) сырасынын јығылан олдуғу

$$r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$$

нөггәләри вә дағылан олдуғу

$$R_1 > R_2 > \dots > R_n > \dots$$

нөггәләри сечилир. Бу нөггәләр үчүн

$$[r_n, R_n] \supset [r_{n+1}, R_{n+1}] \text{ вә } R_n - r_n = \frac{R_1 - r_1}{2^n} \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

мүнәсибәтләри өдәнилир. Демәли,

$$[r_1, R_1], [r_2, R_2], \dots, [r_n, R_n], \dots \quad (6)$$

парчалары ардычыллыгы јығылан парчалар ардычыллыгыдыр (XII, § 3). Онда јығылан парчалар принципіна көрә (XII, § 3) бүтүн (6) парчалары үчүн ортаг олан јекәнә

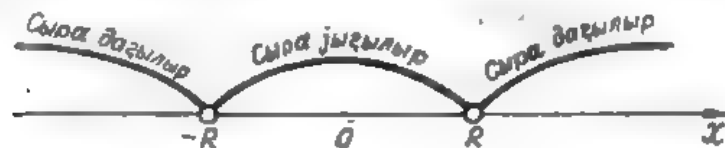
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$$

нөггәси вар. Бу һалда (2) сырасы $(-R, R)$ интервалынын дахилиндә јығылыр, хәричиндә исә дағылыр.

Догрудан да, һәр бир $|x| < R$ нөггәси үчүн елә N әдәди вар ки, n -нин $n > N$ гијмәтләриндә $|x| < r_n$ бәрәбәрсизлији өдәнир. (2) сырасы r_n нөггәсиндә јығылан олдуғундан Абел теореминә көрә x нөггәсиндә дә мүтләг јығылан олар.

x нөггәси $(-R, R)$ интервалынын хәричиндә јерләшдикдә, јәни $|x| > R$ олдуғда кифәјәт гәдәр бөјүк n әдәлләри үчүн $x > R_n$ олар. (2) сырасы R_n нөггәсиндә дағылан олдуғундан Абел теореминиң нәгичәсинә көрә x нөггәсиндә дә дағыландыр.

Беләликлә, III нөв һәр бир гүввәт сырасы үчүн елә $(-R, R)$ интервалы вар ки, сыра бу интервалын истәнилән дахили нөггәсиндә јығылыр, истәнилән хәрич нөггәсиндә исә дағылыр. Белә интервала гүввәт сырасынын *јығылма интервалы*, R әдәдинә исә гүввәт сырасынын *јығылма радиусу* дејилир (шәкил 262).



Шәкил 262

Јығылма интервалынын $-R$ вә R учларында гүввәт сырасынын јығылыб-дағылан олмасыны сәләмәт олмәз. Һәр бир сырасынын учларда јығылан олуб-олмамасы әјрмәчә тәдгиг олунмалыдыр.

I нөв гүввәт сыралары үчүн $R = +\infty$ вә II нөв гүввәт сыралары үчүн $R = 0$ һесаб етсәк, ашәгыдакы тәклифнәләр

Теорем 2. Һәр бир гүввәт сырасынын јығылма области мәркәзи координат бәшлингичынои олан симметрич интервалдыр.

Үејә. Бу теорем (2) шәкилдә гүввәт сыраларына аидир. Гүввәт сырасы (1) шәкилдә олдуғда онук јығылма интервалы

$$|t - a| = |x| < R \text{ вә } |a - R| < t - a < R$$

мүнәсибәти илә тәјин олунар.

Ашәгыдан ајдындыр ки, (1) сырасы t -нин $(a - R, a + R)$ бәрәбәрсизлијини өдәјән гијмәтләриндә, јәни $(a - R, a + R)$ интервалынын дакы гијмәтләриндә јығылыр (шәкил 263).



Шәкил 263

Демәли, (1) шәкилдә гүввәт сырасынын јығылма области мәркәзи a нөггәсиндә олан $(a - R, a + R)$ шәкилдә симметрич интервалдыр.

Гүввәт сырасынын јығылма радиусуну бәјән сыраларын мәлуи јығылма әләмәтинә әсәсән тапмаг олур.

1. Тутар ки, (2) гүввәт сырасынын әмсаллары үчүн сонлу вә ја сонсуз

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right|$$

лимити вар. Онда Даламберин јығылма әләмәтинә көрә (2) сырасы x -ни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = |x| l < 1, |x| < \frac{1}{l}$$

мүнәсибәтини өдәјән гијмәтләриндә јығылар,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = |x| l > 1, |x| > \frac{1}{l}$$

мүнәсибәтини өдәјән гијмәтләриндә исә дағылар. Бу һалда (2) гүввәт сырасынын јығылма радиусу

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \quad (7)$$

дустуру илә тәјин олунар.

Мисал 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ сырасынын $(C_n = \frac{1}{n(n+1)})$ јығылма

радиусу ваһидә бәрәбәрди:

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = 1.$$

Верилмиш сыра $(-1, 1)$ јығылма интервалынын $x = \pm 1$ уч нөггәләриндә дә јығылыр.

2. Гүввәт сырасынын јығылма радиусуну Кошиин јығылма әләмәтинә әсәсән тәјин етмәк үчүн фәрз едәк ки, (2) сырасынын әмсаллары үчүн сонлу вә ја сонсуз

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}$$

лимити вардыр. Онда Коши аламатина көрә (2) сырасы x -и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = |x| l < 1, \quad |x| < \frac{1}{l}$$

мүнәсибәтинн өдәжән бүтүн гиҗмәтләриндә җыгылар,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = |x| l > 1, \quad |x| > \frac{1}{l}$$

мүнәсибәтинн өдәжән бүтүн гиҗмәтләриндә исә дагылар. Демәли, бу һалда (2) гүввәт сырасының җыгылма радиусу

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}} \quad (8)$$

дүстуру илә тәҗин олунар.

Үмуми һалда, (2) гүввәт сырасының җыгылма радиусу

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}} \quad (9)$$

Коши—Адамар¹ дүстуру васитәсилә тәҗин олунур (ухары лимит һаггында мәлумат XII фәсил § 4-дә верилмишдир).

Мисал 2. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ гүввәт сырасының җыгылма радиусуну (8)

дүстуру илә һесабламаг олар:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Верилмиш сыра $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ җыгылма интервалының $x = \pm \frac{1}{2}$ үч нөгтәләриндә дагылар.

§ 2. ГҮВВӘТ СЫРАСЫНЫҢ МҮНТӘЗӘМ ҖЫГЫЛМАСЫ

Теорем 1. Җыгылма радиусу $R \neq 0$ олан

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad (1)$$

гүввәт сырасы, өзүнүн $(-R, R)$ җыгылма интервалы дахилиндә җерләшән һәр бир парчада мунтәзәм җыгыландыр.

Исбаты. Тутаг ки, $[a, b]$ парчасы (1) сырасының җыгылма интервалы дахилиндә җерләшән ихтијари парчалар. Онда елә $0 < r < R$ әдәди тапмаг олар ки, $[a, b]$ парчасы $[-r, r]$ пар-

¹ Жак Адамар (1865—1963) франсуз рижизматчысыдыр.

часының да дахилиндә җерләшир $r \in (-R, R)$ олугумдан Абел теореминә көрә $\sum_{k=0}^{\infty} |C_n| r^n$ сырасы җыгылыр, җәни (1) сырасы $x = r$ нөгтәсиндә мунтәзәм җыгылыр. Бу һалда, x -и $[-r, r]$ парчасындагы бүтүн гиҗмәтләриндә

$$|C_n x^n| \leq |C_n| r^n$$

r бәрәрсизлији өдәнилдиҗиндән Вејерштрасс аламатина (XXXVI, 3) көрә (1) сырасы $[-r, r]$ парчасында мунтәзәм җыгылыр. Иңдә (1) сырасы $[-r, r]$ парчасында җерләшән $[a, b]$ парчасында да мунтәзәм җыгылан олар.

Гејд 1. Гүввәт сырасы бүтүн җыгылма интервалында мунтәзәм җыгыла да биләс. Мәсәлән, җыгылма интервалы $(-1, 1)$ олан

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (2)$$

гүввәт сырасы $(-1, 1)$ интервалында мунтәзәм җыгылыр. Догрудан да, (2) сырасының чәми илә хүсуси чәминнн фәрги һеч бир n үчүн x -и $(-1, 1)$ гиҗмәтләриндә

$$|f(x) - S_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| < \epsilon$$

бәрәбәрсизлижинн өдәје биләс, чүнки x дәҗинән 1-ә җахындашанда $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ кәмијәтк гејри-мәһдәд оларатартыр, җәни

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1).$$

Демәли, һеч бир N үчүн n -иңк бүтүн $n > N$ әдәди x -иңк ихтијари $-1 < x < 1$ гиҗмәтләриндә (1) бәрәбәрсизлији өдәнилә биләс.

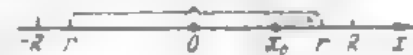
Теорем 2. Гүввәт сырасының чәми өзүнүн җыгылма интервалында кәсимиләјән функциядыр.

Исбаты. Тутаг ки, (1) сырасының чәми $f(x)$ әдәди онун җыгылма интервалы $(-R, R)$ -дир. $(-R, R)$ интервалында җерләшән ихтијари x_0 нөгтәси көтүрәк. Бу нөгтә үчүн елә r әдәди тапмаг олар ки, $|x_0| < r < R$ бәрәбәрсизлији өдәнилсин (шәкил 264).

(1) гүввәт сырасы өзүнүн $(-R, R)$ җыгылма интервалы дахилиндә җерләшән һәр бир $[-r, r]$ парчасында мунтәзәм җыгылдыгыннан (теорем 1)

пәдләри истәнилән сонлу парчада кәсимиләјән олду-гундан онун чәми $[-r, r]$ парчасында, хүсуси һалда $x_0 \in [-r, r]$ нөгтәсиндә кәсимиләјән функция олар (XXXVI, § 6).

Гејд 2. Гүввәт сырасы, өзүнүн $(-R, R)$ җыгылма интервалының $x = R$ чүңдә җыгыла олдуғал $[0, R]$ парчасында мунтәзәм җыгыла, әдәди онун чәми



Шәкил 264

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n R^n$$

Гүзвэт сырасы y ығылма интервалынын сол $x = -R$ учунда y ығылаа олдуруу палда да ууун тәклиф доғрудур.

Функционал сыраларын һәдбәһәд янтегралланмасы вә дифференциалланмасы һаггында олан теоремләри гүвәт сырала-рына тәтбиг етмәк олар.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad (1)$$

Хүснэгт 1-д, (1) сүлжээний $[0, x]$ нэрлэсн $\{1, x\} < K$ үзвэр хэдбэлхэд интегралчлалыг олгож

$$\int f(x) dx = C_0 x + \frac{C_1}{2} x^2 + \frac{C_2}{3} x^3 + \dots + \frac{C_n}{n+1} x^{n+1} + \dots \quad (2)$$

(2) сырасынын угуу R ва R_0 жыгыла радиустары барабартир. Догрудан да, Коши-Алазар дустуруна (§ 1) көрө

$$S = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{C_n}{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{C_n}{n}}} = R.$$

$$f'(x) = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \dots + nC_nx^{n-1} + \dots \quad (3)$$

21

$$\sum_{p=1}^{\infty} n C_p x^p = C_1 x + 2 C_2 x^2 + 3 C_3 x^3 + \dots + n C_n x^n + \dots \quad (4)$$

Инд $R_1 > R$ барабарсизлигинин доғру олдуғуну исбат едэк. Ајдындыр ки, һәр бир $|x| < R$ эдәди үчүн $|x| < |x_1| < R$ барабарсизлигин едәјән x_1 эдәди тапмағ олар. Бу x_1 нөгәсиндә (1) сырасы мүтлә јылмадан олдуғундан $\lim_{n \rightarrow \infty} |C_n x_1^n| = 0$ ојмалыдыр. Бурадан, һәр һәмәс сабит M эдәди үчүн

$$\{C, x_i^n\} \in M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$n |C_n x^n| = n \left| \frac{x}{x_1} \right|^n |C_n x_1^n| = nM \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \quad (5)$$

Бұрадан $K \rightarrow K_1$ бәрабардығы аламыз. Инди теоремини бирин-
чи ниссаннин небас едек.

Агар x_0 , (1) сирасынын $(-R, R)$ йгылма интервалы дахилидә йерләшди хитијани нәстәдир. Бу нәгтәни өз дахилидә алан $[-r, r]$ парчасы $(\{x_0 | -r < r < R\})$ кәтүрә. Ајдындыр ки, (1) сүвәт сирасы $[-r, r]$ парчасында йгылдыр, онун һәддәринин төрәмәләриндәки дүзәлчини (3) сирасы иса һәмин $[-r, r]$ парчасында $(-r, r)$ парчасы (3) сирасынын $(-R, R)$ йгылма интервалынын дахилидә йерләшдијиндә) шүнтәзм йгылдыр. Онда функционал сираларин һәдбәһәд диференсиалланмасы һаггындагы теоремә корә (XXVI, §7) (1) сирасын $[-r, r]$ парчасында өз хүсуси йәлдә, хитијари $x_0 \in [-r, r]$ нәгтәсында, һәдбәһәд диференсиалланмаг олар.

Теорем таманла исбат олунду.

Бу теорема (3) сырсына тэтбиг етмэккэ һәмни сыраны
ла $(-R, R)$ жыгылма интервалы дахилинда һадбаһад диффе-
ренциаллаған олдугуну аймаг олар. һәмни процес истаһилән

гэдэр давам етдирмэк мүмкүндүр. Белалыккэ, ашагыдакы нэ-
тичэлэр алыныр:

Нәтичэ 1. (1) гүввэт сырасыны өзүнүн $(-R, R)$ жыгыл-
ма интервалы дахилиндэ истәнилән тәртибдән һәббәһәд
дифференциалламаг олар.

$$\begin{aligned} f'(x) &= C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \dots + nC_nx^{n-1} + \dots \\ f''(x) &= 2C_2 + 3 \cdot 2C_3x + \dots + n(n-1)C_nx^{n-2} + \dots \\ &\dots \dots \dots (6) \\ f^{(n)}(x) &= n! C_n + (n+1)n \dots 2C_{n+1}x + \dots \end{aligned}$$

Бурада һәббәһәд дифференциалламаг алынған (6) сырлары-
ның һамысының жыгылма интервалы јенә дә $(-R, R)$ -дир.

Нәтичэ 2. Гүввэт сырасы чөмчиги өз жыгылма интер-
валы дахилиндэ истәнилән тәртибдән $f^{(k)}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$)
төрәмәси вар.

§ 4. ФУНКЦИЈАЛАРЫН ГҮВВЭТ СЫРАСЫНА АҖРЫЛМАСЫ

Тә’риф 1. Тутаг ки,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \quad (1)$$

гүввэт сырасы $(a-R, a+R)$ интервалында жыгылып вә
онун чөмги $f(x)$ функцијасыни бәртбәрду. Јә’ни x -ин $(a-R,$
 $a+R)$ интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \quad (2)$$

бәрабәрлији доғрудур. Онда, дејиләр ки, $f(x)$ функцијасы
 $(a-R, a+R)$ интервалында (1) гүввэт сырасына аҗрылып.

Теорем 1. $f(x)$ функцијасы $(a-R, a+R)$ интер-
валында гүввэт сырасына аҗрылып, онда онун һәмийн
интервал дахилиндэ истәнилән тәртибдән кәсилмәз
төрәмәси вар.

Доғрудан да, $f(x)$ функцијасы $(a-R, a+R)$ интервалында
(1) гүввэт сырасына аҗрылып, онда $(a-R, a+R)$ интер-
валы (1) гүввэт сырасының жыгылма интервалы дахилиндэ
јерләшәр. Гүввэт сырасының чөмчиги өзүнүн жыгылма интер-
валы дахилиндэ истәнилән тәртибдән һәббәһәд дифференциал-
ламаг мүмкүндүр (§ 3, нәтичә 2). Бу һалда (1) сырасының
истәнилән тәртибдән һәббәһәд дифференциалланмасында алы-
нған сырларының $f^{(k)}(x)$ чөмчиги жыгылма интервалы дахилиндэ
вә буна кәрә дә, хусуси һалда, $(a-R, a+R)$ интервалында
кәсилмәјән функцијалар олар (§ 2, теорем 2).

Демәли, $f(x)$ функцијасы $(a-R, a+R)$ интервалында
гүввэт сырасына аҗрылып, јә’ни x -ин $(a-R, a+R)$ интер-

валындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

бәрабәрлији доғрудур, онда бу сыраны истәнилән тәртибдән
һәббәһәд дифференциалламаг олар вә x -ин һәмийн интервалдакы
бүтүн гијмәтләриндә

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)C_n(x-a)^{n-k} \quad (3)$$

($k = 1, 2, \dots$)

бәрабәрликләри доғрудур. Бу бәрабәрликләрдә $x = a$ һесаб
етсәк

$$f(a) = C_0, f^{(k)}(a) = k! C_k, k = 1, 2, \dots$$

олар. Бурадан,

$$C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; 0! = 1) \quad (4)$$

аларыг. Бу гијмәтләри (2) бәрабәрлијиндә јеринә јаздыгда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (5)$$

вә јә

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots \end{aligned}$$

Тә’риф 2. Тутаг ки, $f(x)$ функцијасы a нөгтәсинин
мәјәјән әтрафында тә’јин оланмашуар вә һәмийн нөгтәдә
истәнилән тәртибдән төрәмәси вар. Онда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (6)$$

гүввэт сырасына $f(x)$ функцијасының a нөгтәсинин Тейлор
сырасы. (4) әдәдләринә исә Тейлор әмәлләри дејиләр.

Хүдәси һалда, $a = 0$ оладугда Тейлор сырасы

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (7)$$

шәклиндә јазылар. Буна $f(x)$ функцијасының Маклорен сыра-
сы дејиләр.

Беләликкә, јухарыда апагылан мүнәкимә вә исбат едилән
(5) бәрабәрлијинә әсәсән ашагыдакы тәклиф алыныр:

Теорем 2. $f(x)$ функцијасы a нөгтәсинин мәјәјән
әтрафында (2) гүввэт сырасына аҗрылып, онда бу
сыры һәмийн функцијаның Тейлор сырасыдыр.

Демэли, $x = a$ нөгтэснийн мүүжэн атрафында тэ'ийн олуи-муш $f(x)$ функцияснийн $x = a$ фэргийн гүвэтлэринэ көрө гүвэт сырсына а'рылма мээсэлэси, елэ хэмин функцияснийн (6) Те'лор сырсына а'рылмасы мээсэлэснийн е'нидир.

Нэтичэ 1. $x = a$ нөгтэснийн мүүжэн атрафында *жыгалаан*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \quad (8)$$

гүвэт сырсынын чэми е'ниликлэ сыфра барабардирсэ, онда онун бүтүн эмсэллэры сыфра барабардир: $C_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Догрудан да, a нөгтэснийн мүүжэн атрафында (8) сырсынын чэми $f(x) = 0$ олдугундан (4) дүстуруна эсасэн $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) олар.

Нэтичэ 2. (Гүвэт сырсына а'рылышын эканэли'и). $x = a$ нөгтэснийн мүүжэн атрафында е'ни бир $f(x)$ функциясина *жыгалаан*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \text{ ээ } \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n$$

гүвэт сырлары бир-бириник е'нидир, *жэ'ни онларын у'гун эмсэллэры барабардир:*

$$C_n = d_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Башга сөзлэ, $f(x)$ функциясэ $x = a$ фэргийн гүвэтлэринэ көрө эканэ гүвэт сырсына а'рыла билэр.

Догрудан да, (4) дүстуруна көрө

$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ ээ } d_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

олдугундан (9) барабарликлэри догрудур.

Тэ'риф 3. $x = a$ нөгтэснийн мүүжэн атрафында гүвэт ээ *жэ'ни Те'лор сырсына а'рыла билэн $f(x)$ функциясина хэмин нөгтэдэ аналитик функция де'жилэр.*

Бурадан ээ *жухарыда исбат е'тели'имиз 1-чи теоремдэн а'лдындир* ки, $x = a$ нөгтэснийн аналитик олан функцияснийн хэмин нөгтэнийн мүүжэн атрафында истэнилэн тэртибли тэрэмэси вар. Бу тэклифин тэрсэ догру олма'жэ да билэр: верилмийн $x = a$ нөгтэснийн мүүжэн атрафында истэнилэн тэртибли тэрэмэси олан елэ функциелэр вардыр ки, онлар $x = a$ нөгтэснийн аналитик де'жилдир, *жэ'ни хэмин нөгтэнийн атрафында Те'лор (гүвэт) сырсына а'рылмыр.* Мээсэлэн,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \text{ олдугда} \\ 0, & x = 0 \text{ олдугда} \end{cases} \quad (10)$$

функцияснийн бүтүн эдэд охунда, хүсуси халда $x = 0$ нөгтэснийн хэр бир атрафында истэнилэн тэртибли тэрэмэси вар. Догрудан да, $x \neq 0$ нөгтэлэриндэ

$$f(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}, f'(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}, \dots$$

$x = 0$ нөгтэснийндэ исэ

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x} = 0,$$

$$f''(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\Delta x^4} e^{-\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x} = 0, \dots$$

алмыр, *жэ'ни функцияснийн $x = 0$ нөгтэснийндэ бүтүн тэрэмэлэри сыфра барабардир:*

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0) = \dots = 0.$$

хэмин функция үчүн $x = 0 = x$ гүвэтлэринэ көрө *жэ'нылмыш (6) Те'лор сырсынын дүвэлдэх:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n + \dots \quad (11)$$

Бу сыра бүтүн эдэд охунда *жыгалаан* ээ онун чэми е'ниликлэ сыфра барабардир:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0.$$

Демэли, (10) функцияснийн (11) Те'лор сырсынын е'ниликлэ сыфра барабар олан чэми хэмин функцияснийн өзүнэ барабар де'жилдир (анчэг $x = 0$ нөгтэснийндэ барабардир). Бу көстэрир ки, (10) функциясэ $x = 0$ нөгтэснийн хэр бир атрафында гүвэт сырсына (Те'лор сырсына) а'рылмыр, *жэ'ни аналитик де'жилдир.*

§ 6. ФУНКЦИЈАЛАРЫН ТЕ'ЛОР СЫРАСЫНА А'РЫЛА БИЛМЭСИ ШӨРТЛӨРИ

Тутаг ки, $f(x)$ функциясэ $x = a$ нөгтэснийн мүүжэн атрафында тэ'ийн олуи-мушдур ээ хэмин нөгтэдэ истэнилэн тэртибдэн тэрэмэси вар. Онда $f(x)$ функциясэ үчүн $x = a$ нөгтэснийндэ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (1)$$

Те'лор сырсыны *жэ'нылмыш* олар. (1) сырсынын *жыгалаан* ээ *жэ'нылмыш*

дағылан олмасы, жығылап олдугда исә онун чәминин $f(x)$ функцијасына барабар олмасы наггында әввалчәдән һеч нә дәмәк олмаз. Буна көрә дә (1) сырасынын $f(x)$ функцијасынын Тејлор сырасы олмасыны

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (2)$$

кини јазырлар (\sim ујгунауг ишарәсидир).

Хүсуси һалда, (1) сырасы $f(x)$ функцијасына жығылап олдугда (2) мүнәсибәтиндә \sim (ујгунлуғ) ишарәси вәзинә = (барабарлиқ) ишарәси јазылып. Бу һалда, дејирләр ки, $f(x)$ функцијасы Тејлор (вә ја гүввәт) сырасына ајрылып (§ 1).

Белә бир суал гаршыја чыхыр: $f(x)$ функцијасынын Тејлор сырасы нә заман онун өзүнә жығылып? Бу мәсәләни тәдгиг етмәк үчүн $f(x)$ функцијасынын $(x-a)$ фәргинин гүввәтләринә көрә јазылыпш Тејлор дүстуруна баһар (XVI, § 5):

$$f(x) = \sum_{n=0}^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n(x). \quad (3)$$

Бурада

$$S_n(x) = \sum_{n=0}^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (4)$$

чохһадлиси $f(x)$ функцијасынын n -дәрәжәли Тејлор чохһадлиси, $R_n(x)$ исә Тејлор дүстурунун галыг һәдди адланыр. (4) чәми ејни заманда (1) Тејлор сырасынын n -чи хүсуси чәмидир. (3) дүстурунун

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x) \quad (5)$$

вә ја

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

кини јаздыгда ашағыдакы теорем алыныр:

Теорем 1. $f(x)$ функцијасынын $(a-R, a+R)$ интервалында (1) Тејлор сырасына ајрылмасы үчүн һәмин интервалда онун истәнилән тәртиблии тәрәжәсинин олмасы вә (3) Тејлор дүстуру галыг һәддинин x -ин $(a-R, a+R)$ интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (6)$$

барабарлијини өдәмәси вәрури вә кафи шәртдир.

Бу теоремин шәртләрини јохламағ бәзәк чәтин олур. Белә һалларда функцијанын гүввәт сырасына ајрылмасыны ашағыдакы кафи шәртә әсасән мүәјјән етмәк олар.

Теорем 2. Тунат ки, $f(x)$ функцијасынын $(a-R, a+R)$ интервалында истәнилән тәртиблии тәрәжәси бар вә бу тәрәжәләрин һалысы һәмин интервалда мүнәсәләл мәнәуебуур, јәни x -ин $(a-R, a+R)$ интер-

валындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$|f^{(k)}(x)| < M \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

бара бәрәсәлији өдәнилип. Онда $f(x)$ функцијасы һәмин интервалда Тејлор сырасына ајрылып:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \quad (8)$$

Исбатш. (8) барабарлијини доғрулуғуна ийнанмағ үчүн-
х-ин $(a-R, a+R)$ интервалында јерләшән бүтүн гијмәтлә-
риндә (6) мүнәсибәтинин өдәниллијини кәстәрмәк кишәләтдир.

(3) Тејлор дүстурунун галыг һәддини Лагранж шәклиндә (XVI, § 5) кәтүрәк:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a, x),$$

(7) барабәрсизлијинә көрә

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} < M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (9)$$

олар. Китабын II һиссәсиндә (XVI, § 6) һәр бир тејл олунмуш x үчүн

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

барабарлијини доғрулуғу исбат олунмушдур. Онда (9) бара-
бәрсизлијинә әсасән һәр бир $x \in (a-R, a+R)$ үчүн

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

олар. Теорем исбат олунду.]

§ 6. ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЈАЛАРЫН ТЕЈЛОР СЫРАСЫНА АЈРЫЛМАСЫ

Әввалки параграфда исбат едилмиш теоремләрн тәтбиг едә-
рәк бир сыра элементар функцијалары Тејлор сырасына ајыр-
мағ олар.

1. $f(x) = e^x$. Бу функција үчүн

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x$$

олдугундан x -ин $(-R, R)$ интервалында јерләшән бүтүн ги-
мәтләриндә

$$|f^{(k)}(x)| = |e^x| < e^2 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

барабәрсизлији өдәниләр. Демәли, e^x функцијасы үчүн 2-чи
теоремин (§ 5) шәртләри өдәнилип. Јәни һәмин функција истә-
нилән сонлу интервалда (буна көрә дә бүтүн әдәд олунда)

Тејлор сырасына ($a=0$) ажрылып, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ олдугундан e^x функцијасынын Тејлор ажрылышы

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

шаклинде олар.

II. $f(x) = \sin x$. Бу функција үчүн

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x).$$

Тејлор дүстурунун ва x -ин бүтүн гијметләринде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

барабарлијинин доғрулуғу әвәәләр (XVI, § 6) исбат едилмиш-дир. Демәли, $\sin x$ функцијасы бүтүн әдәд охунда

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2)$$

Тејлор сырасына ажрылып.

III. $f(x) = \cos x$ функцијасы үчүн

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x)$$

Тејлор дүстуру ва x -ин бүтүн гијметләринде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

барабарлијинин доғрулуғу әвәәлдән (XVI, § 6) мә'лумдур. Бу-радан һәмин функција үчүн

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (3)$$

ажрылышы алыныр.

IV. $f(x) = (1+x)^a$. Бу һалда

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$$

олдугундан Тејлор дүстуру ($a=0$ һалына бахырыг)

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + R_n(x) \quad (4)$$

шаклинде элар. Галыг һәддини Коши шаклинде (XVI, § 5) көтүрәк

$$R_n(x) = \frac{a(a-1)\dots(a-n)(1+\theta x)^{a-n-1}}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} = \\ = a_n(x) \cdot \beta_n(x) \cdot \gamma_n(x), \quad 0 < \theta = \theta(x, n) < 1. \quad (5)$$

Бурада ашағыдакы ишарәләрдән истифадә олунур:

$$a_n(x) = \frac{(a-1)(a-2)\dots(a-n)(1-\theta)^{n-1}}{n!} x^n,$$

$$\beta_n(x) = ax(1+\theta x)^{a-1}, \quad \gamma_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Индик көстәрәк ки, x -ин $(-1, 1)$ интервалында јерләшән бүтүн гијметләринде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (6)$$

барабарлији өдәнилып. Бу мәсәдлә биномкәл сыра адланан

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n \quad (7)$$

сырасынын јығылма областыны тәдгиг едәк. (7) сырасы үчүн $C_n = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$ олдугундан онун јығылма радиусу

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{a-n} \right| = 1$$

олар (§ 1), јә'ни (7) сырасы x -ин $|x| < 1$ гијметләринде мүт-ләг јығылып, $|x| > 1$ гијметләринде исә дағылып. Јығылан сыранын үмуми һәддинин лимити сыфра барабардир (сыранын јығылан олмасы үчүн зарури шәрт). Буна көрә дә (7) сыра-сында a әвәәзинә $a-1$ јаздыгда алынан сыранын үмуми һәдиз олаң $a_n(x)$ ифадәсинин x -ин $|x| < 1$ гијметләринде лимити сыфра барабар олар:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = 0, \quad |x| < 1.$$

x -ин $-1 < x < 1$ гијметләринде $1-|x| < 1+\theta x < 1+|x|$ олмасындан ајдындыр ки, $|\beta_n(x)|$ кәмијәти n -дән асылы олмајан

$$|ax|(1-|x|)^{a-1} \quad \text{вә} \quad |ax|(1+|x|)^{a-1}$$

кәмијәтләри арасында јерләшип, јә'ни x -ин $|x| < 1$ гијмет-ләринде $|\beta_n(x)|$ кәмијәти n -ә нәзәрән мәһдуддур.

Бундан башга x -ин $|x| < 1$ гијметләринде

$$|\gamma_n(x)| = \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right| < \left| \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} \right| < 1$$

барабарсизлији дә доғрудур.

Беләликлә, $a_n(x)$, $\beta_n(x)$ вә $\gamma_n(x)$ кәмијәтләри һағындә дедикләркиндән (6) мүнәсибәти алыныр.

Бу көстәрик ки, $(1+x)^a$ функцијасы $(-1, 1)$ интервалында Тејлор сырасына ажрылып:

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n. \quad (8)$$

Хүсуси халдад $x = -1$ олдугда (8) барабарлижиндан

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (9)$$

а)рылышы, $x = \frac{1}{2}$ олдугда нсэ

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots \quad (10)$$

а)рылышы блыныр.

VI. $f(x) = \ln(1+x)$.

Жыгылма интервалы $(-1, 1)$ олан (9) гүвөт сырасыны $[0, x]$ ($|x| < 1$) парчасы үзрә һәдбәһәд интегралласаг.

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right] dx$$

вэ ја

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (11)$$

а)рылышыны аларыг. Лејбнис теореминә көрә (XXXV, § 4) (11) сырасы $x = 1$ нөгтәсиндә жыгылыр. Буна көрә дә онун

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

чәми $[0, 1]$ парчасында кәсилмәјән функциядыр (§ 2, гејд 2) $f(x) = \ln(1+x)$ функцијасы да $[0, 1]$ парчасында кәсилмәјән дир вә $[0, 1]$ интервалында $S(x)$ илә үст-үстә дүшүр. Демәли-

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S(1) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \end{aligned}$$

вэ ја

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

VI. $\operatorname{sh} x$ вә $\operatorname{ch} x$. (1) сырасы илә һәмми сырадан алыннан

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

сырасыны толлајыб, сонра да чырмагла

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (12)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (13)$$

а)рылышларыны алмаг олар.

VII. Ејлер дүстуру. Тәрифе көрә хараги үстү e^x естү функцијасы ашагидакы сыра илә тәјин олунур

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \quad (14)$$

Онда $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, ... вә с. олдуғуну нәзәрә алсаг, (14) барабарлијини

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \end{aligned}$$

кии жамаг олар. Саг тәрәфдәки мәтәризаләрин ичәрасиндәки сыраларыны чамдәри (12) вә (13) дүстүрларына асасин), ујуғун оларат $\cos x$ вә $\sin x$ функцијаларына барабар олдуғундан

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (15)$$

ејилији алынар. Буна Ејлер дүстуру дејилнр.

VIII. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ функцијасы үчүн

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad -1 < x < 1 \quad (16)$$

а)рылышы доғрудур. Буну алмаг үчүн жыгылма интервалы $(-1, 1)$ олан.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

гүвөт сырасыны $[0, x]$ парчасы ($|x| < 1$) үзрә һәдбәһәд интегралламаг ләзымдыр:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

§ 7. ИНТЕГРАЛЛАРЫН ВӘ ФУНКЦИЈА ГИЈМӘТЛӘРИНИН СЫРА ВАСИТӘСИЛӘ ҺЕСАБЛАҢМАСЫ

Елә интеграллар вардыр ки, онлар элементар функцијаларла сонлу шәкилдә ифадә едилә билмир (XVI § 7). Елә интеграллары сырлар вәситәсилә һесабламаг бәзән мүмкүн олур. Буну ики мисал үзәриндә нәһ едәк.

I. Тутаг ки,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

интегралыны һесабламаг ләзымдыр. Интегралатты функцијаны гүвөт сырасына ајырмаг үчүн

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

а)рылышындан истифадә едәк.

Бурадан x -ин бүтүн ги́мәтләриндә йығылан

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right) \Big|_{x=0} = 1$$

ајрылышы алыныр. Ону (1) интегралы алтында язараг, һәд-бәһәд интегралладыгда (1) интегралынын ги́мәти тапылыр:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad (2)$$

(2) сырасы ишарәсини нөвбә илә дәјишән сырадыр. Онын чәмини хусуси чәмләри илә әвәз етдикдә алынған хәтәни асанлыгга ги́мәтләндирмәк олур (XXXV, § 4). Мәсәлән, $a=2$ олдугда алынған $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$ интегралынын 0,01 дәгиглији илә ги́мәти

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \approx 2 - \frac{8}{3 \cdot 3!} + \frac{32}{5 \cdot 5!} = 1,61$$

олар.

II. $\int e^{-x^2} dx$ интегралыны һесабламаг үчүн интегралалты функ-сијаны

$$f^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

ајрылышындан (§ 6, (1)) истифада едәрәк гүвәт сырасына ајырмаг ләзымдыр:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

x -ин бүтүн ги́мәтләриндә йығылан бу ајрылышы интеграл алтында јаздыгда

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{(2n+1)n!} \quad (3)$$

бәрәбәрлији алыныр. Бу ајрылышдан истифада едәрәк кхти-јари a үчүн верилмиш интегралы истәнилән дәгигликлә һесаб-ламаг олар.

Хусуси һалда, $a=1$ олдугда

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$

алыныр. Бу интегралы 0,01 дәгиглији илә ги́мәти

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0,75$$

Гүвәт сыраларындан истифада едәрәк бир сыра функција-ларын ги́мәтләрини мұәјјән дәгигликлә һесабламаг олар. Мәсәлән, $\sin x$ функцијасынын

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

гүвәт сырасына ајрылышындан (§ 6) истифада едәрәк, онун мұәјјән нөггәләрдә ги́мәтини тәләб едилән дәгигликлә һесаб-ламаг мүмкүнлүр. $\sin x$ функцијасынын $x=1$ нөггәсиндә 0,01 дәгигликлә ги́мәти

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0,84$$

олар. Сыраның дәрәд һәддини көтүрдүкдә иәә онун ги́мәти

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{4241}{5040} \approx 0,841$$

кими тапылыр. Бу заман бурахылан хәтә

$$\frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} + \dots < \frac{1}{9!} = \frac{1}{362880}$$

олар. Әвәлки параграфда алдығымыз

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{вә} \quad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ајрылышларында $x=1$ (бу нөггәдә сыраларын икиси дә йығы-лыр) көтүрдүкдә

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

бәрәбәрликләри алыныр. Бу бәрәбәрликләрдән истифада едәрәк e вә π әдәдләрини ги́мәтләрини истәнилән дәгигликлә һесабламаг олар:

$$e = 2,7182818 \dots, \quad \pi = 3,1415926 \dots$$

Биномнал сырадан (§ 6)

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} x^n$$

истифада едәрәк, көкләрин ги́мәтини мұәјјән дәгигликлә һесаб-ламаг олар. Мәсәлән,

$$\sqrt[7]{2} = \sqrt[7]{\frac{2 \cdot 25}{25 \cdot 49}} = \frac{7}{5} \sqrt[7]{\frac{50}{49}} = \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{49} \right)^{\frac{1}{7}} =$$

$$= \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{100^2} + \dots \right) = 1,41421356, \dots$$

$$\sqrt[3]{10} = 2 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{4}} = 2 \left(1 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{3}} = 2 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \dots \right]$$

Эдәдләрнең логарифмләре

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, |x| < 1 \quad (4)$$

вә

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, |x| < 1 \quad (5)$$

аҗрылышларындан алынган

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad (6)$$

бәрабәрлиҗи вәситәсизлә һесабланыр. (6) сырасы (4) вә (5) сыраларына нисбәтән сүрәтлә яңгылыр. (6) бәрабәрлиҗиндә $x = \frac{1}{3}$ көтүрсәк,

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right) \approx 0,693146.$$

Бу җаҗда илә тригонометрик, логарифмик вә б функцияларның гыҗмәтләре чәдвәли тәртиб едиләр. Децикләримиздә аҗдылдыр ки, гүвәт сыраларындан мұхтәлиф тәҗриби һесабламаларда, мұәҗән интегралларның һесабланмасында вә башга мәсәләләрин һәллиндә кениш истифадә олунар.

§ 8. ГҮВВӘТ СЫРАЛАРЫНЫҢ КӨМӘҢИ ИЛӘ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТӘНЛИКЛӘРИН ҺӘЛЛИ

Едә дифференциал тәнликләр аардыр ки, онларын һәлли елементар функцияларла ифатә олунамур вә буна көрә дә, әксәр һәлләрдә квадратураҗа кәтирилмир. Мәсәлән, бирдән бөҗүк тәртибли дәҗишәи әмсаллы хәтти дифференциал тәнликләрин һәлли, үмүмиҗәтлә, квадратураҗа кәтирилимир.

Белә тәнликләрин һәллини бә'зән гүвәт сырасы шәклиндә көстәрмәк илә мүнәсиб олуыр. Бу заман гүвәт сырасының сонла сәҗдә һәлләрини чәмини дифференциал тәнлиҗин тәҗриби һәлли кими дә кө үтмәк олар.

Һәллини гүвәт сырасы шәклиндә көстәрилмәси методу хәтти дифференциал тәнликләре даһа җахшы тәтбиг олунар.

Тутар ки, дәҗишәи әмсаллы

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

хәтти дифференциал тәнлиҗиниң верилимиш $p_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$)

әмсаллары вә $f(x)$ сәҗ тәрафи $x = a$ нөггәсиниң мәҗҗән әтрафында гүвәт сырасына аҗрылыр. Онда һәмин тәнлиҗин һәллини $x = a$ фәргини гүвәтләринә көрә җаһылимиш гүвәт сырасы шәклиндә ахтармаҗ олар. Бурада ашагыдакы ики үсүл нәзәрән кечирилир.

1. Тутар ки, (1) тәнлиҗиниң $(a, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ башлангыч шәртләрини өдәҗән, җәҗки

$$\varphi(a) = y_0, \varphi'(a) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)} \quad (2)$$

бәрабәрликләрини өдәҗән $y = \varphi(x)$ һәллини тапмаҗ лаһымдыр. Бу һәлли

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{1!} \varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \varphi''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \varphi^{(n)}(a) + \dots \quad (3)$$

Тәҗләр сырасы шәклиндә ахтарар. (3) сырасыны тапмаҗ үчүн онун әмсалларыны, җәҗки $y = \varphi(x)$ һәллиниң вә онун бүтүн төрәмәләриниң $x = a$ нөггәсиндә гыҗмәтләрини тәҗиң етмәк лаһымдыр. Бунарын л дәнәки (2) башлангыч шәртләриндә верилир, җердә галандары нсә (1) тәнлиҗи вәситәсизлә (2) шәртләринә әсәсән тапылыр. $\varphi^{(n)}(a) = y_0^{(n)}(a)$ төрәмәсини тапмаҗ үчүн (1) тәнлиҗиндә x әвәзинә a әдәдини җәҗмаҗ, $y, y', \dots, y_0^{(n-1)}$ -ни $x = a$ нә тәсиндә гыҗмәтләри оларар. (2) башлангыч шәртләрини көтүрмәк вә алынган бәрабәрлиҗи $y^{(n)}(a) = y_0^{(n)}(a)$ нәзәрән һәллә етмәк лаһымдыр.

Сонра, $y^{(n+1)}(a)$ төрәмәсини тапмаҗ үчүн (1) тәнлиҗиниң һәр ики тәрафиндән x дәҗишәинә нәзәрән төрәмә алымыр:

$$y^{(n+1)} + p_1(x)y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y' + p_{n+1}(x)y = f'(x).$$

Бу бәрабәрликдә x әвәзинә a әдәдини, $y, y', \dots, y_0^{(n)}$ кәмиҗәтләри әвәзинә нсә онларын мә'лум гыҗмәтләрини җәҗариг, алынган бәрабәрлиҗи $y^{(n+1)}(a)$ -җә нәзәрән һәллә етмәк олар. Бурадан $y^{(n+1)}(a) = \varphi^{(n+1)}(a)$ төрәмәси тапылыр.

Көстәрилән җаҗда илә $y = \varphi(x)$ функциясының бүтүн

$$\varphi^{(0)}(a), \varphi^{(1)}(a), \varphi^{(2)}(a), \dots$$

төрәмәләри вә беләликлә дә (1) тәнлиҗиниң (3) шәклиндә һәлли тапылыр.

Ғәҗд. Шәрһ олуған үсүл җүксәнтәртибли төрәмәҗә нәзәрән һәллә олуныуш

$$y^{(n)} = P(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

шәклиндә дифференциал тәнлиҗин һәллини тапмаҗ үчүн дә тәтбиг олуна биләр.

Мисал 1.

$$y' - xy = 1 \quad (4)$$

$$\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0 \quad (5)$$

башлангыч шартларини өдәјән $y = \varphi(x)$ һәллини тапмады. Бу һәлли (3) Тејлор сырасы шәклиндә тапмаг үчүн $\varphi''(0), \varphi'''(0), \dots$ төрәмәларини тапмаг لازمдыр ($\varphi(0)$ вә $\varphi'(0)$ кәмијәтләри (5) шәргиндә верилмишдир). (4) бәрабәрлијиндә x әвәзинә $x = 0$ јазсаг вә $y(0) = \varphi(0) = 0, y'(0) = \varphi'(0) = 0$ олдуғуну нәзәр әлсаг

$$y''(0) = 1 + 0 \cdot y(0) = 1$$

олар. Инди (4) бәрабәрлијини ардычыл дифференсалајаг:

$$y''' - xy' - y = 0,$$

$$y^{(iv)} - xy'' - 2y' = 0,$$

$$y^{(v)} - xy''' - 3y'' = 0,$$

Бу бәрабәрликләрдә x әвәзинә 0 әдәдини јазараг,
 $\varphi(0) = y(0) = 0, \varphi'(0) = y'(0) = 0, \varphi''(0) = y''(0) = 1,$
 олдуғуну нәзәр әлсаг, онда ардычыл олараг тапарыг:
 $y''(0) = \varphi''(0) = 0, \varphi^{(iv)}(0) = 0, \varphi^{(vi)}(0) = 3,$
 $\varphi^{(viii)}(0) = 0, \varphi^{(x)}(0) = 0, \varphi^{(xii)}(0) = 3 \cdot 6, \dots$
 Үмумијәтлә,
 $\varphi^{(2n+2)}(0) = 3 \cdot 6 \cdot 9 \dots (3n-3) \cdot 3n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$

Јердә галаң төрәмәләр исә сыфра бәрабәрдир. Бу гијмәтләри (3) бәрабәрлијиндә јазмагла (4) тәнлијинин ахтарылан һәллини ашағыдакы шәкилдә тапырыг:

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^6}{6!} + \frac{3 \cdot 6 \cdot x^9}{9!} + \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot x^{12}}{12!} + \dots \quad (6)$$

(6) сырасы x -ни бүтүн гијмәтләриндә јығылдыр.
 II. (1) тәнлијинин һәллини гејри-мәјјән әмсаллы

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (7)$$

гүввәт сырасы шәклиндә дә ахтармаг олар. Бу мәғсәлдә y -ни (7) шәклиндә ифадәсини вә төрәмәләрини һәмин бәрабәрликдән тапылмыш гијмәтләрини (1) тәнлијиндә јеринә јазырлар. Тәнлијин $p_n(x) \quad (n=1, 2, \dots, n)$ әмсалларынн вә $f(x)$ сәг төрәтин дә гүввәт сырасына ајырырлар. Гүввәт сыралары үзәриндә لازمк әмәлијәтләр апарылдыгдан сонра намәлум әмсаллар дихил олан ики гүввәт сырасынын бәрабәрлији алыныр. Гүввәт сыраларынн бәрабәр олмасы үчүн исә x -ни ејни дәрәҗәли гүввәтләрини әмсалларын бәрабәр олмалыдыр. Беләликлә, ахтарылан намәлум $a_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$ әмсалларынн тапмаг үчүн сонсуз хәтти тәнликләр системи алыныр. Бу

әмсалларын биринчи n дәнәси ихтијари сәхләншылыр. Јердә галаңларын исә онлар васитәсилә ифадә олунур. Нәтиҗәдә (1) тәнлијинин n сәјдә ихтијари сәбитдән (сәхләншымыш n әмсалдан) асылы олан һәлли алыныр. Бу, тәнлијин үмуми һәллидир. Башлангыч шәртләр верилдикдә сәхләншымыш n ихтијари әмсал яки гәјдә илә тәјин едилдир.

Мисал 2.

$$y'' - xy = 0 \quad (8)$$

тәнлијинин һәллини (7) гүввәт сырасы шәклиндә ахтараг. Бу мәғсәлдә (8) тәнлијиндә y әвәзинә (7) ифадәсини јазар.

$$(2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots) - (a_0x + a_1x^2 + \dots) = 0.$$

Бурадан

$$\begin{aligned} x^0 & \begin{cases} 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 0, \\ 3 \cdot 2 \cdot a_3 - a_0 = 0, \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 - a_1 = 0, \\ 5 \cdot 4 \cdot a_5 - a_2 = 0, \\ \dots \end{cases} \\ x^k & \begin{cases} (k+2)(k+1)a_{k+2} - a_k = 0, \\ \dots \end{cases} \end{aligned}$$

сонсуз хәтти тәнликләр системи алыныр. Онын һәлли беләдир:

$$a_{2k} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (2k-1) \cdot 2k} a_0,$$

$$a_{2k+1} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3k \cdot (3k+1)} a_1,$$

$$a_{2k+2} = 0.$$

Бурада a_0 вә a_1 ихтијари әмсаллардыр. Бу гијмәтләри (7) бәрабәрлијиндә нәзәр алдыгда (8) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_0 x^{2k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (2k-1) \cdot 2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 x^{2k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3k \cdot (3k+1)} = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

кими алыныр. $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ хусуси һәлләрини тәјин едән гүввәт сыралары x -ни бүтүн гијмәтләркидә јығылдыр (јохлә!).

Хусуси һалда, (8) тәнлијинин

$$y(0) = a_0 = 1, y'(0) = a_1 = 0$$

башлангыч шәртләрини өдәјән һәлли $y = y_1(x)$ олар.

§ 9. БЕССЕЛ ТӘНЛИЈИ

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (1)$$

шәкиндә дифференсвал тәнлијә Бессел тәнлији дегилдир. Бурада сәбит ν әдәди параметрдир вә тәнлијин индекси едәлинир.

Бессель тэнлигн бир чох физики, техники ва рифази масала-
ларин халлинда кениш татбиғ едиллр.

Эмсаллар сабит олмаган (1) тэнлигинин халлини умуми-
лашмиш гувват сырасы шаклида, жа'ни

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} \quad (2)$$

шаклида ахтариаг лазимдыр (r нар хансы сабит ададдир).
Бунин сабаби одур ки, $x = 0$ нэгтгеси тэнлигини махсуси нэгтгесидир. Бурада r адади халэллик мўйўн олмадыгындан a_0 эмса-
лынн сыфырдан фаргли ҳесаб етмак олар.

(2) ифадасини ва

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2}$$

төрэмаларини (1) тэнлигинда јеринда јазар:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1} + \\ + (x^2 - \nu^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0.$$

Бу барабарлигин нар ики тарафини x' вуругуна бөлсак ва
хадлари группашдырар

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(r+k)^2 - \nu^2] a_k x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k+2} = 0. \quad (3)$$

барабарлиги алынар. x -ин мухталиф гувватларинин эмсалларынн
сыфра барабар ҳесаб едак:

$$\begin{aligned} x^0 & [(r^2 - \nu^2) a_0 = 0 \\ x^1 & [(r+1)^2 - \nu^2] a_1 = 0 \\ x^k & [(r+k)^2 - \nu^2] a_k + a_{k-2} = 0, k \geq 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Бурадан $a_0 \neq 0$ олдуғундан $r_1 = \nu$ ва $r_2 = -\nu$ алынар.

Эвалла $r_1 = \nu > 0$ көкүнә угуғун олар халли тапар. (4) бара-
барликларинин икинчисиндан

$[(\nu+1)^2 - \nu^2] a_1 = 0$, $(2\nu+1) a_1 = 0$, $a_1 = 0$
алынар. (4) барабарликларинин учунчүсүнә көрә

$$a_k = - \frac{a_{k-2}}{(r+k)^2 - \nu^2}, k \geq 2$$

ва k -нын чүт ва так адад олмасындан асылы оларар

$$a_{2k+1} = - \frac{a_{2k-1}}{(2k+1)(2\nu+2k+1)}, \quad (5)$$

$$a_{2k} = - \frac{a_{2k-2}}{2k(2\nu+2k)} = - \frac{a_{2k-2}}{2^2 k(\nu+k)} \quad (6)$$

олар. $a_1 = 0$ олдуғундан $a_{2k+1} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ва

$$a_2 = - \frac{a_0}{2^2 (\nu+1)}, \quad a_4 = - \frac{a_0}{2^4 2! (\nu+1)(\nu+2)}, \dots \\ a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k! (\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+k)} \quad (7)$$

мунасибатлари алынар. Эмсаллар учун таплыммыз бу гијмәт-
лари (2) барабарлигинда јеринда јазарар, $r_1 = \nu$ олдуғузу нәзарә
алсар

$$y_1 = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k! (\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+k)} x^{2k}. \quad (8)$$

Бу сыра Даламбер аламатинә әсасән x -ни бүтүн халлиги гиј-
мәтләринда јығыландыр. (8) сырасы илә тәјин олунан функ-
сија (1) тэнлигинин хусуси халлидир. Бу функција a_0 сабити-
нин мўйўн сечилимиш гијмәтинда *биринчи нөв + тәртибли*
ва *ја + индексли Бессел функцијасы* адланыр ва $I_\nu(x)$ илә
ишарә олунур. Бессел функцијасына бәјән *биринчи нөв си-*
линдрик функција да дејиллр.

Ејни гәјд илә (1) тэнлигинин $r_2 = -\nu$ көкүнә халли
ни да гурмар олар. Бу халда (4) барабарликларинин учунчү-
сүндән чүт индексли a_k эмсалларынн тапмыла билмәси учун

$$(r_2+2k)^2 - \nu^2 \neq 0, r_2+2k \neq \nu(-r_1), r_1-r_2 \neq 2k$$

шәрти едәнилмәлидир. $r_1 = \nu$ ва $r_2 = -\nu$ олдуғундан $r_1-r_2=2\nu$
олар. Демәли, ν адади гәм олмадыкта икинчи хусуси халли
тапмар олар. Бу халда (8) барабарлигинда ν әвәзинә $-\nu$ јазмар-
ла алынар:

$$y_2 = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k! (-\nu+1)(-\nu+2) \dots (-\nu+k)} x^{2k}. \quad (9)$$

Бу халдан a_0 сабитиinin сечилимиш мўйўн гијмәтинда алы-
нан функцијаја *биринчи нөв $-\nu$ индексли Бессел функцијасы*
дејиллр ва $I_{-\nu}(x)$ илә ишарә олунур.

ν адади гәм олмадыкта (8) ва (9) ајрылышларинда x -ни
мухталиф гувватлари иштирак елар. Буна көрә да ν адади гәм
олмадыкта $I_\nu(x)$ ва $I_{-\nu}(x)$ функцијалары (1) тэнлигинин хал-
ли асылы олмайн халларидир. Бу халда һәмин тәһарәт умуми
халли

$$y = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x) \quad (10)$$

шаклида олар.

Бурада бир хусуси халли да гәјд етәк. (1) тэнлигинин $\nu = \frac{1}{2}$
олдуғда хусуси халлари

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

Бессел функцијалары, үмуми һалли исә

$$y = C_1 I_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 I_{-\frac{1}{2}}(x)$$

ифадәси олар.

Инди, фәрз едик ки, ν там мүсбәт әдәддир. Бу һалда (1) тәңлијинин бир хүсуси һалли јенә дә (8) барабарлији илә тәјин олунар, (9) барабарлијинин бир сыра һәдләринин махрами исә сыфра чәвиләр. Буна көрә дә Бессел тәңлијинин икинчи хүсуси һалли (9) барабарлији илә тәјин олунә билмәз.

Бесселин $I_\nu(x)$ функцијасы a_n -ни $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ гһимәтиндә ν там мүсбәт әдәд олдуғда (8) барабарлији илә тәјин олунур:

$$I_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k! (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)} x^{2k} \quad (11)$$

Бу барабарлији

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (\nu+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (12)$$

кими дә јазмағ олар.

Хүсуси һалда, $\nu=0$ олдуғда алынак

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (13)$$

тәңлијинин бир хүсуси һалли олан биринчи нөв сыфыр тәртибли Бессел функцијасы

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (14)$$

кими јазылар.

Көстәрмәк олар ки, ν әдәди там олдуғда (1) тәңлијинин икинчи хүсуси һалли

$$Y_\nu(x) = I_\nu(x) \ln x + x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k} \quad (15)$$

шәклиндә ахтарылмағдыр. Бу ифадәни (1) тәңлијиндә јазарағ b_k әмсаллары тәјин едилир.

(15) һалли $x=0$ нөгтәсиндә сонсузлуга чәвилир. Белә тәјин едилмиш $Y_\nu(x)$ функцијасынын мүәјјән сабитлә һәсилине икинчи нөв ν тәртибли Бессел функцијасы дејилр. $I_\nu(x)$ вә $Y_\nu(x)$ функцијалары (1) тәңлијинин хәтти асылы олмајан

һәдләридир. Буна көрә дә ν там әдәд олдуғда (1) тәңлијинин үмуми һалли

$$y = C_1 I_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) \quad (16)$$

шәклиндә олар.

Ајдындыр ки, (1) тәңлијинин $x=0$ нөгтәсиндә сонсуз һәдләрини алмағ үчүн (16) барабарлијиндә $C_2=0$ көтүрүлмәлдир.

§ 10. БЕССЕЛ ФУНКЦИЈАЛАРЫНЫҢ БИР СЫРА ХАССАЛӘРИ

Бессел функцијаларынын бир сыра мүһүм вә марағлы хәссәләри бардыр. Буларый бир нечәсини көстәрәк:

I. Бессел функцијалары арасындағы әлағәни тәјин етмәк үчүн әвәлки параграфын (12)-чи барабарлијиндән алынып

$$x' I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (\nu+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} (\nu > 0)$$

барабарлијини x -ә нәзәрән дифференциаллајағ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x' I_\nu(x)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (\nu+k)!} \frac{(2k+2)2^\nu}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1} = \\ &= x' \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (\nu+k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1} = x' I_{\nu+1}(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Ејни гәјдә илә

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} I_\nu(x)] = -x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) \quad (2)$$

дүстуруну дә алмағ олар. Бу дүстурлары ачығ шәкилдә јазағ:

$$\nu x^{-\nu} I_\nu(x) + x^{-\nu} I'_\nu(x) = x^{-\nu} I_{\nu-1}(x),$$

$$-\nu x^{-\nu-1} I_\nu(x) + x^{-\nu-1} I'_\nu(x) = -x^{-\nu-1} I_{\nu+1}(x).$$

Бу барабарликләрин биричисини $x^{-\nu}$ -јә, икинчисини $x^{-\nu-1}$ -јә кхтисар етдикдән сонра алынған барабарликләри кхсә илә тәрәф-тәрәфә чыхсағ вә топласағ

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x), \quad (3)$$

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x) \quad (4)$$

дүстурлары алынар. Истәнидән там ν әдәди үчүн исбат етилмиш (3) вә (4) дүстурлары ν -нүн истәнидән гһимәтиндә дә доғрудур.

II. Бессел функцијасы үчүн ν -нүн там мәңфи олмајан гһимәтләриндә алынымыш

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (\nu+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (5)$$

көстәрилишиндән (§ 9) ајдындыр ки, $v > 1$ олдугда $I_v(0) = 0$ вә $v > 2$ олдугда $I_v(0) = 0$ олур. Ејни заманда $I_0(0) \neq 0$ вә $I_1(0) \neq 0$.

Буниңла белә, исбат етмәк олар ки, истәвилән $v > 0$ индәсли һәр бир $I_v(x)$ Бессел функцијасынын $(0, +\infty)$ интервалында сонсуз сәлә сыфры вар.

III. λ вә μ әдәлләри $I_v(x)$ ($v > 0$) Бессел функцијасынын мүхтәлиф сыфрылары олдугда

$$\int_0^1 x I_v(\lambda x) I_v(\mu x) dx = 0 \quad (6)$$

бәрәбәрлији доғру олур. Буна Бессел функцијаларынын ортогональлыг хәссәси дејилір.

(6) бәрәбәрлијини исбат етмәк үчүн гејд едәк ки, $y = I_v(x)$ функцијасы

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2) y = 0 \quad (7)$$

Бессел тәнлијини һәлли олдуғундан, истәвилән $\gamma > 0$ әдәди үчүн $y = I_v(\gamma x)$ функцијасы

$$x^2 y'' + xy' + (\gamma^2 x^2 - v^2) y = 0 \quad (8)$$

тәнлијини һәллидир. Онда мүхтәлиф λ вә μ әдәлләри үчүн

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} I_v(\lambda x) + x \frac{d}{dx} I_v(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - v^2) I_v(\lambda x) = 0,$$

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} I_v(\mu x) + x \frac{d}{dx} I_v(\mu x) + (\mu^2 x^2 - v^2) I_v(\mu x) = 0$$

ејниликләри өдәниләр. Бу ејниликләрин биринчисини $I_v(\lambda x)$ -ә икинчисини $I_v(\mu x)$ -ә вуруб, тәрәф-тәрәф чыхдыгда

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \left[I_v(\mu x) \frac{d}{dx} I_v(\lambda x) - I_v(\lambda x) \frac{d}{dx} I_v(\mu x) \right] \right\} =$$

$$= x(\mu^2 - \lambda^2) I_v(\lambda x) I_v(\mu x) \quad (9)$$

ејнилији алыныр. Бу ејниликдә

$$\frac{d}{dx} I_v(\lambda x) = \lambda I_v'(\lambda x) \text{ вә } \frac{d}{dx} I_v(\mu x) = \mu I_v'(\mu x)$$

олдуғуну нәзәрә алаг вә ону $[0, 1]$ парчасы үзрә интеграллајаг:

$$(\mu^2 - \lambda^2) \int_0^1 x I_v(\lambda x) I_v(\mu x) dx = \lambda I_v'(\lambda) I_v(\mu) - \mu I_v'(\mu) I_v(\lambda). \quad (10)$$

Бурадан $I_v(\lambda) = I_v(\mu) = 0$ ($\lambda \neq \mu$) олдугда (9) бәрәбәрлији алыныр.

IV. Ијди истәвилән λ әдәди үчүн

$$\int_0^1 x [I_v(\lambda x)]^2 dx \quad (11)$$

интегралыны һесаблајаг. Бу мәгсәдлә һәмни интегралы

$$\int_0^1 x [I_v(\lambda x)]^2 dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\lambda x [I_v(x)]^2 dx. \quad (12)$$

шәклиндә јазаг. $y = I_v(x)$ функцијасы (7) тәнлијини һәлли олдуғундан

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2) y = 0, \quad (y = I_v(x))$$

ејнилији доғрудур. Бу ејнилијин һәр икки тәрәфини $2y' - 2I_v(x)$ функцијасына вурмагла

$$2x^2 y'' y' + 2x (y')^2 + 2(x^2 - v^2) y y' = 0$$

ејнилијини вә бурадан

$$2xy^2 = [x^2 (y')^2] + [(x^2 - v^2) y^2] \quad (13)$$

мүнәсибәтәни аларыг. (13) бәрәбәрлијини $[0, \lambda]$ парчасы үзрә интегралласаг

$$2 \int_0^\lambda xy^2 dx = [x^2 (y')^2 + (x^2 - v^2) y^2]_0^\lambda = \lambda^2 [I_v'(\lambda)]^2 + (\lambda^2 - v^2) [I_v(\lambda)]^2$$

олар. Бурадан (12) бәрәбәрлијинә һәсәсәп аларыг:

$$\int_0^1 x [I_v(\lambda x)]^2 dx = \frac{1}{2} \left\{ [I_v'(\lambda)]^2 + \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right) [I_v(\lambda)]^2 \right\}. \quad (14)$$

XXXVIII ФӘСИЛ

ФУРЬЕ СЫРАСЫ

§ 1. ХӘТТИ НОРМАЛАШМЫШ ФӘЗАЛАРЫН ТАМЛЫҒЫ

Тутяг ки, R хәтти нормалашмыш фәзәдир вә онун истәвилән $x \in R$ элементиниң нормасы $\|x\|$ илә ишәрә олунувш φ . Бу фәзаның истәвилән $x \in K$ вә $y \in R$ элементләри арасында φ мәсәфәни

$$\rho(x, y) = \|\varphi x - \varphi y\| \quad (1)$$

кәми тәјин етликдә һәмни фәза метрик фәзасын адым (XXV, § 1). (1) метрикасына R фәзасы нормасы м. до. метрикасы (XXV, § 1). (1) метрикасына R фәзасы нормасы м. до. метрикасы дејиләр. Бедәликлә, һәр бир хәтти нормалашмыш фәза (1) табан метрикасы илә метриклашир. Дејиләр, әгәр $\rho(x, y)$ метрикасы арака ә нәзәрә алырлант φ вә ψ биринчиси φ , јәни истәвилән $x \in R$, $y \in K$ элементләри вә һәсиги ψ әдәди үчүн

$$\rho(x+z, y+z) = \|\varphi(x+z) - \varphi(y+z)\| = \|\varphi x - \varphi y\| = \rho(x, y)$$

$$\rho(\alpha x, \alpha y) = \|\varphi(\alpha x) - \varphi(\alpha y)\| = \|\alpha \varphi x - \alpha \varphi y\| = |\alpha| \|\varphi x - \varphi y\| = |\alpha| \rho(x, y)$$

мүнәсибәтләри өдәниләр.

засынын нормасында $x(t) \in L^{(2)}[a, 1]$ функциясына жыгылмасы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{L^{(2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^1 |x_n(t) - x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

мүнөсбәтинин өдөнүлмөсү демөкдир. Буна ардычыллыгын орта квадратик жыгылмасы дежилир.

Беләликлө, ерни бир хәтти фәзада $([a, b])$ парчасында кәсилмәјән функциялар чохлауғунда (3), (4) вә (5) кими үч мөхтәлиф норма тәјини етдикдә функциялар ардычыллыгынын мүнтәзәм, орта вә квадратик орта жыгылмасы кими мөхтәлиф жыгылма аңлајышлары алыныр.

Мисал 4. n -өлчүлү E_n метрик фәзасында (XXV, § 1) истәнилән $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөгтәсинин нормасы

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

кими тәјини олунур (IV, § 9). Белә алынған хәтти нормалашмыш фәзада ардычыллыгын жыгылмасы ујғун координатлар ардычыллыгы үзрә жыгылмадыр (XXV, § 3).

Тәъриф 2. Хәтти нормалашмыш фәза, норманын доғурдугу метрикаја нәзәрән там метрик фәза олдугда она там фәза дежилир.

Хәтти нормалашмыш там фәзаја Банах¹ фәзасы дежилир. Банах фәзасына бәзән (B) типли фәза да дежилир.

Мисал 5. $E_n (n > 1)$ вә $C[a, b]$ фәзалары Банах фәзаларыдыр. $L_1^{(2)}[a, b]$ вә $L_2^{(2)}[a, b]$ фәзалары там дејилдир.

E_n фәзасынын тамлығы чөхөлчүлү фәзанын нөгтәләр ардычыллыгынын жыгылмасы һаггындакы Коши критерисиндән алыныр (XXV, § 3). $C[a, b]$ фәзасынын тамлығы исә функционал ардычыллыгын бу фәзанын нормасында жыгылмасы мүнтәзәм жыгылма олдугундан вә функционал ардычыллыгын мүнтәзәм жыгылмасы һаггындакы Коши критерисиндән (XXVI, § 4) ајдындыр.

$L^{(2)}[a, b]$ фәзасынын там олмадыгыны көстөрмәк үчүн $L^{(2)}[-1, 1]$ фәзасына бәхмәк кифәјәтдир. $L_1^{(2)}[-1, 1]$ фәзасынын там олмадыгына инәниәг үчүн һәмни фәзада фундаментал олин, ләкин жыгылмајән бир функционал ардычыллыг көстөрмәк ләзымдыр. Бу мәгсәдлә $[-1, 1]$ парчасында кәсилмәјән

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \text{ олдугда} \\ nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \text{ олдугда} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \text{ олдугда} \end{cases} \quad (8)$$

функциялары ардычыллыгына баһаг. (8) функциялары мәһдуддур $|\varphi_n(t)| \leq 1$ вә $L_1^{(2)}[-1, 1]$ фәзасында фундаментал ардычыллыг тәшкил едир:

$$\begin{aligned} \| \varphi_n - \varphi_m \|_{L_1^{(2)}}^2 &= \int_{-1}^1 |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^2 dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^2 dt < \\ < 4 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} dt = \frac{4}{n} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty; m > n). \end{aligned}$$

Ләкин $\{\varphi_n(t)\}$ ардычыллыгы $L_2^{(2)}[-1, 1]$ фәзасынын нормасында һеч бир кәсилмәјән $\varphi(t)$ функциясына, јәни һеч бир $\varphi(t) \in L_2^{(2)}[-1, 1]$ функциясына жыгылмыр. Буна исбат етмәк үчүн һәмни фәзә едәк ки, $\varphi_n(t)$ ардычыллыгы $\varphi(t) \in L_2^{(2)}[-1, 1]$ функциясына жыгылмыр:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{L_2^{(2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-1}^1 |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (9)$$

Онда һәмни $\varphi(t)$ вә

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t < 0 \text{ олдугда} \\ 1, & 0 \leq t \leq 1 \text{ олдугда} \end{cases}$$

функциялары үчүн (6) барабәрсиңлијинә әсәсән

$$\|\varphi - \varphi\|_{L_2^{(2)}}^2 \leq \|\varphi - \varphi_n\|_{L_2^{(2)}}^2 + \|\varphi_n - \varphi\|_{L_2^{(2)}}^2 \quad (10)$$

мүнәсбәти алыныр. Јохламаг олар ки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{L_2^{(2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-1}^1 |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (11)$$

барабәрлији доғрудур. (9) вә (11) барабәрликләрина әсәсән (10) мүнәсбәтиндән

$$\|\varphi - \varphi\|_{L_2^{(2)}}^2 = \int_{-1}^1 |\varphi(t) - \varphi(t)|^2 dt = 0$$

барабәрлији, бурадан исә

$$\int_{-1}^1 |\varphi(t) - \varphi(t)|^2 dt = 0, \quad \int_{-1}^1 |\varphi(t) - \varphi(t)| dt = 0 \quad (12)$$

барабәрликләри алыныр. Чарта кәһә $\varphi(t) = \varphi(t)$ фәргә $[-1, 0]$ вә $[0, 1]$ областларынын һәр бириндә ајрылыда кәсилмәјән

¹ Стефан Банах (1892—1945) мәшһур Польша рижәијәтчысыдыр

функциялардыр. Онда (12) барабарликлариндан һәмин ол-
ластарда

$$\psi(t) - \varphi(t) = 0 \quad (t \in [-1, 0), t \in [0, 1])$$

еңилији алыныр ($f(t) \in C[a, b]$ функциясы үчүн $\int_a^b f(t) dt = 0$
олмасыктан $f(t) = 0, t \in [a, b]$ еңилији алыныр). Бурадан а-
лындыр ки,

$$\lim_{t \rightarrow -0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow -0} \psi(t) \neq \lim_{t \rightarrow +0} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t)$$

олар, я'ни $\varphi(t)$ функциясы $t=0$ нөктәсиндә кәсиләндир. Алы-
нан эиддијәт фәзијәмизки дөғру олмәдығны көстәрир.

Ејин гәјдә илә $L_p^{(r)}[a, b]$ фәзасынын, да там олмәдығны
көстәрмәк олар.

Там олмәјән $L_p^{(r)}[a, b]$ вә $L_p^{(r)}[a, b]$ фәзаларына „јени эле-
ментләр“ алава етмәклә оларны тамамламағ, я'ни там фәза
иәклинә кәтирмәк олар. Бу һалда алынған фәзалары ујғун ола-
рағ $L_1[a, b]$ вә $L_2[a, b]$ илә ишарә едирләр.

Тәғриғ 3. Хәтти нормалашмыш R фәзасынын истәһилән
 $x \in R$ элементинә, һәмин фәза элементләринин M чоғлуғун-
дан R -иә нормасына көрә јығылған $\{x_n\}$ ($x_n \in M$) аручыллығы
пәјызмәғ мүмкүн олдуғда, дејирләр ки, M чоғлуғу R фәза-
сынын сыхдыр (вә ја һәр јердә сыхдыр).

Хәтти нормалашмыш R фәзасында сых олан $\{x_n\}$ ($x_n \in R$)
һесаби чоғлуғу вардырса, оны сепарабел фәза дејилир.

Мисал 6. E_1 фәзасы сепарабел фәзәдыр. Бүтүн расионал
әдәдләр чоғлуғу (һесаби чоғлуғ) E_1 фәзасында сыхдыр (XII, § 1).

Мисал 7. l_p фәзасы сепарабел фәзәдыр. Координатлары
расионал сәһәләр олан бүтүн нөғтәләр чоғлуғу (һесаби чоғ-
луғ) l_p фәзасында сыхдыр (исбат едін).

Мисал 8. Әмсаллары расионал әдәдләр олан бүтүн чәбри
чоғһәдәдләр чоғлуғу һесаби чоғлуғдур вә $C[a, b]$ фәзасында
сыхдыр (исбат едін). Буна көрә дә $C[a, b]$ сепарабел фәзәдыр.

§ 2 $L_p^{(r)}[a, b]$ вә l_p фәзалары

$[a, b]$ парчасында тәјин олунмуш вә мүтләғ гијмәтинин
 p -чи дәрәҗәси ($1 < p < +\infty$) һәмин парчада Риман мәнада инте-
гралланған (үмумијәтлә, гејри-мәхсуси мәнада), я'ни

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty$$

шәртини өдәјән f функциялары чоғлуғуну $L_p^{(r)}[a, b]$ илә ишарә
едәк. Бу фәзада истәһилән $f \in L_p^{(r)}[a, b]$ функциясынын

нормасыны

$$\|f\|_{L_p^{(r)}} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty \quad (1)$$

кичи тәјин едирләр. $L_p^{(r)}[a, b]$ фәзасынын сыхдыр элементи
оларағ

$$\int_a^b |\theta(x)|^p dx = 0 \quad (2)$$

шәртини өдәјән $\theta(x)$ функциясыны көтүрмәк ләзһимдир. $\theta(x) = 0$
функциясы (2) шәртини өдәјир. Ләкин бу шәрти өдәјән баш-
ға функциялар да вардыр (2) барабарлијинин өдәніти ки үчүн
 $\theta(x)$ функциясынын кәсилмәз олдуғу бүтүн нөғтәләрда сыхра
барабар олмәсы, я'ни $\theta(x) = 0$ олмәсы зарури вә кәфи шәрт ир
 $L_p^{(r)}[a, b]$ фәзасынын хәтти нормалашмыш фәза олдуғуну
исбат етмәк үчүн бир нечә көмәкчи тәклиф ләзһимдир.

(ξ, η) мүстәһис үзәриндә јерләшән $\eta = \xi^{p-1}$ вә ја $\xi = \eta^{q-1}$
($pq = q + p$) әјрисини көтүрәк
(шәкил 265). Шәкилдә әјди-
дыр ки, S_1 вә S_2 сәһәләринин
чәми әр һәсиллиндән кичик де-
јилир:

$$S_1 + S_2 > \alpha\beta.$$

Бурадан

$$S_1 = \int_0^{\alpha} \xi^{p-1} d\xi = \frac{\alpha^p}{p}$$

$$\text{вә } S_2 = \int_0^{\beta} \eta^{q-1} d\eta = \frac{\beta^q}{q}$$

олдуғундан

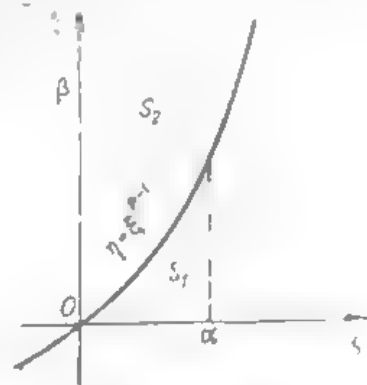
$$\alpha\beta < \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \quad (3)$$

аларығ. Бу барабарсизликлә $\alpha = |f_1(x)| \in l_p^{(r)}[a, b]$ вә
 $|f_2(x)| \in l_q^{(r)}[a, b]$ гәбул едәрәк, алынған мүнәсибәти интег-
ралласағ

$$\int_a^b |f_1(x)f_2(x)| dx < \frac{1}{p} \int_a^b |f_1(x)|^p dx + \frac{1}{q} \int_a^b |f_2(x)|^q dx$$

олар. Сонунчу барабарсизликлә f_1 әвәзинә $\frac{f_2(x)}{\|f_2\|_{L_q^{(r)}}}$ вә

әвәзинә $\frac{f_1(x)}{\|f_1\|_{L_p^{(r)}}}$ көтүрдүклә истәһилән $f \in L_p^{(r)}[a, b]$ вә



Шәкил 265

$\varphi(x) \in L_q^{(R)}[a, b]$ Функциялары үчүн

$$\frac{1}{\|f\|_{L_p^{(R)}} \cdot \|\varphi\|_{L_q^{(R)}}} \int_a^b |f(x) \varphi(x)| dx \leq 1$$

вə я

$$\int_a^b |f(x) \varphi(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |\varphi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4)$$

барабарсизлиги алынар.

(4) барабарсизлигине Гөлдери¹ барабарсизлиги дейлир

Еңи гајда илэ (3) барабарсизлигиндэн $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < +\infty$ в.

$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q < +\infty$ шэртлэрини өдэјән $\{a_k\}$ вэ $\{b_k\}$ ардычылыгы-
лары үчүн Гөлдери башга

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (5)$$

барабарсизлигини алмаг олар.

Тутак ки, $f \in L_p^{(R)}[a, b]$ вэ $\varphi \in L_q^{(R)}[a, b]$ ихтијари функ-
сиялардыр. Онда (4) барабарсизлигине көрө

$$\begin{aligned} \int_a^b |f + \varphi|^p dx &\leq \int_a^b |f + \varphi|^{p-1} |f| dx + \int_a^b |f + \varphi|^{p-1} |\varphi| dx < \\ &< \left(\int_a^b |f + \varphi|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \end{aligned}$$

вə я

$$\left(\int_a^b |f + \varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

олар. Еңи мүнәкимэ илэ (5) барабарсизлигиндэн

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < +\infty$ вэ $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q < +\infty$ шэртлэрини өдэјән ихтијари

¹ О. Л. Гөлдери (1859—1937) алмаг рижинијатчысыдыр.

$\{a_k\}$ вэ $\{b_k\}$ ардычылыгылары үчүн

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (7)$$

барабарсизлигини алмаг олар.

(6) вэ (7) барабарсизликлэринэ Г. Минковский¹ барабарсиз-
ликлэри дейлир.

$L_p^{(R)}[a, b]$ хэтти нормалашыш фэзадыр.

Догрудан да, (1) нормасы үчүн хэтти нормалашыш фэза-
нын 1₀—3₀ аксиомалары (IV, §9) өдэнилир.

1₀. $\|f\|_{L_p^{(R)}} > 0$. $\|f\|_{L_p^{(R)}} = 0$ олдугда $f(x) = 0(x)$ олар.

2₀. Нэгиги λ өдэди үчүн

$$\|\lambda f\|_{L_p^{(R)}} = \left(\int_a^b |\lambda f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_{L_p^{(R)}}.$$

3₀. Истэнилэн $f \in L_p^{(R)}[a, b]$ вэ $\varphi \in L_p^{(R)}[a, b]$ үчүн

$$\|f + \varphi\|_{L_p^{(R)}} \leq \|f\|_{L_p^{(R)}} + \|\varphi\|_{L_p^{(R)}} \quad (8)$$

барабарсизлиги (я'ни (6) барабарсизлиги) догрудур.

$\{f_n\}$ ($f_n \in L_p^{(R)}[a, b]$, $n = 1, 2, \dots$) ардычылыгынын $L_p^{(R)}[a, b]$
фэзасынын нормасында $f \in L_p^{(R)}[a, b]$ функцијасына жыгылмасы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_p^{(R)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \quad (9)$$

барабарлигини өдэнилмэси демәкдир. Буна ардычылыгынын
орта $L_p^{(R)}$ ма'нада f функцијасына жыгылмасы дейлир.

$L_p^{(R)}[a, b]$ сонсуз өдчүлү хэтти нормалашыш сепарабел
фэза олуб, там фэза дейилдир.

l_p илэ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < +\infty$ ($1 < p < +\infty$) шэртини өдэјән $a = (a_1,$

$a_2, \dots, a_n, \dots)$ вэ я $\{a_k\}$ ардычылыгылары чохлагууу ишарэ
едәк. Истэнилэн $a \in l_p$ элементини нормасыны

$$\|a\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (10)$$

кимни тә'јин етдикдә l_p чохлагуу хэтти нормалашыш фэза

¹ Г. Минковский (1864—1909) алмаг физики вэ рижинијатчысыдыр.

чеvрилиз. (10) нормасы үчүн хәтти нормалашмыш фәзә аксиом-ларыннн өдәнилмәсини јохламаг чәтин дејилдир.

Бу фәзанын сыфыр елементи $\theta(x) = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ арды-чыллыгыдыр. I_0 хәтти нормалашмыш сонсуз өлчүлү сепарабел вә там фәзадыр. I_2 фәзасынын там олмасы сонракы параграф-да исбат едилир.

§ 3. ГИЛБЕРТ ФӘЗАСЫ

Һәгиги хәтти фәзаларда норманы бә'зән скалјар һасил вә-ситәсилә тә'јин едирләр.

Һәгиги хәтти фәзада скалјар һасил тә'јин олундугда оңа *Евклид фәзасы* дејилир (IV, § 6). Евклид фәзасынын истәни-ләл x елементинин нормасыны

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (1)$$

кимнн тә'јин етдикдә о, хәтти нормалашмыш фәзаја чеврилir (V, § 9).

Евклид фәзасынын истәнилән x вә y элементләринин (x, y) скалјар һасили үчүн Коши—Бунјаковскинын

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (2)$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Евклид фәзасында чәм, һәгиги әдә-дә вурма вә скалјар һасил кәсилмәјәндир, јә'ни $n \rightarrow \infty$ шәртин-дә $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ ((1) нормасы мә'нада јығылма) вә $\lambda_n \rightarrow \lambda$ (әдәди ардычыллыгын јығылмасы) оларса, онда $n \rightarrow \infty$ шәртиндә

$$x_n + y_n \rightarrow x + y,$$

$$\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x,$$

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \quad (3)$$

мүнәсибәтләри доғрудур. (3) мүнәсибәтләри (2) бәрабәрсизли-јинә әсасән асанлыгла исбат олунур. Мәсәлән, ахырынчы мүнәсибәтин доғрулуғу

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)| \leq$$

$$\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

кимнн исбат олунур. Бурада нормаја көрә јығылан $\{y_n\}$ арды-чыллыгынн мәһдуд олмасындан, јә'ни $\|y_n\| \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$) олмасындан истигәдә едилir.

(1) нормасы вәситәсилә тә'јин олунан

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)} \quad (4)$$

метрикасы скалјар һасилин доғрудугу метрика адыаныр. Бу метрика мә'нада Евклид фәзасы там ола да биләр, олмәја да биләр Сепарабел олмә вә олмәјән Евклид фәзалары да вардыр.

Сонку өлчүлү Евклид фәзалары, һәмјин фәзаларда ортонор-мал базисин варлыгы, элементләрин ортонормал базис үзрә

ајрылышы вә с. мәсәләләр китабын биринчи һиссәсиндә өјрә-тилмишдир. Бурада сонсуз өлчүлү Евклид фәзаларыннн бир-инчә өјрәнилir.

Тә'риф 1. Сонсуз өлчүлү там сепарабел хәтти Евклид фәзасына *Гилберт фәзасы* дејилir.

Бурада ајдындыр ки, H Гилберт фәзасы ашагыдакы ш әрт-ләри (аксиомлары) өдәјән истәнилән тәбиәтлн x, y, z, \dots эле-ментләри чохлағу түр:

I. H Евклид фәзасыдыр (скалјар һасил тә'јин олунмуш хәтти фәзалыр).

II. H фәзасы $\rho(x, y) = \|x - y\|$ метрикасына кәзәрән тамдыр

III. H фәзасы сонсуз өлчүлүдүр, јә'ни истәнилән сонлу сәјлә хәтти асылы олмәјән елементи вар

IV. H сепарабел фәзадыр, јә'ни H фәзасында сых олан һе-саби чохлағу вардыр.

Гилберт фәзасынын элементләри ардычыллыгыннн ити нәя јығылмасындан данышмаг олар: нормаја көрә јығылма вә зәиф јығылма.

$\{x_n\}$ ардычыллыгы ($x_n \in H$) вә $x \in H$ елементи үчүн H фә-засынын нормасында

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0 \quad (5)$$

бәрчәрлији өдәнилдикдә, дејирләр ки, $\{x_n\}$ ардычыллыгы *нор-мәја көрә x элементинә јығылыр*.

Әкәр истәнилән $y \in H$ елементи үчүн

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = (x, y) \quad (6)$$

бәрабәрлији өдәнилизсә, онда дејирләр ки, $\{x_n\}$ ардычыллыгы *x элементинә зәиф јығылыр*. Ардычыллыгын зәиф јығылма-сынн нормаја көрә јығылмасындан јәргәндирмәк үчүн бә'зән ардычыллыгын нормаја көрә јығылмасына оңун күчлү јығыл-масы дејилir.

Гилберт фәзасында элементләрин ортогоналлыгыннн вә эле-ментләрин ортонормал системиндән данышмаг олар.

Гилберт фәзасынын x вә y элементләриннн (x, y) скалјар һасилин сыфра бәрабәр оллугда $(x, y) = 0$, онлара *ортгонал элементләр* дејилir. Ајдындыр ки, фәзанын сыфыр елементи онун истәнилән элементинә ортогоналдыр.

Тутаг ки,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (7)$$

H Гилберт фәзасынын элементләри ардычыллыгыдыр.

(7) ардычыллыгыннн истәнилән акн элементн ортог нәл вә һәр бир элементтинн нормасы вәһидә бәрабәрдирсә, јә'ни

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (8)$$

Давид Гилберт (1872—1943) мәшһур алман ријазәтчысыдыр

мүнәсибәти өдәнилерсә, онда (7) ардычыллыгына H фәзасында ортонормал систем дејилір.

Инди конкрет Гилберт фәзаларына бахаг.

l_2 фәзасы.

Бу фәза әввәлки параграфда тә'јин етдијимиз l_p фәзасындан $p=2$ олдугда хусуси һал кими алыыр. Онуң элементләри һәгиги әдәлләрдән дүзәлмиш елә $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ардычыллыгларыдыр ки, онларын һәр бири үчүн

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \quad (1)$$

шәрти өдәнилир.

Бу чохлауда хәтти әмәлләри ашағыдакы кими тә'јин едиләр: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ вә $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ элементләринин чәми $z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots)$ элементинә, һәгиги λ әдәдинин $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ элементинә һасили исә $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, \dots)$ элементинә дејилір.

Белә тә'јин едилмиш хәтти әмәлләр үчүн хәтти фәза аксиомлары (IV, § 1) өдәнилир. Јә'ни (1) шәртини өдәјән ардычыллыглар хәтти фәза тәшкил едилр. Бу фәзанын сыфыр элементи $\theta = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ олар.

Бахдығымыз чохлауда истәнилән $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ вә $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ элементләринин скалар һасили

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad (2)$$

кими тә'јин олунур. (2) сырасынын јығылан олмасы әввәлки параграфда исбат едилмиш (5) бәрабәрсизлијиндән ајдындыр.

(2) скалар һасили үчүн Евклид фәзасынын аксиомлары өдәнилир (IV, § 6).

l_2 Евклид фәзасында истәнилән $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ элементинин нормасы

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$$

бәрабәрлији илә, метрика исә

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2} \quad (3)$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунур. $(x_k \pm y_k)^2 \leq 2(x_k^2 + y_k^2)$ элементар бәрабәрсизлијиндән ајдындыр ки, истәнилән $x \in l_2$ вә $y \in l_2$ элементләри үчүн (3) сырасы јығылыр. Јә'ни $\rho(x, y)$ метрикасынын мәнасы вар.

Инди көсгәрәк ки, l_2 фәзасы тамдыр. Тутар ки,

$$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots), \quad m=1, 2, \dots \quad (4)$$

ардычыллыгы l_2 фәзасынын фундаментал ардычыллыгыдыр, јә'ни $m \rightarrow \infty$ шәртиндә истәнилән $p=1, 2, \dots$ әдәди үчүн

$$\rho(x^{(m+p)}, x^{(m)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(m+p)} - x_k^{(m)})^2} \rightarrow 0 \quad (5)$$

мүнәсибәти өдәнилир. Онда

$$|x_k^{(m+p)} - x_k^{(m)}| \leq \rho(x^{(m+p)}, x^{(m)}), \quad k=1, 2, \dots$$

бәрабәрсизлијиндән ајдындыр ки, k -нын һәр бир гејд олунмуш гијмәтиндә $\{x_k^{(m)}\} (m=1, 2, \dots)$ ардычыллыгы Коши критерисинин шәртини өдәјир (XXXV, § 2). Јә'ни фундаментал әдәди ардычыллыгыдыр. Буна керә дә һәр бир k үчүн онун сонлу $\lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = x_k$ лимити вар.

(5) мүнәсибәтинә керә истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $N=N(\varepsilon)$ вар ки, m -ин $m > N$ вә $p=1, 2, \dots$ гијмәтләриндә

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(m+p)} - x_k^{(m)})^2} < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији вә буна керә дә истәнилән гејд олунмуш натурал M әдәди үчүн

$$\sum_{k=1}^M (x_k^{(m+p)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Сонунчу бәрабәрсизлијидә $p \rightarrow \infty$ шәртиндә лимитә кечсәк, истәнилән натурал $M=1, 2, \dots$ әдәди үчүн

$$\sum_{k=1}^M (x_k - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2$$

мүнәсибәтини вә бурадан $M \rightarrow +\infty$ шәртиндә

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon, \quad m > N$$

бәрабәрсизлијини аларыр. Бурадан ајдындыр ки, $y^{(m)} = (x_1 - x_1^{(m)}, x_2 - x_2^{(m)}, \dots, x_k - x_k^{(m)}, \dots)$ элементи l_2 фәзасына дахилдир. Онда $x - (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) = x^{(m)} + y^{(m)} (m > N)$ элементи дә l_2 фәзасына дахил олар. Буядан башга, (4) ардычыллыгы l_2 фәзасынын нормасына керә x элементинә јығылыр:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x. \quad (6)$$

Јә'ни l_2 там фәзадыр.

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \\ e_3 &= (0, 0, 1, \dots, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7)$$

элементлери ортонормал систем тәшкил едир.

(7) системинин исгәнилән сонлу сәйда e_1, e_2, \dots, e_n элементләри хәтти асылы дежилдир. Догрудан да,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \quad (8)$$

бәрабәрлији өдәнилдикдә, онун һәр ики тәрәфини, e_k элементинә скалјар олараг аурсаг

$$\lambda_k (e_k, e_k) = 0, \lambda_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

алынар. Демәли, (8) мүнәсибәти анчаг $\lambda_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$ олдугдн өдәнилик, јә'ни e_1, e_2, \dots, e_n элементләри хәтти асылы дежилдир.

I_2 фазасында исгәнилән сонлу сәйда хәтти асылы олмајан элемент олдугундан, о сонсуз өлчүлүдүр.

(7) ардычыллыгынын хәтти комбинасиялары чохлау I_2 фазасында сыхдыр (бу сонра көстәрилик), јә'ни I_2 сепарабел фәзадыр. Дедикләримиздән ајындыр ки, I_2 гилберт фазасыдыр.

$L_2[a, b]$ фазасы

Сонлу $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функцијаларын хәтти нормалашмыш $L_2^{(c)}[a, b]$ фазасынын (§ 1) ики ихтијари $x(t)$ вә $y(t)$ элементинин скалјар һасилини

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt \quad (1)$$

кими тә'јин етдикдә Евклид фазасы алыныр.

(1) скалјар һасилин үчүн Евклид фазасынын 9°—12° аксиомлары (IV, § 6) өдәнилик. (1) скалјар һасили вәситәсклә исгәнилән $x \in L_2^{(c)}[a, b]$ элементинин нормасы

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

кими, ики ихтијари функција арасындагы мәсәфә исә

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

кими тә'јин олуиур.

$L_2^{(c)}[a, b]$ фазасы сонсуз өлчүлүдүр вә сепарабел фәзадыр.

$L_2^{(c)}[a, b]$ фазасынын сонсуз өлчүлү олмасы һәмий фәзада исгәнилән сонлу сәйда хәтти асылы олмајан функцијаларын

варлыгындан алыныр. Белә функцијалар олараг

$$1, t, t^2, \dots, t^n, \dots \quad (3)$$

функцијаларынын исгәнилән сонлу сәйыны көтүрмәк олар.

$L_2^{(c)}[a, b]$ фазасы там дежилдир (§ 1). Јухарыда дедјимиз кими бу фазаны „јени элементләрлә“ тамамламаг олар. Бу һалда алынән $L_2[a, b]$ фазасы гилберт фазасыдыр.

$L_2^{(c)}[a, b]$ фазасыны тамамлама үсулу мурәккәб олдугу үчүн бурада шәрһ едилмир. Бу мәсәләнин там һәлли Лебег¹ интегралы аңлајышы илә баглыдыр. Риман интегралынын үмүмиләшмәси олан Лебег интегралы нәзәријәси бизим курсе дахил дежилдир. Ону һәгиги дәјишәкли функцијалар нәзәријәси курсунда өјрәнирләр.

Бунунла белә, $L_2^{(c)}[a, b]$ фазасынын тамамләнмәси олан там $L_2[a, b]$ фазасына дахил олан функцијаларын бә'зи әләмәтләрини көстәрмәк олар.

$[a, b]$ парчасында тә'јин олуиуш вә квадраты илә Риман мә'нада интегралланан, јә'ни $\int_a^b f^2(t) dt < +\infty$ шәртини өдәјән $f(t)$ функцијасы $L_2[a, b]$ фазасына дахилдир:

$$L_2^{(c)}[a, b] \subset L_2[a, b].$$

$[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функцијалар чохлау $L_2[a, b]$ фазасында сыхдыр, ә'ни һәр бир $f \in L_2[a, b]$ функцијасы үчүн сәлә кәсилмәјән $f_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) функцијалары ардычыллыгы вар ки, орта квадратик мә'нада она јыгылыр, јә'ни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0 \quad (4)$$

мүнәсибәти өдәнилик.

Дедикләримиздән ајындыр ки,

$$L_2^{(c)}[a, b] \subset L_2^{(R)}[a, b] \subset L_2[a, b]$$

мүнәсибәти догрудүр вә $L_2^{(R)}[a, b]$ фазасы (1) скалјар һасили илә Евклид фазасына чеврилик.

$L_2[a, b]$ фазасынын бүтүн әдәд оху үчүн дә үмүмиләшдирик мәк олар. Тутаг ки, $L_2^{(c)}(-\infty, \infty)$ илә бүтүн әдәд охунда кәсилмәјән вә квадраты илә интегралланан, јә'ни $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt < +\infty$

шәртини өдәјән функцијалар чохлау ишәрә едилмишди. Бу фәзада ики ихтијари функцијанын скалјар һасили

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt \quad (5)$$

¹ Анри Лебег (1875—1941) мәшһүр франсыз ријазәтчысыдыр

кими тэ'ийн едилир. (5) гелри-мэхсуси интегралы мутлаг
 жыгыландыр. Догрудан да,

$$|f(t) \varphi(t)| \leq \frac{f^2(t) + \varphi^2(t)}{2}$$

барабэрсизэлижинэ эсасэн

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) \varphi(t)| dt \leq \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t) dt \right) < +\infty$$

олар: $L_2^{(c)}(-\infty, \infty)$ фэзасы там де'илдир.

$L_2^{(c)}(-\infty, \infty)$ фэзасынын тамамланмасы олан там фэзаны
 $L_2(-\infty, \infty)$ илэ ишарэ едирлэр.

$L_2(-\infty, \infty)$ нилберт фэзасыдыр.

§ 4. ОРТОНОРМАЛ СИСТЕМ ҮЗРЭ ФУРЈЕ СЫРАСЫ

Тутаг ки, R нэги хэтти Евклид фэзасыдыр. Нэр бир сонлу
 өлчүлү нэги хэтти Евклид фэзасында ортонормал

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (1)$$

базиси вар вэ бу фэзанын истэнигэн $f \in R$ элементини нэмин
 базис үзрэ а'ырмаг олар (IV, § 8):

$$f = (f, e_1) e_1 + (f, e_2) e_2 + \dots + (f, e_n) e_n. \quad (2)$$

Инди, фарз едэк ки, R сонсуз өлчүлү Евклид фэзасы вэ

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \quad (3)$$

нэмин фэза элементлэрини ортонормал системидир, јэ'ни (3)
 системини элементлэри үчүн

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

мүнэсибэтлэри өдэкилэр. (3) ортонормал системини истэни-
 лэн сонлу сәјдэ элементлэри хэтги асылы де'илдир (§ 3).

Тэ'риф 1.

$$\lambda_k = (f, e_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

өддэлэринэ $f \in R$ элементини, (3) ортонормал системинэ
 нэзэрэн Фурје эмсаллары,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \quad (5)$$

сырасына исэ нэмин элементин (3) ортонормал системи
 үзрэ Фурје' сыраси де'илир вэ

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \quad (6)$$

кими јазылар.

¹ Мэшһур франса ри, ази, атчысы Ж. Б. Фурјенни (1768—1830) шэрэ-
 филэ.

Бу налда

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

чэмлэри (5) Фурје сырасынын хүсуси чэмлэри адланыр. Экэр
 (5) сырасынын S_n хүсуси чэмлэри үчүн R фэзасынын норма-
 сында

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - f\| = 0$$

мүнэсибэти өдэкилэрсэ, онда де'ирлэр ки, (5) сырасы R фэза-
 сынын нормасында $f \in K$ элементинэ јыгылар:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$$

(3) ортонормал системи элементлэрини ихтијари эмсаллы

$$P_n = \sum_{k=1}^n C_k e_k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

хэтти комбинасијаларына бахаг.

Белэ бир мөсэлэ гаршыја чыхыр:

(8) хэтти комбинасијалары ичарисиндэн верилмиш $f \in R$
 элементинэ R фэзасынын нормасында эн јакын оланыны, јэ'ни

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n C_k e_k \right\| \quad (9)$$

нормасына эн кичик гижмэт верэнини тапмалы.

(9) ифадэсинэ $P_n = \sum_{k=1}^n C_k e_k$ чэмни $f \in R$ элементиндэн R

фэзасынын нормасында ме'ли де'илир.

Тесорем. (8) хэтти комбинасијалары ичарисиндэн
 верилмиш $f \in R$ элементиндэн R Евклид фэзасынын
 нормасында эн аз ме'л едэни онун Фурје сырасынын
 n -чи хүсуси чэмидир.

Исбаты. Скалар нэсилни хэссэлэригэ эсасэн

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n C_k e_k \right\|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^n C_k e_k, f - \sum_{k=1}^n C_k e_k \right) \\ &= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^n C_k (f, e_k) + \sum_{k=1}^n C_k^2 (e_k, e_k) \end{aligned}$$

$$= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n C_k \lambda_k + \sum_{k=1}^n C_k^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (C_k - \lambda_k)^2 - \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$$

вә $\{a\}$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n C_k e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (C_k - \lambda_k)^2 - \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \quad (10)$$

алыныр Бурадан адындыр ки, сәг тәрәфдәки ифадәниң ән кичик олмасы үчүн $C_k - \lambda_k = 0$ олмалыдыр (Һердә галан ики һәддә C_k -лардан асылы дејилдир). Демәли, (9) ифадәсиниң ән кичик олмасы үчүн $C_k = \lambda_k$ олмалы $\{a\}$ ни (8) хәтти комбинәси-јасының әмсаллары f -ин Фурје әмсаллары олмалыдыр.

Бу һалда, (10) бәрәбәрлији

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \quad (11)$$

шәклиндә јазылар.

Теорем исбат олунду.

Бурадан ашағыдакы нәтичә алыныр:

Нәтичә 1. R Евклид фәзасының истәкилән f элементиниң вә ихтијари C_1, C_2, \dots, C_n әдәдләри үчүн

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 < \left\| f - \sum_{k=1}^n C_k e_k \right\|^2 \quad (12)$$

бәрәбәрсизлији доғрудур.

Тәриф 2. $f \in R$ олунда

$$E_n(f)_R = \inf_{(C_k)} \left\| f - \sum_{k=1}^n C_k e_k \right\| \quad (13)$$

кәмијјәтиниң f элементиниң R фәзасының нормасын-да (8) хәтти комбинәсијалары вәситәсизлә ән јакшы јакынлашмасы дејилдир.

Бурада дәгиг ашағы сәрһәд мүмкүн ола билән бүтүн C_1, C_2, \dots, C_n әмсалларына нәзәрән көтүрүлдүр.

Исбат етдијимиз теоремдән адындыр ки, $f \in R$ элементинә R фәзасының нормасында ән јакшы јакынлашма әерән хәтти комбинәсија f -ин Фурје сырасының хусуси хәмидир:

$$E_n(f)_R = \left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \lambda_k^2} \quad (14)$$

$$\lambda_k = (f, e_k) \quad (k=1, 2, \dots, n, \dots).$$

Тәрифдән адындыр ки, истәкилән $f \in R$ элементиниң ән јакшы јакынлашмасы мәнфи әләд дејилдир: $E_n(f)_R > 0$. Бундан башга, $E_n(f)_R$ кәмијјәти n -ин артмајан функцијасыдыр:

$$E_n(f)_R > E_{n+1}(f)_R \quad \text{вә } \|f - S_n\| > \|f - S_{n+1}\|.$$

(11) бәрәбәрлијиндә $n \rightarrow \infty$ шәртиндә ашағыдакы нәтичә алыныр:

Нәтичә 2. Истәкилән $f \in R$ элементиниң $\lambda_k = (f, e_k)$ Фурје әмсаллары үчүн

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \|f\|^2 \quad (15)$$

бәрәбәрсизлији доғрудур.

(15) бәрәбәрсизлијинә Бессел' бәрәбәрсизлији дејилдир (17) бәрәбәрсизлијиндән адындыр ки һәр бир $f \in R$ элементиниң

$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$ сырасы јыгылыр вә $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ бәрәбәрлији доғрудур.

Гейд еләк ки, верилмиш

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (16)$$

ортогонал системи нормализиш олмадыгда онларын һәр би-ринни өз нормасына бөлмәклә ортонормал

$$\frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}, \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|}, \dots, \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \dots$$

системини аймағ олар. Бу һалда, ихтијари $f \in R$ элементиниң ортонормал система нәзәрән Фурје әмсаллары

$$\lambda_k = \left(f, \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|} \right) = \frac{1}{\|\varphi_k\|} (f, \varphi_k), \quad k=1, 2, \dots$$

вә (16) ортогонал системинә нәзәрән Фурје сырасы исә

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \quad (17)$$

олар.

Бурадан адындыр ки, $f \in R$ элементиниң (16) ортогонал системинә нәзәрән Фурје әмсаллары

$$a_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} (f, \varphi_k) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (18)$$

дүстүрү илә тәјин олунур. Бу һалда (15) Бессел бәрәбәр-сизлији

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\|\varphi_k\|^2} < \|f\|^2 \quad (19)$$

кими јазылыр.

§ 5. ТАМ ВӘ ГАПАЛЫ ОРТОНОРМАЛ СИСТЕМЛӘР

Тутаг ки, сонсуз өлчүлү R Евклид фәзасында

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$$

ортонормал системи верилмишдир.

Бессел Фридрих Вильгельм (1784—1846) аалым астроному вә ризаијјатчысыдыр

Тә'риф 1. (1) системинин элементлариндән дүзәлмән бүтүн $\sum_{k=1}^n C_k e_k$ хәтти комбинациялар чохлуғу R фәзасында

һәр $\varepsilon > 0$ сых олдуғда һәмн система R фәзасында там системә дежилди. Бу о демәкдир ки, һәр бир $f \in R$ элементи $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $n = n(f, \varepsilon)$ нөмрәси вә $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ әдәдләри вар ки,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \tau_k e_k \right\|_R < \varepsilon \quad (2)$$

барабәрсизлији өдәниди.

Теорем 1. (1) ортонормал системинин сонсуз өлчүлү R Евклид фәзасында там олмасындин өтүң истәнилән $f \in R$ элементини үчүн

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 = \|f\|^2 \quad (3)$$

барабәрлијинин өдәнилмәси зарури вә кафи шәрттидир. Бурада $\lambda_k = (f, e_k)$ илә f функцијасынн (1) ортонормал системә нәзәрән Фурје әмсаллары ишарә едилмишдир.

(3) барабәрлијинә Парсевал¹ барабәрлији дежилди.

Шәртин зарурилији. Тутаг ки, (1) ортонормал системн R фәзасында тамдыр. Онда $f \in R$ элементи вә истәнилән $\forall \varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\sum_{k=1}^n \tau_k e_k$ хәтти комбинациясы вар ки,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \tau_k e_k \right\| < \varepsilon$$

барабәрсизлији өдәниди. Онда әввәлки параграфда исбат едилмиш (12) барабәрсизлијинә көрә

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 < \left\| f - \sum_{k=1}^n \tau_k e_k \right\|^2 < \varepsilon$$

вә јә

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \varepsilon \quad (4)$$

олар. Бу барабәрсизлијин сол тәрәфи n артдыгда азалыр вә Бессел барабәрсизлијинә (§ 4) көрә мәңфи әдәд дежилди. Онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \right] = 0$$

олар, јәни (3) барабәрлији доғрудур.

¹ М. Парсевал (1755—1836) франсә ријазиятчысыдыр.

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, истәнилән $f \in R$ үчүн (3) барабәрлији өдәниди. Онда әввәлки параграфда исбат етдијимиз (11) барабәрлијинә көрә

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \quad (5)$$

олдуғундан $f \in R$ элементинин Фурје сырасынын $S_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$

хүсуси чәмләри ардычыллыгы һәмн элементин өзүнә јығылар:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0.$$

Бу көстәрир ки, (1) ортонормал системинин хәтти комбинациялары чохлуғу R фәзасында тамдыр, јәни (1) системн R фәзасында тамдыр.

(5) барабәрлији көстәрир ки, $f \in R$ элементи үчүн (3) барабәрлијинин өдәнилмәси онун

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k \quad (6)$$

Фурје сырасынын R -ин нормасында f -ин өзүнә јығылмасына эквивалентдир. Бурадан ашағыдакы тәкләф алындыр.

Теорем 2. (1) ортонормал системинин сонсуз өлчүлү R Евклид фәзасында там олмасы үчүн истәнилән $f \in R$ элементинин Фурје сырасынын R -ин нормасында һәмн элементини өзүнә јығылмасы, јәни

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k \quad (7)$$

барабәрлијинин өдәнилмәси зарури вә кафи шәрттидир.

Нәтичә. Тутаг ки, R сонсуз өлчүлү Евклид фәзасында (1) ортонормал системн һәмн ашаға тамдыр. Онда бүтүн (f, e_k) ($k = 1, 2, \dots$) Фурје әмсаллары сыфра барабәр олан $\{f\}$ R элементини сыфра барабәрир, јәни сыфра элементидир.

Доғрудан да, $f \in R$ элементинин бүтүн $\lambda_k = (f, e_k)$ Фурје әмсаллары сыфра барабәр олдуғда, (3) Парсевал барабәрлијинә көрә $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 = 0$ олар. Бурадан $\|f\| = 0$ вә $f = 0$

алындыр.

Тә'риф 2. R фәзасынн (1) ортонормал системинин бүтүн элементләринә ортогонал олан (јәни бүтүн $(f, e_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) барабәрликләрини өдәән) φ элементини анық сыфра элемент олдуғда (1) системнә галам системә дежилди.

Теорем 3. *Бэр бир тэм ортонормал систем e_j ни дамандо тигмдир.*

Доғрудан да, тутат ки (1) ортонормал системи тмдир. Онда һәр бир $\psi \in R$ элементи үчүн (3) Парсевал барабарлиғи өдәниләр:

$$\|\psi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\psi, e_k)|^2.$$

Демәли, бүтүн $(\psi, e_k) = 0$ ($k=1, 2, \dots$) барабарликләри тоғру оларға, онда $\|\psi\| = 0$ олар ки, бұрчдан да $\psi = 0$ алыныр. Я'ни (1) ортонормал системи гапалыдыр.

Ғејд. Биз көстәрәнк ки һәр бир сонсуз өлчүлү R Евклид фазасында ортонормал системи тмдир. Онда гапалылыгы чыгыр. Бу тәхтифи тәрси иһә иһәниһән сонсуз өлчүлү Евклид фазасы үчүн доғру деһәли. Тәһин сонсуз өлчүлү Евклид фазасы тм олдуғда, я'ни о һилберт фазасы олдуғда һәһин фазада ортонормал системи тм олмасы онун гапалы олмасына эквивалентдир.

§ 6. ҺИЛБЕРТ ФАЗАСЫНДА ОРТОНОРМАЛ СИСТЕМЛӘР

Тутат ки,

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \quad (1)$$

ортонормал системи R фазасында тмдир. Онда она R фазасынын ортонормал базиси дејилдир.

Там олмәјән сонсуз өлчүлү Евклид фазасында ортонормал базис олмәјә да биләр. Ләкин һәр бир сонсуз өлчүлү тм Евклид фазасында ортонормал базис вардыр.

Буну сепарабел Евклид фазасы, я'ни һилберт фазасы үчүн исбат етмәк чәһин дејилдир.

Тутат ки,

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots \quad (2)$$

H һилберт фазасында һәр јердә сых олан һесаби чоғлудур. (2) элементларини һансы өзүндән әввәлки элементларин хәтти комбинасијасы шәклиндә көстәрилә биләрсә ону атарат. Јердә гаһандар јенидән нәирәләдикдә хәтти асылы олмәјән

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (3)$$

элементлар системи алынар. (3) элементлар системи да H фазасында һәр јердә сыхдыр. (3) системинә ортонормалландырма процесини (IV, § 8) тәтбиг етмәклә ашағыдакы шәртләри өдәјән јени

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \quad (4)$$

системини алмат олар.

1) (4) ортонормал системдир.

2) (4) системини һәр бир e_n элементи (3) системини $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ элементларини хәтти комбинасијасыдыр:

$$e_n = a_{n1}\varphi_1 + a_{n2}\varphi_2 + \dots + a_{nn}\varphi_n, \quad a_{nn} \neq 0. \quad (5)$$

3) һәр бир φ_n элементи иһә e_1, e_2, \dots, e_n элементларини хәтти комбинасијасыдыр:

$$\varphi_n = b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + \dots + b_{nn}e_n, \quad b_{nn} \neq 0. \quad (6)$$

Бу гајда иһә алынған (4) ортонормал системи да H фазасында һәр јердә сыхдыр. (3) системини H фазасында һәр јердә сых олмасындан вә (3) шәртиндән ајдындыр ки, (4) ортонормал системи H фазасында тмдир. Бу да (4) системини H фазасында ортонормал базис олдуғуну көстәрир.

Бу һалда, иһәниһән $f \in H$ элементини (4) ортонормал базис үзрә Фурје сырасы һәһин элементлар ајындыр (§ 5):

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k \quad (7)$$

Һундан башға, һәр бир $f \in H$ элементини ортонормал базис үзрә (7) Фурје ајрылышы јекәндир. Доғрудан да, f H элементини (4) сырасындан башға

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k \quad (8)$$

кимин бир ајрылышы да олса, онда

$$(f, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (e_n, e_k) = \gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

олар, я'ни (8) сырасынын әмсаллары f -ни Фурје әмсалларына барабар олар. Бурадан (7) Фурје ајрылышында јекәндәһин ајдындыр.

Теорем 1. *Һилберт фазасында гапалы олан һәр бир ортонормал систем e_j ни дамандо тигмдир.*

Исбаты. Тутат ки, f H һилберт фазасында иһәниһән элемент иһә

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k, \quad \lambda_k = (f, e_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

онун гапалы ортонормал (4) системинә нәзәрән Фурје сырасыдыр. (9) Фурје сырасынын әмсаллары үчүн бәссәһин

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \|f\|^2$$

барабарсизлији (§ 4) өдәниһәдјиндән $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$ сырасы јығыландыр.

Бу һалда (9) сырасынын $S_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ хәсуси чәмләрн үчүн

$$\|S_m - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m \lambda_k e_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^m \lambda_k e_k, \sum_{k=n+1}^m \lambda_k e_k \right) = \sum_{k=n+1}^m \lambda_k^2, \quad m > n$$

мүнәсибәтинин өдәнилмәси $\{S_n\}$ ардычыллыгынын фундамен-
тал олдуғуну көстәрир. Фундаментал ардычыллыгы исә там
 H фәзасында $f_0 \in H$ лимити бар: $\|S_n - f_0\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). $f_0 \in H$
элементинин (4) ортонормал системинә көрә Фурје әмсаллары
 f -ин Фурје әмсалларына барабардир. Доғрудан да, истәнилән
 $n \geq k$ үчүн доғру олан

$$(S_n, e_k) = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, e_k \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (e_j, e_k) = \lambda_k$$

барабарлијиндән вә

$$|(S_n, e_k) - (f, e_k)| = |(S_n - f, e_k)| \leq \sqrt{\|S_n - f\| \cdot \|e_k\|} = \sqrt{\|S_n - f\|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

мүнәсибәтиндән ајдындыр ки,

$$(f, e_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n, e_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda_k = (f, e_k)$$

олар. Демәли, $f - f_0$ фәрғинин бүтүн Фурје әмсаллары сыфра
барабардир. Бу көстәрир ки, $f - f_0$ фәрғи гапалы (4) орто-
нормал системинин бүтүн һәдләринә ортогоналдыр: $(f - f_0, e_k) =$
 $= 0, k = 1, 2, \dots$ Онда $f - f_0 = 0, f = f_0$.

Демәли, истәнилән $f \in H$ элементинин гапалы (4) ортоно-
рмал системинә көрә (9) Фурје сырасы һәммин элементин өзүнә
јығылыр. Бу да (4) ортонормал системинин там олдуғуну көс-
тәрир (§ 5).

Бу теоремдән вә әввәлки параграфда исбат едилмиш 3-чү
теоремдән ашағыдакы нәтичә алыныр.

Нәтичә. Һилберт фәзасында ортонормал системин-
там олмасы онун гапалы олмасы үчүн зәрури вә кафи
шәртдир.

Теорем 2 (Рисс—Фишер'). *Тутат ки, $\{e_k\}$ H Һил-
берт фәзасында игтијари ортонормал системдир.*

Онда $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < +\infty$ шәртини өдәјән һәр бир $(C_1, C_2,$

*..., $C_n, \dots)$ ардычыллыгы үчүн ела јеканә $f \in H$ элемен-
тин бар ки, C_k ($k = 1, 2, \dots$) әдәлләри онун Фурје әмсал-
ларыдыр вә*

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 = \|f\|^2 = (f, f) \quad (10)$$

мүнәсибәти өдәниди.

¹ Рисс Фридрих (1880—1956) маңар риязијатчысыдыр. Фишер
Эрнест (1875—1950) алман риязијатчысыдыр.

Исбаты. $S_n = \sum_{k=1}^n C_k e_k$ чәмләри үчүн

$$\|S_m - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m C_k^2, \quad m > n$$

мүнәсибәтинин өдәнилмәсиндән вә $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$ сырасынын јығыл-
масындан ајдындыр ки, S_n ардычыллыгы H фәзасында фун-
даменталдыр. Онда һәммин ардычыллыг H фәзасынын нор-
масында бир $f \in H$ элементинә јығылар:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n C_k e_k - f \right\| = 0$$

Бу һалда § 4-дә исбат едилмиш (11) барабарлијинә көрә

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n C_k^2 = \|f\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 = \|f\|^2$$

олур, јә'ни (10) барабарлији доғрудур.

Инди көстәрәк ки, C_k әдәлләри $f \in H$ элементинин Фурје
әмсалларыдыр. Бу мәсәдлә истәнилән $n \geq k$ үчүн доғру олан

$$(S_n, e_k) = \sum_{j=1}^n C_j (e_j, e_k) = C_k \quad (11)$$

барабарлијиндән вә

$$|(S_n, e_k) - (f, e_k)| \leq |(S_n - f, e_k)| \leq \sqrt{\|S_n - f\| \cdot \|e_k\|} = \sqrt{\|S_n - f\|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

мүнәсибәтиндән истифадә етмәк лазымдыр. Беләликлә, (11)
барабарлијинә әсәсән

$$(f, e_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n, e_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_k = C_k$$

мүнәсибәти алыныр, јә'ни $C_k = (f, e_k), k = 1, 2, \dots$

Теоремин тәләбләринин өдәјән $f \in H$ элементинин јеканә-
лији дә ејни гајда илә исбат олуиур.

Гејд. Ортонормал $\{e_k\}$ системи там (вә ја гапалы) олдуғла $f \in H$
элементинин јеканәлији Фурје ајрымлышынын јеканәлијиндән алыныр.

Рисс—Фишер теореминдән истифадә етәрәк көстәрмәк олар
ки, истәнилән H Һилберт фәзасы l_2 фәзасына изоморфдур
(V, § 1). Бу мәсәдлә H фәзасында там ортонормал $\{e_k\}$ сис-
теми алырәк вә һәр бир $f \in H$ элементинә онун $\{e_k\}$ сис-
теминә нәзәрән Фурје әмсалларынын $(C_1, C_2, \dots, C_n, \dots)$ чолау-

гуну гаршы гојар. $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < +\infty$ шәрти өдәнилдијиндән $C =$

$-(C_1, C_2, \dots, C_n, \dots)$ ардычыллыгы l_2 фазасынын элементи-дир. Беләликлә, H фазасынын һәр бир f элементинә l_2 фазасынын бир $C = (C_1, C_2, \dots, C_n, \dots)$ элементи ујгун олур.

Тәрсинә, l_2 фазасынын һәр бир $C = (C_1, C_2, \dots, C_n, \dots)$ элементинә Рисс-Фишер теореминә асасән H фазасынын бир јекәнә $f \in H$ элементи ујгундур. Бу C_k әдәдләри һәмин $f \in H$ элементинин Фурје әмәлләрыдыр. Беләликлә, H фазасынын элементләри илә l_2 фазасынын элементләри арасында гаршылыгылы биргијмәтли ујгунлуг јарадылыр. Бу ујгунлуг заманы һәмин фәзаларда тәјин едилмиш хәтти әмәлләр (чәм вә әдәдә вурма) вә скалјар һасил сәхланылыр. Јәни

$$f \mapsto C = (C_1, C_2, \dots, C_n, \dots)$$

вә

вә

олдугда

$$\varphi \mapsto d = (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$$

$$f + \varphi \mapsto C + d = (C_1 + d_1, C_2 + d_2, \dots, C_n + d_n, \dots)$$

$$\lambda f \mapsto \lambda C = (\lambda C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_n, \dots)$$

$$(f, \varphi) \mapsto (C, d) = C_1 d_1 + C_2 d_2 + \dots + C_n d_n + \dots$$

олур. Сонунчу мүнәсибәт

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \quad \text{вә} \quad (\varphi, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$$

бәрабәрликләринә асасән

$$(f + \varphi, f + \varphi) = (f, f) + 2(f, \varphi) + (\varphi, \varphi) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (C_k + d_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k d_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$$

бәрабәрлијиндән алыныр.

Бурадан ајдындыр ки, H вә l_2 фәзалары арасында јарыдылмыш гаршылыгылы биргијмәтли ујгунлуг изоморфизмдир (јәни бу ујгунлуг заманы хәтти әмәлләр вә элементләрин скалјар һасили сәхланылыр).

Истәнилән Гилберт фазасы l_2 фазасына изоморфдурса, онда бүтүн Гилберт фәзалары бир-биринә дә изоморфдур. Бурадан ашагыдакы теорем алыныр:

Теорем 3. Бүтүн Гилберт фәзалары бир-биринә изоморфдур.

Бу о дәмәкдир ки, Гилберт фәзалары мұхтәлиф тәбиғәтти элементләрдән ибарәт олса да, топология, әдәдә вурма вә скалјар һасил әмәлләри илә ифадә олунған хәссәләр багымында онлар ејни фәзалардыр.

Нәтижә. l_2 вә $L_2[a, b]$ фәзалары изоморфдур.

§ 7. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЈАЛАР СИСТЕМИ ҮЗРӘ ФҮРЈЕ СЫРАСЫ

Һәр бир фәзада мұхтәлиф ортогонал системләр гурмаг олар. Кәсимләјән функцијалар фәзасында дә мұхтәлиф ортогонал системләр, вардыр. Классик ортогонал сист-м олан

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots \quad (1)$$

тригонометрик функцијалар системи $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсимләјән функцијалары $L_2^{(C)}[-\pi, \pi]$ фәзасында ән мұһым ортогонал функцијалар системидир. (1) системинин ихтијари ики функцијасынын ортогонал олмасы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0 \quad (k \neq m; k, m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx \, dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = 0 \quad (k \neq m; k, m = 1, 2, \dots)$$

бәрабәрликләриндән ајдындыр.

Тригонометрик функцијалар системини нормалашдырмаг үчүн онларын һәр бирини өз нормасына бөлмәк ләзымдыр. Бу һалда,

$$\|\cos kx\| = \|\sin kx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx} = \pi \quad (k = 1, 2, \dots)$$

вә

$$\left\| \frac{1}{2} \right\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \, dx} = \frac{\pi}{2}$$

мүнәсибәтләринә асасән ашагыдакы ортонормал тригонометрик функцијалар системи алыныр:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (2)$$

Ихтијари $f \in L_2^{(C)}[-\pi, \pi]$ функцијасынын (1) ортогонал тригонометрик функцијалар системинә нәзәрән Фурје әмәлләрыны ујгун олараг a_k вә b_k ($k = 1, 2, \dots$) илә ишәрә етсәк, онда § 4-дә кәстәрилән үмуми (18) дүстуруна асасән

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

вә

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

олар. Бу halда f функцијасынын (1) ортогонал тригонометрик функцијалар системга үзрә Фурје сырасы

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5)$$

кими яззылар. Буна (ихтијари ортогонал системга үзрә Фурје сырасындан фәргләндирмәк үчүн) функцијанын тригонометрик Фурје сырасы дејилир.

Тригонометрик Фурје сырасындан башга, a_k вә b_k әмсаллары ихтијари әдәлләр олан вә тригонометрик сыра адланан

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (6)$$

шәкліндә сырага да бахырлар. Әмсаллары ихтијари әдәлләр олан

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (7)$$

шәкліндә ифадәга n -тәртибли тригонометрик чоххәдли дејилир. $C^*[-\pi, \pi]$ илә $C[-\pi, \pi]$ фәзасынын елә алтфәзасынм ишарә едәк ки, о, $[-\pi, \pi]$ парчасында кәснлмәјән вә $f(-\pi) = f(\pi)$ шәртини өдәјән бүтүн $f(x)$ функцијаларындан ибарәт олсун. $L_1^{(c)}[-\pi, \pi]$ фәзасынын ујгун алтфәзасынм исә $L_1^{(c)}[-\pi, \pi]$ илә ишарә едәк.

Вейерштрас теореминә (XIX, § 9) кәрә һәр бир $f \in C^*[-\pi, \pi]$ функцијасы вә истәнилән $\epsilon > 0$ әдәди үчүн елә $T_n(x)$ тригонометрик чоххәдлиси вар ки,

$$\|f(x) - T_n(x)\|_{C^*} < \epsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу о демәкдир ки, тригонометрик чоххәдлиләр чохлуғу $C^*[-\pi, \pi]$ фәзасында һәр јердә сыхдыр. Тригонометрик чоххәдлиләр исә (1) системи функцијаларынын хәтти комбинасијаларыдыр. (1) системи функцијаларындан дүзәлмиш бүтүн $T_n(x)$ хәтти комбинасијалар (тригонометрик чоххәдлиләр) чохлуғуну $C^*[-\pi, \pi]$ фәзасында һәр јердә сых олмасы (1) тригонометрик функцијалар системинин $C^*[-\pi, \pi]$ фәзасында там олдуғуну кәстәрир.

Тригонометрик чоххәдлиләр чохлуғу $L_1^{(c)}[-\pi, \pi]$ фәзасында да һәр јердә сыхдыр.

Догрудан да, һәр бир $f \in L_1^{(c)}[-\pi, \pi]$ функцијасы ϵ ни заманда $C^*[-\pi, \pi]$ сикфинә дә дахилдир. Буна кәрә дә истәнилән $f \in L_1^{(c)}[-\pi, \pi]$ функцијасы вә $\epsilon > 0$ әдәди үчүн елә $T_n(x)$ тригонометрик чоххәдлиси вар ки,

$$\|f(x) - T_n(x)\|_{C^*} < \epsilon / \sqrt{2\pi}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx} < \sup_{-\pi < x < \pi} |f(x) - T_n(x)| \cdot \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx} < \epsilon$$

вә ја

$$\|f(x) - T_n(x)\|_{L_2} < \epsilon$$

бәрабәрсизлији алынар.

Беләтиклә, ашағыдакы тәсрәм исбат едилмиш олур:

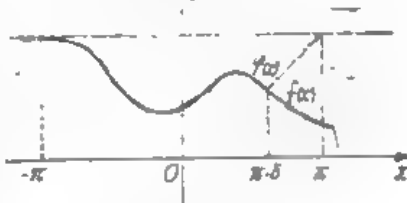
Теорем 1. (1) тригонометрик функцијалар системи $C^*[-\pi, \pi]$ вә $L_1^{(c)}[-\pi, \pi]$ фәзасында тамдыр.

Бу теоремдән истифадә едәгәк ашағыдакы даһа күчлү теореми дә исбат етмәк олар:

Теорем 2. (1) тригонометрик функцијалар системи кәснлмәјән функцијаларын $L_1^{(c)}[-\pi, \pi]$ фәзасында тамдыр.

Исбаты. Тутар ки, $f \in L_1^{(c)}[-\pi, \pi]$ функцијасы вә ихтијари $\epsilon > 0$ әдәди верилиншир.

$f(x)$ функцијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында кәснлмәјән олдуғундан мәндуудур: $|f(x)| < M$ ($-\pi < x < \pi$). Инди $\delta < \frac{\epsilon}{4M}$ шәртини өдәјән $\delta > 0$ әдәди кәтүрәк вә ашағыдакы кими функција тәјин едәк (шәкил 266):



Шәкил 266

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & -\pi < x < \pi - \delta \text{ олдугда} \\ f(\pi - \delta) + \frac{f(\pi) - f(\pi - \delta)}{\delta} (x - \pi + \delta), & \pi - \delta < x < \pi \text{ олдугда.} \end{cases}$$

$\varphi(x)$ функцијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында кәснлмәјәндир, парчанын уч нөггәләриндә бәрабәр гијәтләр алыр $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, мәндуудур $|\varphi(x)| < M$ ($-\pi < x < \pi$) вә ашағыдакы бәрабәрсизлији өдәјир:

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_{L_1} = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < 2M \left(\int_{-\pi}^{\pi} dx \right)^{1/2} = 2M\epsilon^{1/2} < \epsilon/2. \quad (8)$$

Бундан башга, $\varphi \in L_1^{(c)}[-\pi, \pi]$ олдуғундан 1-чи теоремдә кәрә верилинш ихтијари $\epsilon > 0$ әдәди үчүн елә $T_n(x)$ триго-

чоҳадлиси вар ки,

$$\| \varphi(x) - T_n(x) \|_{L_2^{(c)}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

барабарсизлији оданилр. (8) ва (9) барабарсизликларидан $\| f(x) - T(x) \|_{L_2^{(c)}} < \| f(x) - \varphi(x) \|_{L_2^{(c)}} + \| \varphi(x) - T_n(x) \|_{L_2^{(c)}} < \varepsilon$

аълмр ки, бу да (1) системинин $L_2^{(c)}[-\pi, \pi]$ фазасында там олдуғуну кестерир.

Тригонометрик функцијалар системи $L_2^{(c)}[-\pi, \pi]$ фазасында да кениш олан ҳисса-ҳисса кэсилмэз, функцијаларын $L_2^{(b)}[-\pi, \pi]$ фазасында да тамдыр. Бу фазаны тэ'јин етмэк үчүн $[a, b]$ парчасында ҳисса-ҳисса кэсилмэз, функција аяла-яшы илэ таныш олаг.

Тэ'риф. Тутаг ки, $[a, b]$ парчасынын елэ $T = [a < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < b]$ бөлхүсү вар ки, $f(x)$ функцијасы (x_k, x_{k+1}) ($k=0, 1, \dots, n$) интервалларынын һэр бириндэ кэсилмэжэндир вэ үч нөгтэлэриндэ сонлу

$$f(x_k + 0) = \lim_{x \rightarrow x_k + 0} f(x), \quad f(x_{k+1} - 0) = \lim_{x \rightarrow x_{k+1} - 0} f(x),$$

$$(k=0, 1, \dots, n-1)$$

лимитлэри вар. Онда $f(x)$ функцијасына $[a, b]$ парчасында ҳисса-ҳисса кэсилмэз функција дежилр.

Бурадан ајдындыр ки, $[a, b]$ парчасында ҳисса-ҳисса кэсилмэз функција ја һэмин парчада кэсилмэжэндир, ја да сонлу сајда биринчи нөв кэсилмэ нөгтэси вардыр. Бундан башга, $[a, b]$ парчасында ҳисса-ҳисса кэсилмэз $f(x)$ функцијасынын өзү вэ онун $f'(x)$ квадраты һэмин $[a, b]$ парчасында интегралланандыр (XXII, § 4)

$[a, b]$ парчасында ҳисса-ҳисса кэсилмэз функцијалар чоҳлугунда ики $f(x)$ вэ $\varphi(x)$ функцијаларынын скалар һасилини

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx$$

ними тэ'јин етдикдэ сонсуз өлчүлү Евклид фазасы алыныр. Бу фазаны $L_2^{(b)}[a, b]$ илэ ишарэ едэк.

Һэр бир $f \in L_2^{(b)}[-\pi, \pi]$ функцијасы үчүн елэ кэсилмэз $\varphi \in L_2^{(c)}[-\pi, \pi]$ функцијасы тапмаг олар ки,

$$\| f - \varphi \|_{L_2} = \left(\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \right)^{1/2} < \varepsilon \quad (10)$$

барабарсизлији өдэкилар. Доғрудан да, тутаг ки, $\varphi(x)$ функцијасы олараг $f(x)$ функцијасынын x_k кэсилмэ нөгтэлэринин кичик атрафларынын харичиндэ $f(x)$ илэ үст-үстэ дүшэн вэ һэмин атрафларта хэтти олан кэсилмэз функција кётүрүлмүш

дүр. Онда x_k нөгтэлэринин кэстэрилэн атрафларынын елэ кичик кётүрмэк олар ки, (10) барабарсизлији өдэкилар.

Бурадан вэ 2-чи теоремдэн ашағыдакы тэклиф алыныр:

Теорем 3. (1) тригонометрик функцијалар системи $L_2^{(b)}$ ҳисса-ҳисса кэсилмэз функцијаларын $L_2^{(b)}[-\pi, \pi]$ фазасында тамдыр.

Гејд. Ејин гајда илэ исбат етмэк олар ки, (1) ортогонал тригонометрик функцијалар системи даһа үшүми $L_2[-\pi, \pi]$ фазасында да тамдыр

Тригонометрик функцијалар системинин там олмасы һаггында бурада исбат етдијимиз теоремлэрдэн вэ сонсуз өлчүлү Евклид фазаларында элементлэрин үшүми ортогонал системлэр үзрэ ајрылышы һаггындакы теоремлэрдэн (§ 4 вэ § 5) нэтичэ олараг ашағыдакы тэклифлэр алыныр:

Теорем 4. Тутаг ки, $f \in L_2^{(b)}[-\pi, \pi]$. Онда

1) n -тартибли тригонометрик чоҳадлилар ичэрисиндэ $L_2^{(b)}[-\pi, \pi]$ фазасынын нормасында f функцијасындин эн аз мејл едди онун (3) Фурје сырасынын n -чи

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (11)$$

хүсуси чэлидир. Бу һалда,

$$E_n(f)_{L_2^{(b)}} = \sqrt{\| f \|_{L_2^{(b)}}^2 - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]} \quad (12)$$

олар (§ 4, теорем 1, тэ'риф 2, (14) дүстуру).

2) Фурје сырасынын (11) хүсуси чэлир ардычыллыгы L_2 фазасынын нормасында, ја'ни орта квадратик ма'нада $f(x)$ функцијасынын өзүнэ яшылдыр:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0 \quad (13)$$

(§ 5, теорем 2).

3) Парсевал барабарлији доғрудыр:

$$\frac{1}{\pi} \| f \|_{L_2^{(b)}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_a^b f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (14)$$

(§ 5, теорем 2).

Нэтичэ 1. Бүтүн тригонометрик Фурје амсаллары сифра барабар олан $f \in C[-\pi, \pi]$ функцијасы еңиликлэ сифра барабардыр.

Доғрудан да, (14) Парсевал барабарлијинэ көрэ кэсилмэ-жэм $f(x)$ функцијасы үчүн $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ олар. Бурадан алыныр ки, $f(x) \equiv 0$ олмалдыр.

Нәтижә 2. Еңки тригонометрик Фурје сырлары олан $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәҗән $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функцијалары һәмин парчада еңилакка барабардир: $f(x) = \varphi(x)$.

Нәтижә 3. Һәр бир һиссә-һиссә кәсилмәз f функцијасының тригонометрик Фурје әмсалларының лимити сыфра барабардир

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Догрудан да, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ интегралы сонлу олдуғундан (14)

сырасы ыгыландыр. Ыгылан сыранын үмүи һәддинин лимити исә сыфра барабардир

§ 8. ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЈЕ СЫРАСЫНЫҢ НӨГТӘДӘ ЫҢЫЛМАСЫ

Кәсилмәҗән функцијанын тригонометрик Фурје сырасының орта квадратик мәнада һәмин функцијага ыгылмасы әввәлки параграфда көстәрилмишдир.

Лакин тригонометрик Фурје сырларының ријазин—физика тәһликләринин вә башга мәсәләләрин һәллигә тәтбиғ етмәк үчүн Фурје сырасының $[-\pi, \pi]$ парчасының верилмиш нөгтәсиндә вә $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ парчасында ыгылмасының билмәк ләзымдыр. Бу мәсәләләргә чоғ, ријазинјатчылар мәшғул олмушдур.

Мүәҗҗән едилмишдир ки, елә кәсилмәҗән функцијалар вәрдир ки, онларын тригонометрик Фурје сырлары $[-\pi, \pi]$ парчасының мүәҗҗән нөгтәсиндә вә $[a, b]$ һәмин парчада һәр йердә сых олан сонсуз сәјдә нөгтәдә дағылыр. Демәли, функција үзәринә гојулан кәсилмәзлик шәрти онун тригонометрик Фурје сырасының верилмиш нөгтәдә ыгылмасының тәмин етмир. Бунун үчүн бахылан функција кәсилмәзликдән башга бир сыра әләвә шәртләри дә өдәмәлидир.

1966-чы илдә исвеч ријазинјатчысы Л. Карлесон исбат етмишдир ки, $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәҗән вә һәтта һәмин парчада Риман мәнада интегралланан һәр бир f функцијасының тригонометрик Фурје сырасы $[-\pi, \pi]$ парчасында сәнки һәр йердә $f(x)$ функцијасының өзүнә ыгылыр. Лакин әввәлләр, 1923-чү илдә совет ријазинјатчысы А. Н. Колмогоров¹ исбат етмишдир ки, верилмиш функција Риман мәнада интегралланан олмадыгда онун тригонометрик Фурје сырасы $[-\pi, \pi]$ парчасының һеч бир нөгтәсиндә ыгылмаја да биләр.

Фурје сырларының нөгтәдә ыгылмасының тәдғиг етмәк үчүн тәкчә кәсилмәҗән функцијаларга бахмағын мәнасы јохдур. Чүнки $[-\pi, \pi]$ парчасында интегралланан һәр бир $f \in L^{(R)}[-\pi, \pi]$

¹ Колмогоров Андрей Николаевич (1903) мәшһур Совет ријазинјатчысыдыр.

функцијасының да тригонометрик Фурје әмсалларының

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

дүстурлары илә тәҗин етмәк вә онун

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (3)$$

Фурје сырасының јазмағ олар. Нәзәрә аймағ ләзымдыр ки, $f(x)$ функцијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында интегралланан олдугда $f(x) \sin kx$ вә $f(x) \cos kx$ функцијалары да һәмин парчада интегралланандыр (XXII, § 5).

Мәлүмдур ки, $[-\pi, \pi]$ парчасында тәҗин олунмуш вә $f(-\pi) = f(\pi)$ шәртини өдәҗән һәр бир f функцијасының бүтүн әдәд охуна дәври давам етдирмәк олар (XI, § 12). $f(x)$ функцијасы үчүн $f(-\pi) = f(\pi)$ шәрти өдәниләмәдикдә исә онун гијәтиниң аңчағ бир $x = \pi$ (вә $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ нөгтәсиндә дәјишмәклә (бу заман (1) вә (2) дүстурларында интегралларын гијәти дәјишмәдннндән Фурје әмсаллары дәјишмәз) јенә дә ону бүтүн әдәд охуна дәври давам етдирмәк олар. Бурадан ајдындыр ки, кәләчәкдә, үмүиһиңи азалтадан, бахдығымыз $f \in L^{(R)}[-\pi, \pi]$ функцијаларының 2π дәврилү функцијалар һесәб

етмәк олар. Бүтүн әдәд охунда кәсилмәҗән вә 2π дәврилү функцијалар фәзасы C^* , $[-\pi, \pi]$ парчасында Риман мәнада интегралланан вә 2π дәврилү функцијалар фәзасы исә L^* олсуя.

Верилмиш нөгтәдә (3) Фурје сырасының ыгылмасының тәдғиг етмәк үчүн онун

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (4)$$

хүсуси чәмләринә баһағ. Бурада a_k вә b_k әввәкинә онларын (1) вә (2) интеграл ифадәләрини јаздыгда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt$$

олар, Инди

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku = \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} \left\{ \sin \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\sin (2k+1) \frac{u}{2} - \sin (2k-1) \frac{u}{2} \right] \right\} = \frac{\sin (2n+1) \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad (5)$$

дүстурунда иштифадэ едэк. Онда Фурје сырасынын хусуси чэми үчүн

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} dt \quad (6)$$

ифадэси алынар.

Бу барабарлијин сағ тэрэфиндэки интеграла *Дирихле*¹ интеграла,

$$D_n(u) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos ku = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{\sin \frac{1}{2} u} \quad (7)$$

функциясына исэ *Дирихле нүвэси* дейлир.

Дирихле нүвэси бүтүн эдэд охунда кэсилмэјандир вэ онун үчүн $D_n(0) = 2n+1$ барабарлији доғрудур. $D_n(u)$ функциясы 2π дөврлү чүт функциядыр: $D_n(-u) = D_n(u)$.

(7) барабарлијиндэн ајдындыр ки,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = 1 \quad \text{вэ} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u) du = 1 \quad (8)$$

о ар. (6) барабарлији Дирихле нүвэси васитэсилэ

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt$$

кими јазылар. Бурада $f \in L^*$ олдуғуна габул едэрэк, $u=t-x$ эвэзлэмэсини апарат:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x) D_n(u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) D_n(u) du. \end{aligned} \quad (9)$$

¹ Дирихле Петер Густав Лежон (1805—1859) алман ријазатчысыдыр.

Бу барабарлиқдэн вэ $D_n(x)$ функциясынын чүт олмасындан иштифадэ едэрэк $S_n(x)$ чэми үчүн ашағыдакы көстэрилиши дә алмағ олар:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} D_n(u) du. \quad (10)$$

Теорем 1. *Тутат ки, $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссэ-һиссэ кэсилмэјэ олан $f(x)$ функциясынын һәмми парчасынын һәр бир x нөктэсиндэ сонлу сағ вэ сағ тарама-лары $f_-(x)$ вэ $f_+(x)$ вар. Онда онун Фурје сырасы иштифадэ илэ $x (\neq \pm \pi)$ нөктэсиндэ $S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$*

чэминдэ, $x = \pm \pi$ нөктэлэриндэ исэ $S_1 = \frac{f(-\pi+0) + f(-\pi-0)}{2}$ чэминдэ јығылыр.

Исбат. Үмүмилији азалтмадан, фэрз едэк ки, $f(x)$ функциясы бүтүн эдэд охуна дөври давам етдирилмишдир. Онун дөври давамы олан 2π дөврлү функцияны јенэ дә $f(x)$ илэ ишарэ етмэк олар. Онда (8) вэ (10) мүнәсибэтлэринэ эсәсэн

$$\begin{aligned} S_n(x) - S(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} D_n(u) du - \\ &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+u) - f(x+0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \frac{2n+1}{2} u du + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x-u) - f(x-0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \frac{2n+1}{2} u du = I_n^{(1)} + I_n^{(2)} \end{aligned}$$

аларыг. Көстэрэк ки, $I_n^{(1)} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) вэ $I_n^{(2)} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) мүнәсибэтлэри доғрудур. Бу мәсәллэ $\varphi(u) = \frac{f(x+u) - f(x+0)}{2 \sin \frac{u}{2}}$

габул едэрэк, биринчи $I_n^{(1)}$ топлананы ашағыдакы кими јазат:

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(u) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(u) \cos \frac{u}{2} \sin nu du + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(u) \sin \frac{u}{2} \cos nu du. \end{aligned}$$

Шәртэ көрә $f(u)$ функциясы $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссэ-һиссэ кэсилмэјандир. Онда $\varphi(u)$ функциясы да $u=0$ нөктэ-

сини өз дахилинэ алмажан вэ $[-\pi, \pi]$ парчасында јерлөшөн һәр бир парчада һиссэ-һиссэ кэсилмэјән олар. $u=0$ нөггөсиндэ сонлу

$$\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{f(x+u) - f(x-0)}{u} \cdot \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{f(x+u) - f(x-0)}{u} = f'_+(x)$$

лимитинин олмасы көстөрир ки, $\varphi(u)$ функцијасы $[0, \pi]$ парчасында һиссэ-һиссэ кэсилмэјәндир. Бу һалда $\varphi(u) \cos \frac{u}{2}$ вэ $\varphi(u) \sin \frac{u}{2}$ функцијалары да $[0, \pi]$ парчасында һиссэ-һиссэ кэсилмэјән олар. Һәмин функцијалар вәситәсилә ашағыдакы кими јени функцијалар тәјин едәк:

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi(u) \cos \frac{u}{2}, & 0 \leq u \leq \pi \text{ олдугда,} \\ 0, & -\pi \leq u < 0 \text{ олдугда,} \end{cases}$$

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} \varphi(u) \sin \frac{u}{2}, & 0 \leq u \leq \pi \text{ олдугда,} \\ 0, & -\pi \leq u < 0 \text{ олдугда.} \end{cases}$$

Ајлындыр ки, $\varphi_1(u)$ вэ $\varphi_2(u)$ функцијалары да $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссэ-һиссэ кэсилмэјәндир. Буна көрә дә онларын Фурје әмсалларынын лимити сыфра барабәр олар (§ 7, нәтижә 3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(u) \sin nu \, du = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \cos \frac{u}{2} \sin nu \, du = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2(u) \cos nu \, du = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \sin \frac{u}{2} \cos nu \, du = 0.$$

Бурадан тәләб олуян

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(u) \sin nu \, du + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2(u) \cos nu \, du = 0$$

барабәрлији алыны, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(1)} = 0$ барабәрлијинин доғрулуғуну да ејни үсулла исбат етмәк олар.

Беләликлә, тәләб олуян

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n^{(1)}(x) - S(x)] = 0 \text{ вә } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

барабәрлији исбат олуыр.

Теоремин шәртләринин $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссэ-һиссэ һама́р функцијалар да өдәјир.

Тәрифи. Тутаг ки, $[a, b]$ парчасынын елэ $T = [a < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b]$ бөлкүсү вар ки, $f(x)$ функцијасынын (x_k, x_{k+1}) ($k=0, 1, \dots, n-1$) интервалларынын һәр бириндә кэсилмәз төрәмәси вэ јуч нөггәләриндә сонлу сол вә сағ төрәмәләри

$$f'_-(x_k) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0-} \frac{f(x_k + \Delta x_k) - f(x_k - 0)}{\Delta x_k},$$

$$f'_+(x_k) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0+} \frac{f(x_k - \Delta x_k) - f(x_k - 0)}{\Delta x_k}$$

вардыр. Онда $f(x)$ функцијасына $[a, b]$ парчасында һиссэ-һиссэ һама́р функција дејилир.

Исбат етдијимиз теоремдән ашағыдакы кими нәтичәләр алыныр:

Нәтижә 1. $[-\pi, \pi]$ парчасында кэсилмэјән вэ һиссэ-һиссэ һама́р $f(x)$ функцијасынын Фурје сырасы $(-\pi, \pi)$ интервалында $f(x)$ функцијасынын өзүнә, $x = \pm \pi$ нөггәләриндә исә $S_1 = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}$ әдәдинә јығылыр.

Доғрудан да, $f(x)$ функцијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында кэсилмәз олдуғундан $f(-\pi + 0) = f(-\pi)$ вэ $f(\pi - 0) = f(\pi)$ олуыр. Онда теоремдә көстәрилән S_1 әдәди $S_1 = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}$ әдәдинә

барабәр олар.

Хүсуси һалда, $f(-\pi) = f(\pi)$ барабәрлији өдәнилдикдә, мәсәлән, $f(x)$ функцијасы 2π дөврлү кэсилмәз вэ һиссэ-һиссэ һама́р функција олдугда, онун Фурје сырасы бүтүн $[-\pi, \pi]$ парчасында $f(x)$ функцијасына јығылыр.

Нәтижә 2. $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссэ-һиссэ кэсилмэјән вэ һиссэ-һиссэ һама́р 2π дөврлү $f(x)$ функцијасынын Фурје сырасы истәнилән $x \in (-\infty, \infty)$ нөггәсиндә $S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ әдәдинә јығылыр.

Хүсуси һалда, һиссэ-һиссэ һама́р 2π дөврлү $f(x)$ функцијасы кэсилмәз оларса, онда онун Фурје сырасы истәнилән $x \in (-\infty, \infty)$ нөггәсиндә $f(x)$ функцијасынын өзүнә јығылар.

Мисал 1. $f(x) = |x|$ функцијасынын $[-\pi, \pi]$ парчасында Фурје сырасына ајырымалы.

Бу функцијанын Фурје әмсалларынын (1) вэ (2) дүстүрлары вәситәсилә тапаг:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt \, dt = \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1).$$

$$a_{2j} = 0, \quad a_{2j-1} = -\frac{4}{\pi(2j-1)^2} \quad (j = 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \sin kt \, dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Бурадан ајдындыр ки, верилимиш функцијанын Фурје сырасы

$$x \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x$$

олар. $f(x) = |x|$ функцијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында кэсильмэјэндир, $f(-\pi) = f(\pi) = \pi$ шэртини өдэјир вэ һиссэ һиссэ һәмәр функцијадыр.

Буна көрэ дэ (нэтицэ 1) функцијанын Фурје сырасы $[-\pi, \pi]$ парчасында өзүмэ жығылдыр:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

Мисал 2. $f(x) = \operatorname{sgn} nx$ функцијасыны (XI, § 3) $(-\pi, \pi)$ интервалында Фурје сырасына аҗыриалы. Бу функција $(-\pi, \pi)$ интервалында һиссэ-һиссэ кэсильмэјэн вэ һиссэ-һиссэ һәмәр функцијадыр. Онун дөври давамшы да $f(x)$ нэ и парэ етсэк, онда Фурје эмсалларыны (1) вэ (2) дүстурлары васитэсидэ һесаблимаг олар.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} nx \cdot \cos kx \, dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} nx \cdot \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = -\frac{2}{k\pi} (\cos k\pi - 1).$$

$$b_{2j} = 0, \quad b_{2j-1} = \frac{4}{\pi(2j-1)} \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Белэликлэ, теоремэ көрэ

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad (-\pi < x < \pi)$$

аҗрылышы алымыр.

Тригонометрик Фурје сыраларынын нөгтэдэ жығылмасы һағында башга әләмәтлэр дэ вардыр. Бу әләмәтларин бирици, Дирихле әләмәти адланан тәклифи бурада исбатсыз сөјләјик.

Теорем 2 (Дирихле). 2π дөврилү дөври $f(x)$ функцијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссэ-һиссэ монотон вэ маһоудурса, онда онун Фурје сырасы нөтәһизлән $x \in (-\infty, \infty)$ нөгтәсиндэ $S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ чәһиннэ

жырылыр. (Хүсуси һалда, $f(x)$ функцијасынын кэсильмэз олдуғу нөгтэдэ сыранын чәһи $f(x)$ -ин өзүнэ барабәр олур).

Јада салаг ки, $f(x)$ функцијасына о заман $[a, b]$ парчасында һиссэ-һиссэ монотон функција дејилир ки, һәмич парчаны сонлу сәјдә елә $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, b)$ интервалларына белмәк мүмкүндүр ки, онларын һәр бириндэ $f(x)$ функцијасы монотондур (јәни ја артмајан, ја да азалмајандыр).

Сөјләдиһиниз Дирихле әләмәти кифәјәт гәдәр күчлүдүр вэ 1-чи теоремдән фәргләнир. Дирихле әләмәтиндэ $f(x)$ функцијасынын нэ төрәмәсинин варлығы, нэ дэ төрәмәһин һиссэ-һиссэ кэсильмэз олмасы тәләб олунмур.

Бурадан ајдындыр ки, Фурје сыралары илә көстәрилән функцијалар синфи чох кенишдир.

§ 9. ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЈЕ СЫРАСЫНЫН МҮНТӘЗӘМ ЈЫҒЫЛМАСЫ

Тутаг ки, $f \in L^{(R)}[-\pi, \pi]$ функцијасы үчүн тригонометрик Фурје сырасы гурулмушдур:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (1)$$

(1) сырасынын һәр бир $S_n(x) = \frac{a_0}{2} \cos kx + b_k \sin kx$ һәдди истәһилән сонлу парчада кэсильмэјән функција олдуғундан

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

хүсуси чәмлэри дэ һәмич парчада кэсильмэјән функцијалардыр. Буна көрэ дэ $\{S_n(x)\}$ ардычыллығы $f(x)$ функцијасына $[-\pi, \pi]$ парчасында мүнтәзәм жығылан олдуғда һәмич функција $[-\pi, \pi]$ парчасында һөкмән кэсильмэјән олмалыдыр (XXXVI, § 5). Демәли, $f(x)$ функцијасынын (1) Фурје сырасынын мүнтәзәм жығылан олмасы үчүн һәмич функцијанын кэсильмэз олмасы зәрури шәртдир. Лакин бу шәрт сыранын мүнтәзәм жығылмасы үчүн кәфи дејилдир.

Тригонометрик Фурје сырасынын мүнтәзәм жығылмасы үчүн сәдә кәфи шәрт ашағыдағы теоремдә көстәрилир.

Теорем 1. $[-\pi, \pi]$ парчасында кэсильмэјән, һиссэ-һиссэ һәмәр вэ $f(-\pi) = f(\pi)$ шәртини өдэјән $f(x)$ функцијасынын Фурје сырасы $[-\pi, \pi]$ парчасында һәмич функцијанын өзүнэ мүнтәзәм жығылыр.

Исбаты. $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссэ-һиссэ кэсильмэз $f(x)$ функцијасынын тригонометрик Фурје эмсалларыны ујғуя олар $a_k^{(1)}$ вэ $b_k^{(1)}$ илә ишарә етсәк, онда

$$a_k^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[f(x) \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+ \frac{\kappa}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \kappa x dx = \kappa b_{\kappa}$$

вә

$$b_{\kappa}^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin \kappa x dx = \frac{1}{\pi} f(x) \sin \kappa x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\kappa}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \kappa x dx = -\kappa a_{\kappa}$$

олар. Бурадан

$$a_{\kappa} = -\frac{b_{\kappa}^{(1)}}{\kappa} \quad \text{вә} \quad b_{\kappa} = \frac{a_{\kappa}^{(1)}}{\kappa} \quad (\kappa = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

мүнасибәтләри вә еләчә дә

$$|a_{\kappa}| + |b_{\kappa}| = \frac{|a_{\kappa}^{(1)}|}{\kappa} + \frac{|b_{\kappa}^{(1)}|}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} (|a_{\kappa}^{(1)}| + |b_{\kappa}^{(1)}|) \quad (3)$$

бәрабәрлији алыныр.

Шәртә көрә $f(x)$ функцијасынын $f'(x)$ төрәмәси $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәјәлир. Буна көрә дә онун үчүн Парсевал бәрабәрлији (§ 7, теорем 3) доғрудур:

$$\frac{[a_0^{(1)}]^2}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} [(a_{\kappa}^{(1)})^2 + (b_{\kappa}^{(1)})^2] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx < +\infty,$$

$$\left| \frac{a_{\kappa}^{(1)}}{\kappa} \right| < \frac{1}{2} \left[(a_{\kappa}^{(1)})^2 + \frac{1}{\kappa^2} \right]$$

вә

$$\left| \frac{b_{\kappa}^{(1)}}{\kappa} \right| < \frac{1}{2} \left[(b_{\kappa}^{(1)})^2 + \frac{1}{\kappa^2} \right]$$

бәрабәрсизликләриндә вә

$$\frac{[a_0^{(1)}]^2}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} [(a_{\kappa}^{(1)})^2 + (b_{\kappa}^{(1)})^2], \quad \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2}$$

сыраларынын јығылан олмасындан чыхыр ки,

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{|a_{\kappa}^{(1)}|}{\kappa} + \frac{|b_{\kappa}^{(1)}|}{\kappa} \right)$$

сырасы јығыландыр. Онда (3) бәрабәрлијинә көрә

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (|a_{\kappa}| + |b_{\kappa}|) \quad (4)$$

сырасы да јығыландыр. Демәл и, (1) сырасынын үмуми һәдди-нин мүтләг гијмәти јығылан мүсбәтһәдди (4) сырасынын ујғун һәддиндән бәјүк дејиядир:

$$|a_{\kappa} \cos \kappa x + b_{\kappa} \sin \kappa x| < |a_{\kappa}| + |b_{\kappa}|, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

Бу исә Вејерштрас әләмәтинә (XXXVI, § 3) көрә (1) сырасынын мүнтәзәм јығылдығыны көстәрир. (1) сырасынын $f(x)$ функцијасынын өзүнә јығылмасы әввәлки параграфда исбат едилмиш теоремдән (нәтичә 1) ајдындыр.

Нәтичә. $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәјән вә һиссә-һиссә һамар 2π дөврлү $f(x)$ функцијасынын Фурјә сыраһы һәмшә функцијаја бүтүн әдәд охунса мүнтәзәм јығылыр.

Верилмиш функцијанын тригонометрик Фурјә сырасынын јығылма сүрәти һәмшә функцијанын һамарла тәртибиндән, јәни дифференциалланма тәртибиндән асылыр. Бу 1-чи теоремин үмумиләшмәси олан ашағыдағы теоремдән көрүнә.

Теорем 2. *Тутаг ки, $f(x)$ функцијасынын $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссә-һиссә һамар m -тәртибли ($m \geq 1$) төрәмәси вар вә $f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi)$, $\kappa = 0, 1, \dots, m-1$ шәртләри өзлир. Онда онун тригонометрик Фурјә сырасы $[-\pi, \pi]$ парчасында һәмшә функцијанын өзүнә мүнтәзәм јығылыр вә бундан башга*

$$|S_n(x) - f(x)| = o\left(\frac{1}{n^{\frac{m-1}{2}}}\right) \quad (5)$$

мүнасибәти $[-\pi, \pi]$ парчасында мүнтәзәм оларағ өбәтилир.

§ 10. ТӘК ВӘ ЧҮТ ФУНКЦИЈАЛАРЫН ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЈЕ СЫРАСЫ

Тутаг ки, чүт $\varphi \in L^*$ функцијасы верилмишдир. Онда кәтәнилән тәм $\kappa \geq 1$ әдәди үчүн $\varphi(x) \cos \kappa x$ функцијасы чүт, $\varphi(x) \sin \kappa x$ функцијасы исә тәк функција олар. Бу һалда, φ -нин тригонометрик Фурјә әмсаллары

$$a_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos \kappa x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos \kappa x dx, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

вә

$$b_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin \kappa x dx = 0, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

дүстурлары илә һесабланыр (XLI, § 9), јәни онун бүтүн a_{κ} ($\kappa = 1, 2, \dots$) әмсаллары сыфра бәрабәр олур. Буна көрә дә φ -нин тригонометрик Фурјә сырасы

$$\varphi \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \cos \kappa x \quad (2)$$

шәклиндә, јәни аңчағ косинуслардан ибарәт олан сыра шәклиндә јазылыр.

Әкәр верилмиш $\varphi \in L^*$ функцијасы тәк оларса, онда $\varphi(x) \cos \kappa x$ тәк функција, $\varphi(x) \sin \kappa x$ исә чүт функција олар

Бу ҳалда, онун тригонометрик Фурје амсаллары

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos kx dx = 0$$

ва

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin kx dx \quad (3)$$

дүстурлары ила ҳисабланыр (XII, § 9) ва Фурје сырасы

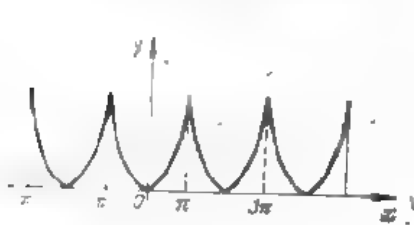
$$\psi \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (4)$$

шәклиндә жазылыр.

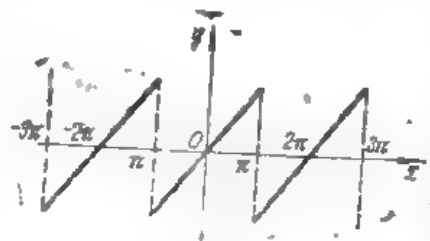
Демәли, верилмиш чүт функцијанын тригонометрик Фурје сырасы анчаг косинуслардан, тәк функцијанын тригонометрик Фурје сырасы иса анчаг синуслардан ибарат олур.

(2) ва (4) сыраларынын, үлгүн олараг $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцијаларына ығылмасы 8 ва 9-чу параграфларда, исбат едилмиш теоремләрлә мѳәјјән едилыр.

Мә'лумдур ки, $[0, \pi]$ парчасында (нә ја $[-\pi, 0]$ парчасында) верилмиш һәр бир $f(x)$ функцијасыны бүтүн әдәд охуна һәм чүт ва һәм дә тәк давам етдирмәк олар (XI, § 11). Буна кәрә дә $[0, \pi]$ парчасында верилмиш функција бүтүн әдәд охуна 2π дөврлү чүт давам етдирилдикдә косинуслар үзрә Фурје сырасына, тәк давам етдирилдикдә иса синуслар үзрә Фурје сырасына ајрылыр.



Шәкил 267



Шәкил 268

Мисал 1. $f(x) = x^2$ ($-\pi < x < \pi$) шәклиндә тә'јин олунмуш 2π дөврлү $f(x)$ функцијасыны тригонометрик Фурје сырасына ајырмалы (шәкил 267)

Верилмиш функција чүт олдуғундан

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \begin{cases} \frac{4}{k^3}, & k \text{ чүт олдуғда} \\ -\frac{4}{k^3}, & k \text{ тәк олдуғда} \end{cases}$$

ва

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx = 0$$

олар. Онда онун Фурје сырасы

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^3} - \frac{\cos 2x}{2^3} + \frac{\cos 3x}{3^3} - \dots \right) \quad (5)$$

шәклиндә жазылар. $f(x)$ бүтүн әдәд охунда кәсилмәјән ва һиссә-һиссә һамар функција олдуғундан (5) сырасы онун өзүнә ығылыр (§ 8, нәтичә 2). Јә'ни

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^3} - \frac{\cos 2x}{2^3} + \frac{\cos 3x}{3^3} - \dots \right) \quad (6)$$

барабарлији тоғрудур (6) барабарлијиндә $x = \pi$ кәтрдикдә

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots \right),$$

ва ја

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (7)$$

мүнәсибәти алыныр

Мисал 2. $f(x) = x$ ($-\pi < x < \pi$) шәклиндә верилмиш функција бүтүн әдәд охуна дөври давам етдирилмишдир (шәкил 268). Алынған 2π дөврлү $f(x)$ функцијасыны тригонометрик Фурје сырасына ајырмалы.

Бу функција тәк олдуғундан

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ва

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

олар. Онда онун тригонометрик Фурје сырасы

$$f \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} \quad (8)$$

кими жазылар.

2π дөврлү $f(x)$ функцијасы һиссә-һиссә кәсилмәјән ва һиссә-һиссә һамар функција олдуғундан онун Фурје сырасы кәсилмәзлик нәгтәсиндә өзүнә (§ 8, нәтичә 2)

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k},$$

кәсилмә нәгтәләриндә ($+\pi, +3\pi, +5\pi, \dots$) иса сифра ығылыр (сол ва сағ лимитләрин чәми сифра барабардир)

§ II. ИХТИЈАРИ $(-l, +l)$ ИНТЕРВАЛЫНДА
ВЕРИЛМИШ ФУНКСИЈАНЫН ТРИГОНОМЕТРИК
ФУРЈЕ СЫРАСЫНА АЈРЫЛМАСЫ

Тутак ки, верилмиш $2l$ дөврлү $f(t)$ дөври функциясини
Фурје сырасына ајрмаг лазымдыр. Бу мәсәдлә

$$x = \frac{\pi}{l} t, \quad -l < t < l, \quad -\pi < x < \pi$$

хәтти функцијасы вәситәсклә $[-l, l]$ парчасыны $[-\pi, \pi]$ пар-
часына ин'икас етдирәк. Онда

$$\varphi(x) = f\left(\frac{l}{\pi} x\right)$$

функцијасы x -ә нәзәрән 2π дөврлү функција олар:

$$\varphi(x+2\pi) = f\left[\frac{l}{\pi}(x+2\pi)\right] = f\left(\frac{l}{\pi}x + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = \varphi(x).$$

Бу функцијанын тригонометрик Фурје әмсалларыны

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f\left(\frac{l}{\pi}x\right) \cos nx \, dx, \quad (1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f\left(\frac{l}{\pi}x\right) \sin nx \, dx$$

дүстурлары илә һесаблајараг, онун

$$\varphi(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2)$$

тригонометрик Фурје сырасыны јазмаг олар.

Фәрә едәк ки, (2) Фурје сырасы $[-\pi, \pi]$ парчасында $\varphi(x)$
функцијасынын өзүнә јығылыр:

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Бу бәрәбәрликдә x әвәзинә $x = \frac{\pi}{l} t$ јаздыгда, көһнә t дә-
јишәзинә нәзәрән $[-l, l]$ парчасында доғру олан

$$\varphi\left(\frac{\pi}{l} t\right) = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t\right)$$

бәрәбәрлији алыныр. Бу һәлдә a_n әә b_n әмсаллары (1) дүс-
турларындан алына

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x\right) \cos nx \, dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t \, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x\right) \sin nx \, dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t \, dt$$

бәрәбәрликләри вәситәсклә һесафланыр.

Беләликлә, $2l$ дөврлү $f(t)$ функцијасы

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t\right), \quad (3)$$

кими тригонометрик Фурје сырасына ајрылыр вә онун триго-
нометрик Фурје әмсаллары

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t \, dt, \quad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t \, dt$$

үстурлары илә һесафланыр.

Гәјд едәк ки, $f(t)$ функцијасы $[-l, l]$ парчасында һиссә
һиссә кәсилмәјән (вә ја һиссә һиссә һамар) функција олдугда,
она ујғун олан $\varphi(x)$ функцијасы да $[-\pi, \pi]$ парчасында һиссә-
һиссә кәсилмәјән (вә ја һиссә-һиссә һамар) функција олур.
Бунун тәрсинә доғрудур. Јә'ни $\varphi(x)$ функцијасы $[-\pi, \pi]$ пар-
часында һамсы шәртләри өтәјирсә, она ујғун олан $f(t)$ функ-
сијасы да $[-l, l]$ парчасында һәммин шәртләри өтәјир. Бура-
дан ајдындыр ки, функцијаларын $[-\pi, \pi]$ парчасында триго-
нометрик Фурје сырасына ајрылмасы һаггында олан бүтүн
тәклифләр, $[-l, l]$ парчасында верилмиш функцијаларын 3-
шәклиндә Фурје сырасына ајрылмасы һаггында да доғрудур.
 $[-l, l]$ парчасында (вә ја $(-l, l)$ интервалында) верилмиш
функцијаны (3) шәклиндә тригонометрик Фурје сырасына
ајрмаг үчүн ону бүтүн әдәд охуна дөври ($2l$ дөврлү) дәвим
етдирмәк лазымдыр. Бу заман, § 8-дә кәстәрилдији кими бә-
зән функција гијмәтләрини $+l$ нәггәләриндә дәјишмәк лазым
олур ки, бу да онларын кәсилмәзлијини позә билир.

$2l$ дөврлү $f(t)$ функцијасы чүт функција оларсә, онда
әнчәг косинуслардан ибарәт олан

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t$$

шәклиндә Фурје сырасына, тәк функција олдугда иәә әнчәг
синуслардан ибарәт олан

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} t$$

шәклиндә тригонометрик Фурје сырасына ајрылар.

$[0, l]$ вэ $[-l, 0]$ парчасында верилмиш бэр бир $f(t)$ функцијасыны да бүтүн эдэд охуна чүт вэ l тэк давам етдирмәклә ону анчаг косинуслар вэ l анчаг синуслар үзрә тригонометрик Фурје сырасына ајырмаг олар.

Бэр һансы $[a, b]$ парчасында верилмиш вэ дөври олмајан $f(t)$ функцијасыны да эдэд охуна дөври давам етдирмәклә ону тригонометрик Фурје сырасына ајырмаг мүмкүндүр. Бу мәгсәдлә, дөврү $2l > |b-a|$ олан вэ $[a, b]$ парчасында верилмиш $f(t)$ функцијасы илә үст-үстә дүшән $\varphi(t)$ функцијасыны Фурје сырасына ајырмаг лазымдыр. Бу сыранын чәми $[a, b]$ парчасында верилмиш $f(t)$ функцијасы илә үст-үстә дүшәр (әлбәттә, Фурје сырасы $\varphi(t)$ функцијасына јығылан олдуғина).

Мисал, $f(x) = x$ ($-1 < x < 1$) функцијасыны Фурје сырасына ајырмалы.

Бу тэк функцијанын бүтүн эдэд охуна 2 дөврлү ($l=1$) давамчы

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x \quad (5)$$

шәклиндә Фурје сырасына ајрылып. Бурада

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin k\pi x dx = 2 \int_0^1 x \sin k\pi x dx = \\ &= -\frac{2 \cos k\pi}{k\pi} = (-1)^{k+1} \frac{2}{k\pi}, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned}$$

$f(x)$ функцијасы ($-1, 1$) интервалында кәсилмәјән вэ һамар функција олдуғундан онун Фурје сырасы һәммин интервалда өзүнә јығылып:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin k\pi x}{k}, \quad -1 < x < 1. \quad (6)$$

Бу бәрәбәрликдә $x = \frac{1}{2}$ көтүрдүклә

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right]$$

вэ l

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (7)$$

бәрәбәрлији алыныр.

§ 12. ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЈЕ СЫРАСЫНЫН КОМПЛЕКС ШӘКЛИ

Тутаг $k\pi, 2\pi$ дөврлү $f(x)$ функцијасы тригонометрик Фурје сырасына ајрылмышдыр:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (1)$$

Бурада a_k вэ b_k тригонометрик Фурје әмсаллары

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \sin kx dx \quad (k=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

дүстурлары илә һесабыланыр. Ејлер дүстурларындан (XXXVII, § 6) истифадә едәрәк, $\cos kx$ вэ $\sin kx$ функцијаларыны үстү, функцијалар вәситәсилә ифадә едәк:

$$\cos kx = \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

Бу гијмәтләри (1) бәрәбәрлијиндә јеринә јаздыгда

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ikx} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-ikx} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

алыныр. Бурада

$$\frac{a_0}{2} = C_0, \quad \frac{a_k - ib_k}{2} = C_k, \quad \frac{a_k + ib_k}{2} = C_{-k}$$

әвәзләмәләрини апардыгда (3) сырасы

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{ikx} + C_{-k} e^{-ikx})$$

вэ l

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx} \quad (4)$$

шәклиндә јазылып.

(4) сырасына тригонометрик Фурје сырасынын комплекс шәкли дејилир.

Инди (2) дүстурларындан истифадә едәрәк C_k вэ C_{-k} ($=\bar{C}_k$) әмсалларынын интеграл вәситәсилә ифадәсини тапаг.

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2} (a_k - ib_k) = \frac{1}{2\tau} \left(\int_{-\tau}^{\tau} f(x) \cos kx dx - \right. \\ &\left. - i \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \sin kx dx \right) = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) (\cos kx - i \sin kx) dx = \\ &= \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (5)$$

Ејни гајда илэ

$$C_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx \quad (6)$$

дүстуруну ва $C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ барабарлијинин доғрулуғу-

ну да көстөрмөк олар. C_k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) әдәдләринә $f(x)$ функцијасынын комплекс Фурје әмсаллары дејиләр. (5) ва (6) дүстурларыны бир дүстур шәклиндә јазмағ олар:

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (7)$$

2l дөврлү $f(x)$ функцијасынын тригонометрик Фурје сыра-
сынын (§ 11) комплекс шәкли

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx} \quad (8)$$

кими, онун комплекс Фурје әмсалларынын интеграл васитәсилә ифадәси исә

$$C_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-ikx} dx \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9)$$

шәклиндә олар.

Тригонометрик Фурје сырларынын комплекс шәклиндән ријазиијатда ва онун мүхтәлиф тәтбигләриндә кеніш истифалә олунур. Комплекс шәклиндә көтүрүлмүш Фурје сырлары үзәриндә бир сыра әмәлләр даһа асан апарылыр.

§ 13. ФУНКЦИЈАЛАРЫН БЕССЕЛ ФУНКЦИЈАЛАРЫ ҮЗРӘ ФУРЈЕ СЫРАСЫНА АЈРЫЛМАСЫ

Тутағ ки, $I_\nu(x)$ ($\nu > 0$ там әдәддир), ν индексин Бессел функцијасыдыр ва

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (1)$$

онун мүсбәт сыфырларыдыр: $I_\nu(\lambda_k) = 0$, $k=1, 2, \dots$. Биз әввәлләр (XXXVII, § 10) көстөрмәшик ки, $I_\nu(x)$ Бессел функцијасы үчүн

$$\int_0^1 x I_\nu(\lambda_k x) I_\nu(\lambda_l x) dx =$$

$$J = \begin{cases} 0, & k \neq l \text{ олдуғда} \\ \frac{1}{2} \left\{ [I'_\nu(\lambda_k)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_k^2}\right) [I_\nu(\lambda_k)]^2 \right\}, & k=l \text{ олдуғда} \end{cases}$$

мүнәсибәти доғрудур. Бу көстәрир ки,

$$I_\nu(\lambda_1 x), I_\nu(\lambda_2 x), \dots, I_\nu(\lambda_n x), \dots \quad (3)$$

Бессел функцијалары системи $[0, 1]$ парчасында x чәкисинә кәрә ортогоналдыр.

Бир чох мәсәләләрин һәллиндә, хусусилә ријазии физика тәнликләринин һәлл едәркән, верилмиш функцијаны там систем тәшкил едәв (3) Бессел функцијалары үзрә Фурје сырасына ајрмағ тәләб олунур. $[0, 1]$ парчасында мәјәјән шәртләри едәјән функцијалары (3) Бессел функцијалары үзрә Фурје сырасына ајрмағ олар.

Тутағ ки, $[0, 1]$ парчасында интегралланан $f(x)$ функцијасы (3) Бессел функцијалары үзрә Фурје сырасына ајрыл-
мышдыр:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k I_\nu(\lambda_k x). \quad (4)$$

Онда бу ајрылышын әмсаллары

$$C_k = \frac{\int_0^1 x f(x) I_\nu(\lambda_k x) dx}{\int_0^1 x [I_\nu(\lambda_k x)]^2 dx}, \quad k=1, 2, \quad (5)$$

дүстур илә һесәбланыр.

(4) сырасына $f(x)$ функцијасынын Фурје-Бессел сырасы

(5) әдәдләринә исә Фурје-Бессел әмсаллары дејиләр

Фурје-Бессел сырасынын $f(x)$ функцијасынын өзүнә иҗ-
ғылдығы мә’лум олмадығда (4) әвәзинә

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k I_\nu(\lambda_k x) \quad (6)$$

кими јазырлар.

Фурје-Бессел сырасынын иҗғылмасы һәггында аҗағымтәһи теорәмни сәјләмәк олар:

Теорәм. Тутағ ки, $f(x)$, $[0, 1]$ парчасында һиссә-
һиссә кәсиләмәјән ва һиссә-һиссә һәмийр функцијадыр.
Онда онун (6) Фурје-Бессел сырасы һәр бир $x \in (0, 1)$

нөгтәсиндә $S(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$ чәминә иҗғылыр.

Хусуси һалда, $f(x)$ функцијасы $x \in (0, 1)$ нөгтәсиндә кә-
силмәз олдуғда (6) сырасы һәмийр нөгтәдә функцијанын өзүнә
иҗғылыр, јәни (4) барабарлији доғру олур.

§ 14. ТРИГОНОМЕТРИК ФУРЖЕ СЫРАЛАРЫНЫН ӘДӘДИ ОРТА ГИМӘТ ҮСУЛУ ИЛӘ ЧӘМЛӘНМӘСИ

Тутар ки, $f(x)$, бүтүн әдәд охунда тә'јин олунмуш, кәсилмәјән вә 2π дөврлү функциядыр. Јәни $f \in C^*$. Белә функци-
јалар өз

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

Фурје сыралары илә биргиләтләр тә'јин олунур. Бу о демәк-
дир ки, ејни Фурје сырасы олар ики $f \in C^*$ вә $\varphi \in C^*$ функ-
сијалары ејниликлә бәрәбәрди (§ 7). Лакин кәсилмәјән функ-
сијанын Фурје сырасы ајры-ајры нөгтәләрдә вә һәтта һесаби
нөгтәләр чохлағунда дағшлә биләр. Буна кәрә дә кәсилмәјән
функцијалары өз Фурје сыраларының чәми, јәни сыранын ху-
суси чәмләринин лимити кимитәпмағ һәмишә мүмкүн дејилдир.

Бәс онда Фурје сырасы мә'лум олар кәсилмәјән функци-
јаны нечә тапмағ олар?

Бу мәсәлә, ашағыда исбат етдијимиз Фејер' теореми вәси-
тәсилә һәлл олунур.

Тутар ки, $S_n(x)$ вә $D_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) илә (1) сыра-
сының ујғун оларағ хуsusи чәмләр вә Дирихле нүвәси ишәрә
олунмушдур. Онларын

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}, \quad (2)$$

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \dots + D_n(x)}{n+1}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

ким һесаби орталарының дүзәлдәк.

(2) ифадәсинә f функцијасының n -тәртибли Фејер чәми,
(3) ифадәсинә исә онуи n -тәртибли Фејер нүвәси дејилир.

Фурје сырасының n -чи хуsusи чәми үчүн § 8-дә алдығымыз

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) D_n(u) du \quad (4)$$

дүстуруну (2) бәрәбәрлијиндә нәзәрә алдыгда n -тәртибли
Фејер чәми

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \Phi_n(u) du \quad (5)$$

шәклиндә јазылр. Дирихле нүвәсинин орада кәстәрилән

$$D_n(u) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}}$$

¹ Л. Фејер (1880—1929) маңар рәһбәрләр чәми.

ифадәсинә әсәсэн

$$\begin{aligned} (n+1) \Phi_n(x) &= \sum_{k=0}^n D_k(u) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin \frac{2k+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{2 \sin \frac{u}{2} \cdot \sin \frac{2k+1}{2} u}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} = \sum_{k=0}^n \frac{\cos ku - \cos (k+1) u}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} = \\ &= \frac{1 - \cos (n+1) u}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} u}{\sin^2 \frac{u}{2}} \end{aligned}$$

бәрәбәрлији вә бурадан да n -тәртибли Фејер нүвәси үчүн

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} u}{\sin^2 \frac{u}{2}} \quad (6)$$

дүстуру алыныр. Дирихле нүвәсинин § 8-дә кәстәрилән (7)
ифадәсинә әсәсэн Фејер нүвәси үчүн

$$\Phi_n(u) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{n+1} \cos ku \quad (7)$$

ифадәсини алмағ олар. Буна әсәсэн Фејер чәмини

$$\sigma_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{n+1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (8)$$

ким дә јазмағ олар. Бу кәстәриләр ки, n -тәртибли Фејер чәми
 n -тәртибли тригонометрик чохлағилдир

(6) вә (7) дүстуруларындын Фејер нүвәсинин ашағыдағы
хәссәләри алыныр:

1) n -чи бүтүн гијмәтләриндә $\Phi_n(u) > 0$,
2) $\Phi_n(u)$ чүт, кәсилмәјән вә дөври (2π дөврлү) функција-
дыр.

$$3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) du = 1 \quad (9)$$

бәрәбәрлији доғрудур (бу (7) бәрәбәрлијиндә әсанлығла
алыныр).

4) Истәнилән $0 < \delta < \pi$ әдәди үчүн

$$\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(u) du < \frac{1}{n+1} \int_{\delta}^{\pi} \frac{du}{\left(\sin \frac{u}{2}\right)^2} = \frac{1}{(n+1) \sin \frac{\delta}{2}} \quad (10)$$

мүһәсбәти әдәдилдир.

(5) вэ (9) барабарликлэринэ эсасэн

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x)] \Phi_n(u) du \quad (10)$$

ифадэси алыныр.

Теорем (Фејер). Истәнилән $f \in C^*$ функцијасынын $\{\sigma_n(f, x)\}$ Фејер чәйләри ардычыллыгы бүтүн әдәд оғуноа $f(x)$ функцијасына жүнтәзәж јыгылыр. Јә'ни

$$\|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_C \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (11)$$

мүнәсибәти өдәнилир.

Исбатм. $f(x)$ функцијасы мунтәзәм кәсилмәјән олдуғундан онун $\omega(f; \delta) = \sup_{0 < |u| \leq \delta} \|f(x+u) - f(x)\|_C$ кәсилмәзлики модулу үчүн $\omega(f; \delta) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) мүнәсибәти доғрудур (XXVI, § 8). Онда ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\delta_0 > 0$ вар ки, $0 < \delta < \delta_0$ олдугда $\omega(f; \delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ барабарсизлији өдәнилир.

Бундан башга, $f(x)$ функцијасы кәсилмәјән олдуғундан мәһдуддур: $|f(x)| \leq M$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Беләликлә, (10) барабарлијиндән, интегралы үч һиссәјә бөлмәклә

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f, x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+u) - f(x)| \Phi_n(u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) < \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(u) du + \omega(f; \delta) \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) du < \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(u) du + \omega(f; \delta) \end{aligned} \quad (12)$$

мүнәсибәти алыныр

4) хәссәсинә кәрә ихтијари $\varepsilon > 0$ үчүн елә N вар ки, n -ин $n > N$ гәјмәтләриндә

$$\frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(u) du < \frac{\varepsilon}{2}$$

барабарсизлији өдәнилир. Онда $0 < \delta < \delta_0$ вә $n > N$ олдугда x -ин бүтүн гәјмәтләриндә (12) мүнәсибәтиндән

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| < \varepsilon$$

барабарсизлији алыныр ки, бу да теоремин доғру олдуғуну кәстәрир.

Фејер теореминдән бир сыра мүнәм нәтичәләр алыныр.

Нәтичә 1. Тригонометрик функцијалар системи $C^*[-\pi, \pi]$ фәзасында тамдыр.

Доғрудан да, һәр бир $f \in C^*[-\pi, \pi]$ функцијасыны бүтүн әдәд охуна дөври (2π дөврлү) давам етдирмәк олар вә Фејер теореминә кәрә һәр бир дөври функција $C^*[-\pi, \pi]$ фәзасынын нормасында $\{\sigma_n\}$ тригонометрик чохһәдлиләр (Фејер чәмләри) ардычыллыгынын лимитидир.

Бу нәтичә әввалләр башга үсулла исбат едилмишдир (§ 7).

Кәсилмәјән функцијалар чохлуғунун $L_2[-\pi, \pi]$ фәзасында һәр јердә сых сымасындан вә сәјләдијимиз нәтичәдән чыхыр ки, тригонометрик функцијалар системи $L_2[-\pi, \pi]$ фәзасында да тамдыр.

Нәтичә 2. Тригонометрик функцијалар системи $L_2[-\pi, \pi]$ фәзасында тамдыр.

Фејер теореминдән, китабын I чилдиндә сәјләдијимиз Вејерштрасын 2-чи теореминин (XIX, § 9) доғрулуғу да алыныр.

Нәтичә 3. (Вејерштрасын 2-чи теорем). Әкәр $f(x)$ функцијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәјән вә $f(-\pi) = f(\pi)$ шәртини өдәјән, јә'ни $f \in C^*[\pi, \pi]$ олан функцијадырса, онда истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $T(x)$ тригонометрик чохһәдлиси вар ки, x -ин $[-\pi, \pi]$ парчасындакы бүтүн гәјмәтләриндә

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad (13)$$

барабарсизлији өдәнилир.

Доғрудан да, һәр бир $f \in C^*[-\pi, \pi]$ функцијасы үчүн ахтарылан $T(x)$ чохһәдлиси оларақ һәмни функцијанын $\sigma_n(f, x)$ Фејер чәминин кәтүрмәк олар.

Бурадан ајдындыр ки, Вејерштрас теореминдә һәр бир $f \in C^*[-\pi, \pi]$ функцијасы үчүн (13) шәртини өдәјән тригонометрик $T(x)$ чохһәдлисинин аңчаг варлығы кәстәриллиј һалда Фејер теореминдә верилмиш функција үчүн (13) барабарсизлијини өдәјән конкрет чохһәдли кәстәрилир. Бу мә'нада, Фејер теорем Вејерштрас теореминдә "күчлүдүр".

Вејерштрасын 2-чи теореминин доғрулуғундан онун ашағыдакы 1-чи теореминин (XIX, § 9) доғрулуғу да алыныр:

Вејерштрасын 1-чи теорем: Әкәр $f(x)$ функцијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјәндирсә, онда истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә чәбри $P(x)$ чохһәдлиси вар ки, x -ин $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гәјмәтләриндә

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (14)$$

барабарсизлији өдәнилир.

Исбатм. $[a, b]$ парчасынын f хәтти функцијасы вәситәсилә $[0, \pi]$ парчасына инһикә етдирилкдә $f(x)$ функ-

сијасы $[0, \pi]$ парчасында кәсилмәјән

$$f(x) = f\left[a + \frac{t(b-a)}{\pi}\right] = \varphi(t)$$

функцијасына чеврилр. $\varphi(t)$ функцијасыны $\varphi(t) = \varphi(-t)$ шәр-
тилә әввалчә $[-\pi, 0]$ областына, сонра да бүтүн әдәд охуна
дәври давам етдирсәк, онда C^* синфинә дахил олан функција
аларыг. Бу функција вә истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн Вейер-
штрассын 2-чи теореминә кәрә елә $T(t)$ тригонометрик чоххәд-
лисик вәр ки, t -нин бүтүн гијмәтләриндә

$$|T(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (15)$$

бәрәбәрсизлији өдәнилик.

$\sin kt$ вә $\cos kt$ ($k = 1, 2, \dots$) функцијалары әдәд охунун
истәнилән сонлу парчасында мунтәзәм ығылан гүввәт сыра-
сына ајрылдығындан (XXXVII, § 6), онларын хәтти комбина-
сијасы олан $T(t)$ чоххәдлисик дә бүтүн әдәд охунда ығылан
гүввәт сырасына ајрылыр:

$$T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k.$$

Тутаг ки, бу сыранын

$$|T(t) - S_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (16)$$

бәрәбәрсизлијини өдәјән хүсуси чәми $S_n(t)$ илә ишарә едил-
мишдир (бу нәмишә мүмкүндүр!). Онда (15) вә (16) бәрәбәр-
сизликләриндән

$$|\varphi(t) - S_n(t)| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (17)$$

мүнәсибәти, бурадан да t -ни $t = \frac{x-a}{b-a} \pi$ илә әвәс етдикдә x -ин
 $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә доғру олан

$$\left| f(x) - S_n\left(\frac{x-a}{b-a} \pi\right) \right| < \varepsilon$$

бәрәбәрсизлији алыныр. $S_n\left(\frac{x-a}{b-a} \pi\right) = P(x)$ n -дәрәжәли чәб-
и чоххәдли олдуғундан (14) бәрәбәрсизлијинин өдәнилмәси,
јәни теоремин доғрулуғу ајдындыр.

Нәтичә 4.

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \quad (18)$$

функцијалар системи $C[a, b]$ фәзасында, јәни $[a, b]$ пар-
часында кәсилмәјән функцијалар фәзасында тамдир.

Нәтичә 5. (18) функцијалар системи $[a, b]$ парчасында
кәсилмәјән функцијаларын $L_2^{(C)}[a, b]$ фәзасында тамыр.

Доғрудан да, һәр бир $f \in L_2^{(C)}[a, b]$ функцијасы $[a, b]$ пар-

часында кәсилмәјән олдуғундан 4-чү нәтичә кәрә иктијари
 $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $P(x)$ чәбри чоххәдлисик вәр ки,

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}, \quad a \leq x \leq b$$

бәрәбәрсизлији өдәнилик. Бурадан

$$\|f(x) - P(x)\|_{L_2^{(C)}} = \sqrt{\int_a^b |f(x) - P(x)|^2 dx} < \varepsilon$$

бәрәбәрсизлији алыныр. Бу да нәтичәнин доғру олдуғуну
көстәрир.

III КИССО

БИРДӘЛИШӘНЛИ ФУНКЦИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛ ҺЕСАБЫ

XXI Фәсик. Гејри-мүәјјән интеграл

§ 1. Ибтидаи функција ва гејри-мүәјјән интегралын тәрифи	3
§ 2. Гејри-мүәјјән интегралын садә хәссәләри	6
§ 3. Әсас интеграллар чәдвәли	8
§ 4. Интеграллама усуллары	10
§ 5. Садә расионал кәсрләр ва оялары интегралланмасы	16
§ 6. Расионал кәсрләрн садә кәсрләрә әйрилмәси	18
§ 7. Расионал кәсрләрн интегралланмасы	22
§ 8. Садә иррасионал функцијаларын интегралланмасы	26
§ 9. Ејләр әвәзләмәләри	28
§ 10. Биномиал дифференциалларын интегралланмасы	31
§ 11. Тригонометрик функцијалар дахил олан ифәдәләрин интегралланмасы	34

XXII Фәсик. Мүәјјән интеграл

§ 1. Интеграл чәми ва мүәјјән интегралын тәрифи	37
§ 2. Дәрбу чәмләрн	41
§ 3. Мүәјјән интегралын вәрлыг теоремн	43
§ 4. Кәсilmәјән ва монотон функцијаларын интегралланан оялмасы	45
§ 5. Мүәјјән интегралын әсас хәссәләри	46
§ 6. Орта гijмәт теоремн	50
§ 7. Јухары сәрһадә дәјишән оялм мүәјјән интеграллар	51
§ 8. Нјутон-Лейбниц дүстуру	53
§ 9. Мүәјјән интегралын һесаблилма усуллары һатгилдә	55
§ 10. Тејлор дүстуру галыг һәддинин интеграл шәкзил	59
§ 11. Мүәјјән интегралын тәгриби һесаблилмасы	60

XXIII Фәсик. Мүәјјән интегралын тәтбиғләри

§ 1. Интеграл нәјә азымдыр?	66
§ 2. Мүстәви фигурун сәһәси ва онун дүзбүчәкли координат системнлә һесаблилмасы	67
§ 3. Әйрихәтли секторун сәһәси	70
§ 4. Әйри гijмсүнүн узунлуғу	71
§ 5. Чисимләрин һәчинин һесаблилмасы	75
§ 6. Фирланмадан алынган сәтнин сәһәси	77
§ 7. Мәдди нәггәләр системинин статик моментн ва ағырлыг маркәзи	79
§ 8. Мәдди әйринин статик моментн ва ағырлыг маркәзи	80
§ 9. Мәдди мүстәви фигурун статик моментн ва ағырлыг маркәзи	83
§ 10. Күдәт теоремләри	85
§ 11. Мүәјјән интеграл вәситәсилә чәмләрн һесаблилмасы	86

XXIV Фәсик. Гејри-мәхсуси интеграллар

§ 1. Мүәјјән интегралын үмумиләшмәси	88
§ 2. Сонсуз сәрһадли гејри-мәхсуси интеграллар	88
§ 3. Сонсуз сәрһадли гејри-мәхсуси интегралларын хәссәләри	92
§ 4. Сонсуз сәрһадли гејри-мәхсуси интегралларын јығылма әләмәтләри	94
§ 5. Коши критериси ва Абел әләмәти	96
§ 6. Гејри-мәһдуд функцијаларын гејри-мәхсуси интегралы	100
§ 7. Гејри-мәһдуд функцијаларын гејри-мәхсуси интегралын хәссәләри ва јығылма әләмәтләри	102
§ 8. Коши критериси ва интегралын мүтләг јығылма әләмәти	107
§ 9. Интегралын бәш гijмәти.	109

IV КИССО

ЧОХДӘЛИШӘНЛИ ФУНКЦИЈАЛАРЫН ДИФЕРЕНЦИАЛ ҺЕСАБЫ

XXV Фәсик. Чохәлчүлү фәзада нәггәләр чохлуғу

§ 1. Метрик фәзалар	112
§ 2. Чохәлчүлү Евклид фәзасында мәсифә ва әтраф әйләјиши	116
§ 3. Евклид фәзасынын нәггәләрн әрлимчәллығи	121
§ 4. Евклид фәзасында дүз хәтт, кәсilmәз әйри ва област әйләјиши	124

XXVI Фәсик. Чохдәлишәнли функција. Онун лимити ва кәсilmәзлјји

§ 1. Чохдәлишәнли функцијанын тәрифи	126
§ 2. Функцијанын лимити	129
§ 3. Тәкряр лимит	132
§ 4. Чохдәлишәнли функцијанын кәсilmәзлјји	135
§ 5. Мүрәккәб функција ва онун кәсilmәзлјји	137
§ 6. Гапалы чохлуғда кәсilmәзлјји функцијанын хәссәләри	139
§ 7. Чохдәлишәнли функцијанын мунгазәт кәсilmәзлјји	140
§ 8. Кәсilmәзлик модулу	142

XXVII Фәсик. Чохдәлишәнли функцијанын тәрәмәси ва дифференциалы

§ 1. Хүсуси тәрәмә.	144
§ 2. Функцијанын нәггәдә дифференциалланан оялмасы	147
§ 3. Функцијанын дифференциалланан оялмасы үчүн әзрури шәртләр	149
§ 4. Функцијанын дифференциалы	151
§ 5. Функција дифференциалынн һәндәси мәнасы	153
§ 6. Мүрәккәб функцијанын тәрәмәси	156
§ 7. Дифференциал шәклинин инвариантлығи	158
§ 8. Јүксәктәртибли хүсуси тәрәмәләр	160
§ 9. Јүксәктәртибли дифференциаллар	162
§ 10. Истигамәт үзәрә тәрәмә	165
§ 11. Градиент	167
§ 12. Тејлор дүстуру	169

XXVIII Фәсик. Гејри-ашкар функцијалар ва оялары тәтбиғи

§ 1. Бирдәлишәнли гејри-ашкар функцијанын вәрлығи ва дифференциалланмасы	171
§ 2. Бирдәлишәнли гејри-ашкар функцијаларын бир сыра тәтбиғләри	173
§ 3. Чохдәлишәнли гејри-ашкар функција ва онун вәрлығи	176
§ 4. Гејри-ашкар шәкилдә тәкликлә вәрланнган сәтнин толукан мүстәвиси ва нормалы	178
§ 5. Тәкликләр системнәдән тәјийн олуған гејри-ашкар функцијалар ва Јакоби детерминанты	179
§ 6. Чохәлчүлү фәза областларынын гәршымлығи биргijмәтли кәсilmәси	182

XXIX фәсик. Чохдәјишәнли функцијаларыи екстремуму

§ 1. Функцијаныи локал екстремуму	183
§ 2. Экстремумуи зарлыгы үчүн кафи шарт	185
§ 3. Функцијаныи глобал екстремуму	188
§ 4. Шарты екстремум	189
§ 5. Лагранжын гејри-мүөјән вуруглар үсулу	193
§ 6. Әи кичик квадратлар үсулу	195

V НИССӘ

АДИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

XXX фәсик. Биртәртибли диференсиал тәнликләр вә онларын һәләи үсуллары

§ 1. Үмүи аилајышлар	199
§ 2. Биртәртибли диференсиал тәнликләр вә онларын һәдәси мәһәси	202
§ 3. Коши мәсәләси вә биртәртибли диференсиал тәнликләрин үмүи һәләи	206
§ 4. Дәјишәнләринә ајрылаи тәнликләр	211
§ 5. Бирчынсли диференсиал тәнликләр	213
§ 6. Биртәртибли хәтти диференсиал тәнликләр	216
§ 7. Бернулли тәнлији	218
§ 8. Там диференсиаллы тәнликләр	219
§ 9. Биртәртибли диференсиал тәнликләрин мәнхуси һәдәләри вә мәнхуси һәдәли	224
§ 10. Бирпараметри ајрылар айләсини бүрүдәи вә тәнлији мәнхуси һәләи тәпәлмәси	227
§ 11. Төрәмә нәзәрән һәлә олунмәмәш диференсиал тәнликләрин сәдә һәләри	230

XXXI фәсик. Јүксәктәртибли диференсиал тәнликләр

§ 1. Үмүи аилајышлар вә тәнликләр	234
§ 2. Тәртиби азалдыла билән диференсиал тәнликләр	237
§ 3. Хәтти бирчынсли тәнликләр	240
§ 4. Функцијалар системини хәтти асылылыгы вә Вронски детерминанты	243
§ 5. Хәтти бирчынсли диференсиал тәнликләрин үмүи һәләи гүрүмәси	247
§ 6. Остроградски-Лиувилл дүстуру	249
§ 7. Сабит әмсаллы хәтти бирчынсли тәнликләр	252
§ 8. Хәтти бирчынсли олмајән диференсиал тәнликләрин һәләи	258
§ 9. Сабит әмсаллы хәтти бирчынсли олмајән диференсиал тәнликләр	263
§ 10. Диференсиал тәнликләр үчүн сәрһәд мәсәләләри	269
§ 11. Механики рәгәсләри диференсиал тәнлији	273

XXXII фәсик. Диференсиал тәнликләр системи

§ 1. Үмүи аилајышлар	278
§ 2. Нормал системни мәнхуллаы јохетмә үсулу илә һәләи	282
§ 3. Хәтти диференсиал тәнликләр системи	285
§ 4. Сабит әмсаллы хәтти бирчынсли тәнликләр системи	288

XXXIII фәсик. Дәјәнигәи нәзәрјәсини элементләри

§ 1. Лјануис мәһәдә дәјәнигәи аилајышы	292
§ 2. Сабит әмсаллы хәтти диференсиал тәнликләр системи һәләи дәјәнигәи	296

§ 3. Динамик систем трајекторијаларыи сүкүт һәдәси әтрафында

§ 4. Лјануис теорем	303
---------------------	-----

XXXIV фәсик. Диференсиал тәнликләрин әдәи вә тәгриби һәләи

§ 1. Мәсәләни гәјүлүшү	305
§ 2. Пикарии итерәсија методу	306
§ 3. Ејлер методу	308
§ 4. Рунге-Кутта методу	311
§ 5. Адамс методу	313
§ 6. Милл методу	316

VI НИССӘ

СЫРАЛАР

XXXV фәсик. Әдәи сыралар

§ 1. Јығылаи әдәи сыралар вә онларын сәдә хәсәләри	318
§ 2. Сыраныи гәлмәи вә оңун јығылмәси һәггында әрури вә кафи шәртләр	322
§ 3. Мүсбәтһәдәи сыраларыи јығылмә әләмәтләри	325
§ 4. Ишарәсини нәвбә илә дәјишән сыралар	333
§ 5. Мүтләг јығылаи сыралар	337
§ 6. Шәртјығылаи сыралар	338
§ 7. Сыраларыи һәсили	341
§ 8. Комплекс һәдәи сыралар	343

XXXVI фәсик. Функционал ардычыллыглар вә сыралар

§ 1. Функционал ардычыллыгыи јығылмәси	346
§ 2. Функционал сыраларыи јығылмәси	348
§ 3. Коши критериси	351
§ 4. Сыраныи мүнтәзәм јығылмәси һәггында Вејерштрасс әләмәти	353
§ 5. Дирихле әләмәти	355
§ 6. Сыр чәкии кәсимәзәлији	358
§ 7. Сыраныи һәдбәһәд интегралланмәси	359
§ 8. Сыраныи һәдбәһәд диференсиалланмәси	361

XXXVII фәсик. Гүвәт сыралары

§ 1. Гүвәт сыраларыи јығылмәси	364
§ 2. Гүвәт сырәсыи мүнтәзәм јығылмәси	368
§ 3. Гүвәт сырәсыи һәдбәһәд интегралланмәси вә диференсиалланмәси	370
§ 4. Функцијаларыи гүвәт сырәсыи ајрылмәси	372
§ 5. Функцијаларыи Тејлор сырәсыи ајрылаи бәлмәси шәртләри	375
§ 6. Еләментәр функцијаларыи Тејлор сырәсыи ајрылмәси	377
§ 7. Интегралларыи вә функција гүвәтләрии сырә вәсәтәсәи һәсәлланмәси	381
§ 8. Гүвәт сыраларыи кәмәји илә диференсиал тәнликләрии һәләи	384
§ 9. Бессел тәнлији	387
§ 10. Бессел функцијаларыи бир сырә хәсәләри	391

XXXVIII фəsil. Фурје сырасы

§ 1. Хətti нормалашмыш фəзаларын тэмлыгы	393
§ 2. $L_p^{(p)}$ [a, b] вə L_p фəзалары	398
§ 3. Һилберт фəзасы	402
§ 4. Ортонормал систем үзə Фурје сырасы	408
§ 5. Там вə гапалы ортонормал системлэр	411
§ 6. Һилберт фəзасында ортонормал системлэр	414
§ 7. Тригонометрик функцијалар системи үзə Фурје сырасы	419
§ 8. Тригонометрик Фурје сырасынын нөгтөлə жығылмасы	424
§ 9. Тригонометрик Фурје сырасынын мүнтəзəм жығылмасы	431
§ 10. Тəк вə чүт функцијаларын тригонометрик Фурје сырасы	433
§ 11. Ихтијари $(-l, +l)$ интервалында верклинш функцијанын тригонометрик Фурје сырасына ажрылмасы	436
§ 12. Тригонометрик Фурје сырасынын комплекс шəкли	438
§ 13. Функцијаларын Бессел функцијалары үзə Фурје сырасына ажрылмасы	440
§ 14. Тригонометрик Фурје сыраларынын əдəди орта гүјмəт үсүлү вə мөмләнмəsi	442

Рашид Гамид оглы Мамедов

Доктор физико-математических наук, профессор

Курс высшей математики

II том

Учебник

(на азербайджанском языке)

Нəшријат редактору Е. Дадашова

Бəдди редактору У. Мəхмудјева

Техники редактору Ə. Рəшизов

Корректорлары С. Агајева, С. Асланова

ИБ — 1483

Жығылма верклинш 7/VIII 1981-чи ил, Чəпə жығылмышы III/XI 1981-чи ил, Кəрмəт форматы 60x90/16, Кəрмəт № 3, Јатын гарнитуру, Түксəк чəп. Физики вə шəртл ч. в. 28,25. Шəртл ранк-оттєк 640 мин, Учот нəшр. вəрəги 24,8. Сифарыш № 407. Тиражы 22500. Чылда сүјмəти 95 гəп.

Азəрбајҹан ССР Дəвлəт Нəшријат Полиграфія вə Китаб Тичарəти Ишлəри Комитəсинин „Маариф“ Нəшријат, Бəки, Ə, Тəрихлəдə, күчəни № 4.

Азəрбајҹан ССР Дəвлəт Нəшријат, Полиграфія вə Китаб Тичарəти Ишлəри Комитəсинин, „Гүмүш Шəрт“ нəтбəсəи, Бəки, Һəзи Аслəнов күчəни, № 30.

Азəрбајҹанское государственное издательство учебно-педагогической литературы „Маариф“, г. Баку, ул. А. Тигинадзе № 4.

Типография им. „Красный Восток“, Баку, ул. Азиз Асланова, 80.

95 гэл. : ..

1981
836

